高等学校试用教材

结构力学

上册

第二分册

清华大学结构力学教研组编
龙驭球　包世华　主编

人民教育出版社

结构力学　上册　第二分册　清华大学结构力学教研组编　龙驭球　包世华　主编　人民

高 等 学 校 试 用 教 材

结 构 力 学

上 册

第 二 分 册

清华大学结构力学教研组编

龙驭球 包世华 主编

人 民 教 育 出 版 社

内容提要

本书是根据一九七七年十一月教育部委托召开的高等学校工科力学教材会议讨论的《结构力学》编写大纲编写的，适用于五年制土建、水利类专业。

全书共十三章，分上、下两册。上册讨论静定结构和超静定结构的基本计算方法，包括：绪论和构造分析、静定结构的受力分析、虚功原理和结构的位移计算、力法、位移法、渐近法和近似法、影响线以及结构的计算简图和计算方法等八章。下册讨论结构分析中的能量方法、矩阵方法和几个专题，包括：能量原理、结构矩阵分析、结构的动力计算、结构的稳定计算以及结构的弹塑性概念和极限荷载等五章。关于弹性地基梁的计算的内容，考虑到教学上的方便，将单独成册，另行出版。

本书作为五年制土建、水利类专业的试用教材，也可供其他专业和有关工程技术人员参考。

高等学校试用教材

结构力学

上册

第二分册

清华大学结构力学教研组编

龙驭球　包世华　主编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

山东新华印刷厂德州厂印装

*

开本787×1092 1/16　印张 14.5　字数 333,000

1979年9月第1版　1981年4月第2次印刷

印数 9,001—22,000

书号 15012·0202　定价 1.20 元

目　　录

806006

第五章 位 移 法

§5-1 位移法的基本概念

力法和位移法是计算超静定结构的两个基本方法。力法发展较早，十九世纪末已经应用于分析各种超静定结构。位移法稍晚一点，是在本世纪初为了计算复杂刚架而建立起来的。力法只适用于超静定结构，位移法虽然主要用于超静定结构，但也可用于静定结构。也就是说，从力法角度看，静定与超静定的界线是很分明的，但从位移法角度看，这条界线是无关紧要的，是可有可无的。

力法与位移法的主要区别，在于所选用的基本未知量不同，主攻目标不同。力法把多余约束力选作基本未知量，而位移法则把结点位移选作基本未知量。顾名思义，它们的主要特征已经反映在名称上了。

由于主攻目标不同，因而解题的思路也各异。力法是把超静定结构拆成静定结构，再由静定结构过渡到超静定结构。而位移法则是把结构拆成杆件，再由杆件过渡到结构。它们都采用过渡法，由简到繁，由已知过渡到未知；但是它们的出发点不同，力法是以静定结构为出发点，位移法则是以杆件为出发点。

在学习力法时，要求巩固地掌握静定结构的分析方法；而在学习位移法时，要求巩固地掌握杆件的分析方法以及杆件的基本特性。

本章的主要任务是应用位移法计算刚架。作为入门的向导，我们先看一个简单例子，以便更具体地了解位移法的基本思路。

图 5-1 a 为一个对称结构，由 n 个竖向拉杆和一个刚性横梁所组成，承受对称荷载 P。当 $n=2$ 时，结构是静定的；当 $n\geqslant3$时，结构是超静定的。用位移法计算时，计算方法并不因结构的静定或超静定而有所不同。

在位移法中，我们把横梁的竖向位移 Δ 选作基本未知量。（与此对照，在力法中则以中间各杆的轴力作为基本未知量）。这是因为：如果能设法把位移 Δ 求出，那么各杆的伸长变形就可求出，从而各杆的内力就可求出，整个问题也就迎刃而解了。由此看出，位移 Δ 确实是一个处于关键地位的未知量。

位移法把位移 Δ 选作主攻目标，从作法上看，与力法似乎是背道而驰的；但从抓主要矛盾这个基本思想来看，两者是完全一致的。

现在进一步讨论如何求基本未知量 Δ 的问题。计算分为两步：

第一步，从结构中取出一个杆件 AB（图 5-2），已知杆端 B 的位移为 Δ，则杆端力 N 应为

$$N=\frac{EA}{l}\Delta \tag{5-1}$$

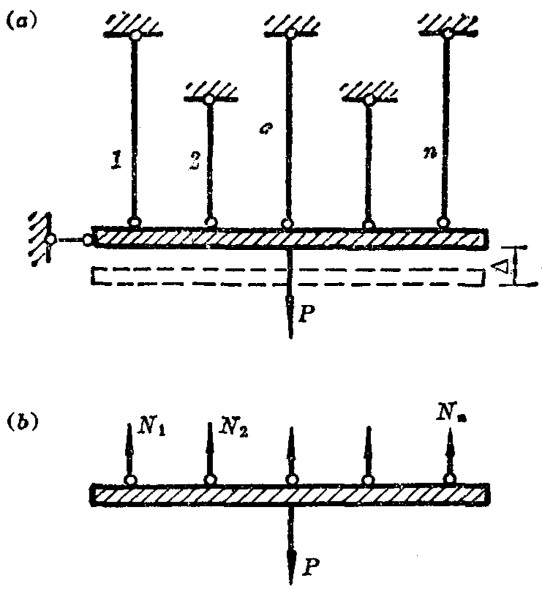


图 5-1

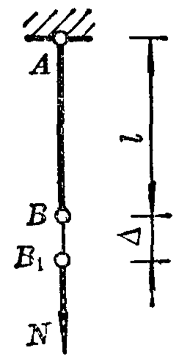


图 5-2

其中 E、A、l 分别为杆件的弹性模量、截面面积和长度。系数$\frac{EA}{l}$是使杆端产生单位位移时所需施加的杆端力，称为刚度系数。式(5-1)表明杆件的杆端力N与杆端位移Δ之间的关系，叫做杆件的刚度方程。

第二步，在结构中取横梁为隔离体（图 5-1b)，可列出平衡方程

$$\Sigma Y=0$$

$$\sum_{k=1}^{n} N_k=P \tag{a}$$

其中各杆的轴力 N_i 可由式(5-1)求出，代入式(a)，即得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{EA_k}{l_k}\Delta=P \tag{b}$$

这就是位移法的基本方程，它表明结构的位移Δ与荷载P之间的关系。由此可求出基本未知量

$$\Delta=\frac{P}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{EA_k}{l_k}} \tag{c}$$

至此，我们完成了位移法计算中的关键一步。

基本未知量Δ求出以后，其余问题就迎刃而解了。例如，为了求各杆的轴力，可将式(c)代入式(5-1)，即得

$$N_i=\frac{\frac{EA_i}{l_i}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{EA_k}{l_k}}P \tag{d}$$

式(d)表明：各杆轴力N_i与各杆刚度系数$\frac{EA_i}{l_i}$成正比。如果各杆的$\frac{EA_i}{l_i}$相等，则各杆轴力也相等，即

$$N_i=\frac{P}{n}$$

由上面的简例，可归纳出位移法的要点如下：

（1）位移法的基本未知量是位移（图 5-1a 中的横梁竖向位移Δ）。

（2）位移法的基本方程是平衡方程[横梁的竖向投影平衡方程式(b)]。

（3）建立基本方程的过程分为两步：

第一步，把结构拆成杆件，进行杆件分析，得出杆件的刚度方程[式(5-1)]。

第二步，再把杆件综合成结构，进行整体分析，得出基本方程。

这个过程是一拆一搭，拆了再搭的过程。它把复杂结构的计算问题转变为简单杆件的分析和综合的问题。这就是位移法的基本思路。

（4）杆件分析是结构分析的基础，杆件的刚度方程是位移法基本方程的基础。因此位移法也叫做刚度法。

例 5-1 求图 5-3a 所示结构各杆的轴力。

解：

这是一个承受偏心荷载的桩基承台的计算简图。桩底打至基岩，略去桩侧摩擦阻力。各杆刚度系数为$\frac{EA_i}{l_i}$。

（1）确定基本未知量

每一桩顶有竖向位移Δ_i，共n个。由于承台梁刚度假设为无限大，n个位移间存在一定的关系，独立的位移数只有两个。现取图 5-3a 中A点的竖向位移Δ和承台梁绕A点转角θ作为基本未知量，则其他未知量与基本未知量间的关系为：

$$\begin{gathered}\Delta_1=\Delta+a_1\theta\\ \Delta_2=\Delta+a_2\theta\\ \cdots\cdots\\ \Delta_i=\Delta+a_i\theta\\ \cdots\cdots\end{gathered}$$

（2）列出各杆的刚度方程

由式(5-1)可列出各杆的刚度方程如下：

$$\left.\begin{aligned}N_1&=\frac{EA_1}{l_1}\Delta_1=\frac{EA_1}{l_1}(\Delta+a_1\theta)\\ N_2&=\frac{EA_2}{l_2}\Delta_2=\frac{EA_2}{l_2}(\Delta+a_2\theta)\\ &\cdots\cdots\\ N_i&=\frac{EA_i}{l_i}\Delta_i=\frac{EA_i}{l_i}(\Delta+a_i\theta)\\ &\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(e)$$

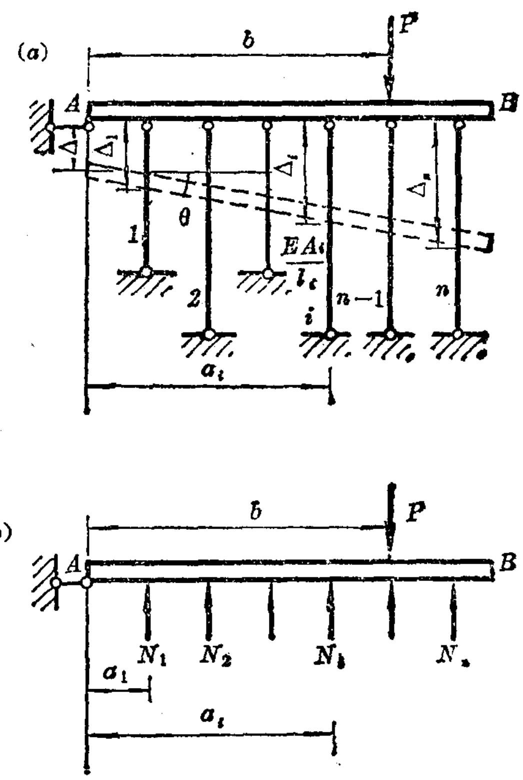


图 5-3

（3）列出位移法的基本方程

位移法的基本方程是平衡方程，本题有两个基本未知量，从图 5-3b 可以列出两个平衡方程：

$$\Sigma Y=0,\qquad \sum_{i=1}^{n} N_i=P$$

$$\Sigma M_A=0,\qquad \sum_{i=1}^{n} N_i a_i=Pb$$

将第二步中的 N_i 代入上式后，得：

$$\left.\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{EA_i}{l_i}\right)\Delta+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{EA_i}{l_i}a_i\right)\theta=P\\ \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{EA_i}{l_i}a_i\right)\Delta+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{EA_i}{l_i}a_i^2\right)\theta=Pb\end{aligned}\right\}\qquad (f)$$

(4) 解位移法方程

解位移法方程(f)，得

$$\Delta=\frac{\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i^2-b\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i}{\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i^2\right)\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}\right)-\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i\right)^2}P$$

$$\theta=\frac{b\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}-\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i}{\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i^2\right)\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}\right)-\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i\right)^2}P$$

(5) 求各杆轴力

将求得的 Δ 和 θ 代回式(e)，即得

$$N_k=\frac{\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i^2-b\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i+a_k\left(b\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}-\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i\right)}{\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i^2\right)\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}\right)-\left(\Sigma\dfrac{EA_i}{l_i}a_i\right)^2}\times\frac{EA_k}{l_k}P$$

$$(k=1,2,\cdots,n)$$

以上结合链杆体系的情况对位移法的基本思路作了简短的说明。现在再结合刚架的情况作进一步的介绍。

图 5-4a 所示为一刚架，在给定荷载下，结点 A 发生角位移 θ_A 和线位移 Δ。采用位移法计算时，我们取结点位移 θ_A 和 Δ 作为基本未知量（注意，支座处的位移不作为基本未知量）。如果我

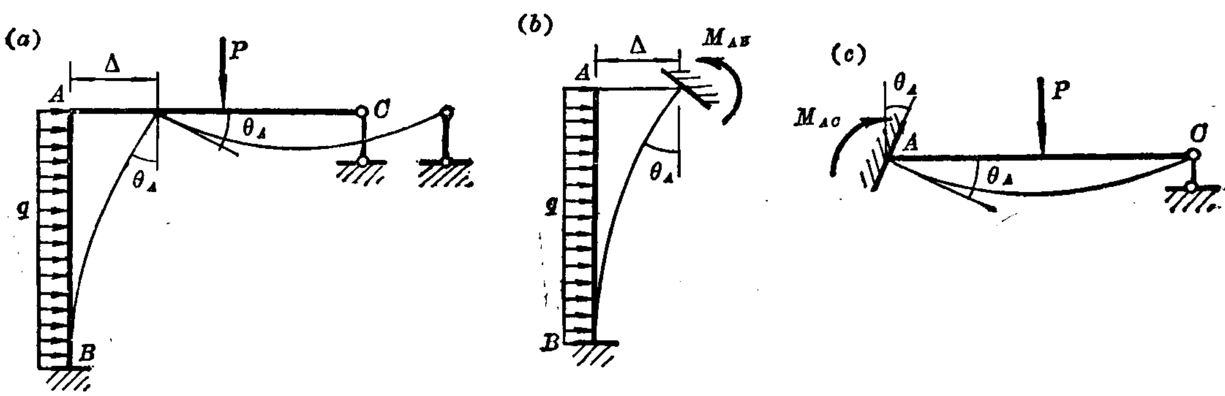


图 5-4

们能够设法把基本未知量 θ_A 和 Δ 求出，那么整个刚架的计算问题就分解成杆件的计算问题，如图 5-4 b 和 c 所示。其中杆 AB 的计算条件是 B 端固定、A 端有已知位移 θ_A 和 Δ，并承受已知荷载 q 的作用。杆 AC 的计算条件是 C 端为简支、A 端有已知位移 θ_A，并承受已知荷载 P 的作用。

由此看出，在刚架位移法中，结点位移是处于关键地位的未知量，只要这个关键问题解决了，余下的问题就是杆件的计算问题。

还可看出，刚架位移法的基本思路仍然是拆了再搭。首先是把刚架拆成杆件，进行杆件分析——杆件在已知端点位移和已知荷载作用下的计算。这相当于前述链杆体系中的第一步，即式(5-1)。但是现在问题要复杂一些，需要 作为预备知识在 § 5-2 中详细讨论。其次是把杆件再合成刚架，利用刚架的平衡条件，建立位移法基本方程，借以求出基本未知量。这相当于前述链杆体系中的第二步，这个问题将在 § 5-3 和 § 5-4 中详细讨论。

§ 5-2　等截面杆件的计算

为了给刚架位移法作好准备，我们讨论等截面杆件计算的两个问题：一是在已知端点位移下求杆端弯矩，二是在已知荷载作用下求固端弯矩。

1. 由杆端位移求杆端弯矩

图 5-5 所示为一等截面杆件 AB，截面惯性矩 I 为常数。已知端点 A 和 B 的角位移分别为 θ_A 和 θ_B，两端垂直杆轴的相对位移为 Δ，拟求杆端弯矩 M_{AB} 和 M_{BA}(注意：如果杆件沿平行或垂直杆轴方向平行移动，则不引起杆端弯矩。因此，我们只需考虑两端在垂直杆轴方向发生相对位移 Δ 的情形。此外，由 Δ 可得出弦转角：$\varphi=\dfrac{\Delta}{l}$)。

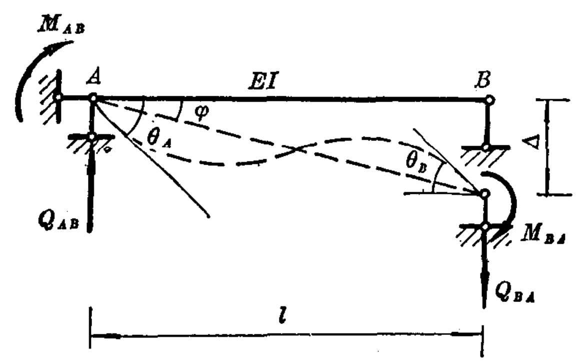


图　5-5

在位移法中，我们采用如下的正负号规则：结点转角 θ_A、θ_B，弦转角 φ，杆端弯矩 M_{AB}、M_{BA}，一律以顺时针转向为正。

必须注意：这里关于杆端弯矩的正负号规则与通常关于弯矩的正负号规则(例如在梁中，弯矩使梁下部纤维受拉者规定为正)有所不同。第一，这里的规则是针对杆端弯矩，而不是针对杆间任一截面的弯矩。第二，当取杆件(或取结点)为隔离体时，杆端弯矩是隔离体上的外力，建立隔离体平衡方程时，力矩一律以顺时针(或反时针)转向为正。因此，这里的规则是把杆端弯矩看作外力，为了便于建立平衡方程(位移法的基本方程)而规定的。另一方面，在作弯矩图时，我们把弯矩看作杆件的内力，因此仍应遵守通常的正负号规则。总之，杆端弯矩有双重身份：既是杆件的内力，又是隔离体的外力，要注意在不同场合按相应的正负号规则办事。

首先，计算简支梁在两端力偶 M_{AB}、M_{BA} 作用下产生的杆端转角 (图 5-6a)。由单位荷载法，得：

$$
\left.\begin{aligned}
\theta_A &= \frac{1}{3i}M_{AB} - \frac{1}{6i}M_{BA} \\
\theta_B &= -\frac{1}{6i}M_{AB} + \frac{1}{3i}M_{BA}
\end{aligned}\right\} \tag{5-2}
$$

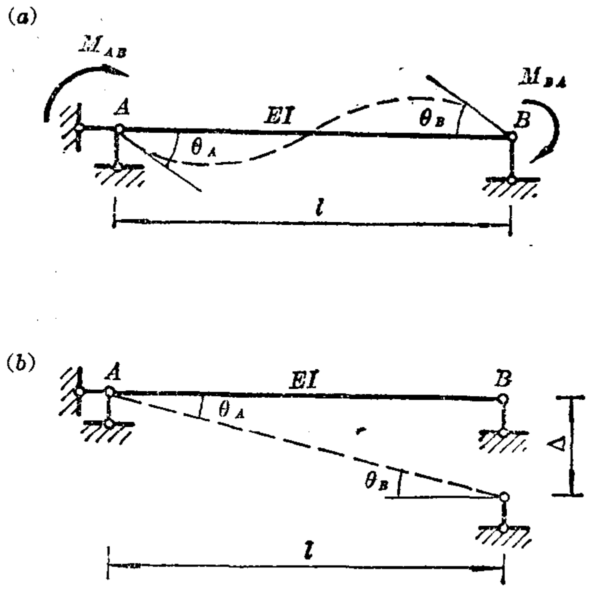


图 5-6

其中，$i=\dfrac{EI}{l}$，称为杆件的线刚度。

其次，当简支梁两端有相对竖向位移 Δ 时（图 5-6b），杆端转角应为

$$
\theta_A = \theta_B = \frac{\Delta}{l} \tag{5-3}
$$

综合起来，当两端有力偶 M_{AB}、M_{BA} 作用，而两端又有相对竖向位移 Δ 时，则杆端转角为：

$$
\left.\begin{aligned}
\theta_A &= \frac{1}{3i}M_{AB} - \frac{1}{6i}M_{BA} + \frac{\Delta}{l} \\
\theta_B &= -\frac{1}{6i}M_{AB} + \frac{1}{3i}M_{BA} + \frac{\Delta}{l}
\end{aligned}\right\} \tag{5-4}
$$

解联立方程，则得：

$$
\left.\begin{aligned}
M_{AB} &= 4i\theta_A + 2i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} \\
M_{BA} &= 2i\theta_A + 4i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l}
\end{aligned}\right\} \tag{5-5}
$$

式(5-5)就是由杆端位移 θ_A、θ_B、Δ 求杆端弯矩的公式（习惯上称为转角位移方程）。此外，由平衡条件还可求出杆端剪力如下：

$$
Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{1}{l}(M_{AB} + M_{BA})
$$

再将式(5-5)代入，即得

$$
Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta \tag{5-6}
$$

为了紧凑起见，可以把式(5-5)和(5-6)写成矩阵的形式：

$$
\begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ Q_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i & -\dfrac{6i}{l} \\ 2i & 4i & -\dfrac{6i}{l} \\ -\dfrac{6i}{l} & -\dfrac{6i}{l} & \dfrac{12i}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta \end{Bmatrix} \tag{5-7}
$$

上式与式(5-1)具有类似的形式，称为弯曲杆件的刚度方程。其中

$$
\begin{bmatrix} 4i & 2i & -\dfrac{6i}{l} \\ 2i & 4i & -\dfrac{6i}{l} \\ -\dfrac{6i}{l} & -\dfrac{6i}{l} & \dfrac{12i}{l^2} \end{bmatrix}
$$

称为弯曲杆件的刚度矩阵，其中的系数称为刚度系数。刚度系数是只与杆件的几何尺寸和材料性质有关的常数，所以又叫做形常数。

下面讨论杆件在一端具有不同支座时的刚度方程。

(1) B端为固定支座(图 5-7a)

在式(5-5)中令 $\theta_B=0$，则得：

$$\left.\begin{aligned} M_{AB}&=4i\theta_A-6i\frac{\Delta}{l} \\ M_{BA}&=2i\theta_A-6i\frac{\Delta}{l} \end{aligned}\right\} \tag{5-8}$$

(2) B端为铰支座(图 5-7b)

在式(5-4a)中令 $M_{BA}=0$，则得

$$M_{AB}=3i\theta_A-3i\frac{\Delta}{l} \tag{5-9}$$

(3) B端为滑动支座(图 5-7c)

在式(5-6)中令 $\theta_B=0$ 和 $Q_{AB}=Q_{BA}=0$，则得

$$\frac{\Delta}{l}=\frac{1}{2}\theta_A$$

再代入式(5-5)，得：

$$\left.\begin{aligned} M_{AB}&=i\theta_A \\ M_{BA}&=-i\theta_A \end{aligned}\right\} \tag{5-10}$$

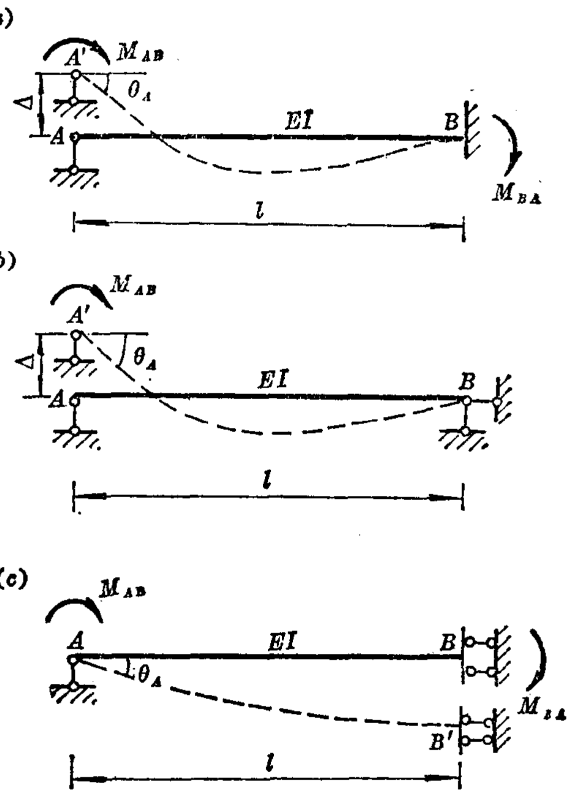


图 5-7

2. 由荷载求固端弯矩

对于下列三种杆件：

(1) 两端固定的梁；

(2) 一端固定、另一端简支的梁；

(3) 一端固定、另一端滑动支承的梁；

表 5-1 给出了几种常见荷载作用下的杆端弯矩和剪力，称为固端弯矩和固端剪力。因为它们是只与荷载形式有关的常数，所以又叫做载常数。固端弯矩用 m_{AB} 和 m_{BA} 表示。

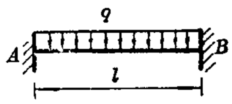
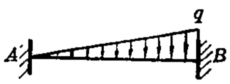
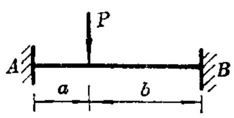
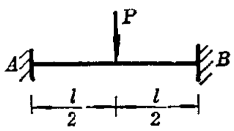
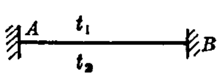
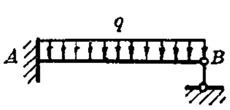
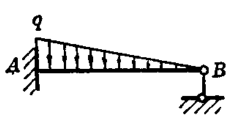
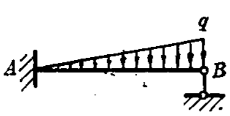
在两端固定的梁中，表 5-1 第三行的公式是基本公式，利用这个公式，根据叠加原理，可得出在集中力系 P_i 和分布荷载 $q(a)$ 作用下的固端弯矩如下(图 5-8)：

$$\left.\begin{aligned} m_{AB}&=-\Sigma P_i\frac{a_i(l-a_i)^2}{l^2}-\int_0^l\frac{q(a)a(l-a)^2}{l^2}da \\ m_{BA}&=\Sigma P_i\frac{a_i^2(l-a_i)}{l^2}+\int_0^l\frac{q(a)a^2(l-a)}{l^2}da \end{aligned}\right\} \tag{5-11}$$

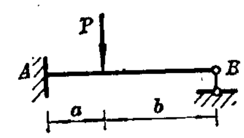
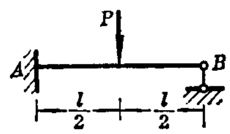
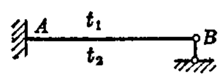
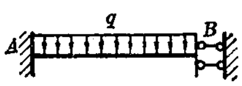
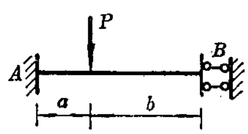
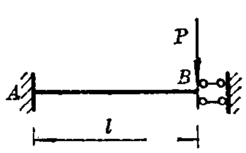
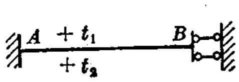
这里 a_i 表示荷载 P_i 与 A 端的距离，a 表示荷载 $q(a)da$ 与 A 端的距离。

此外，三类梁的固端弯矩是有联系的，例如第二、三类梁的固端弯矩可利用第一类梁的结果得到。

表 5-1 等截面杆件的固端弯矩和剪力

	编号	简图	固端弯矩(以顺时针转向为正)	固端剪力
两端固定	1		$m_{AB}=-\frac{ql^2}{12}$ $m_{BA}=+\frac{ql^2}{12}$	$Q_{AB}=+\frac{ql}{2}$ $Q_{BA}=-\frac{ql}{2}$
	2		$m_{AB}=-\frac{ql^2}{30}$ $m_{BA}=+\frac{ql^2}{20}$	$Q_{AB}=+\frac{3ql}{20}$ $Q_{BA}=-\frac{7ql}{20}$
	3		$m_{AB}=-\frac{Pab^2}{l^2}$ $m_{BA}=+\frac{Pa^2b}{l^2}$	$Q_{AB}=+\frac{Pb^2}{l^2}\left(1+\frac{2a}{l}\right)$ $Q_{BA}=-\frac{Pa^2}{l^2}\left(1+\frac{2b}{l}\right)$
	4		$m_{AB}=-\frac{Pl}{8}$ $m_{BA}=+\frac{Pl}{8}$	$Q_{AB}=+\frac{P}{2}$ $Q_{BA}=-\frac{P}{2}$
	5	 $t_1-t_2=t'$	$m_{AB}=\frac{EI\alpha t'}{h}$ $m_{BA}=-\frac{EI\alpha t'}{h}$	$Q_{AB}=0$ $Q_{BA}=0$
一端固定另一端铰支	6		$m_{AB}=-\frac{ql^2}{8}$	$Q_{AB}=+\frac{5}{8}ql$ $Q_{BA}=-\frac{3}{8}ql$
	7		$m_{AB}=-\frac{ql^2}{15}$	$Q_{AB}=+\frac{2}{5}ql$ $Q_{BA}=-\frac{1}{10}ql$
	8		$m_{AB}=-\frac{7ql^2}{120}$	$Q_{AB}=+\frac{9}{40}ql$ $Q_{BA}=-\frac{11}{40}ql$

（续）

	编号	简　　　　图	固端弯矩（以顺时针转向为正）	固　端　剪　力
一端固定另一端铰支	9		$m_{AB}=-\frac{Pb(l^2-b^2)}{2l^2}$	$Q_{AB}=+\frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$ $Q_{BA}=-\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}$
	10		$m_{AB}=-\frac{3Pl}{16}$	$Q_{AB}=+\frac{11}{16}P$ $Q_{BA}=-\frac{5}{16}P$
	11	 $t'=t_1-t_2$	$m_{AB}=\frac{3EI\alpha t'}{2h}$	$Q_{AB}=-\frac{3EI\alpha t'}{2hl}$ $Q_{BA}=-\frac{3EI\alpha t'}{2hl}$
一端固定另一端滑动支承	12		$m_{AB}=-\frac{ql^2}{3}$ $m_{BA}=-\frac{ql^2}{6}$	$Q_{AB}=+ql$ $Q_{BA}=0$
	13		$m_{AB}=-\frac{Pa}{2l}(2l-a)$ $m_{BA}=-\frac{Pa^2}{2l}$	$Q_{AB}=+P$ $Q_{BA}=0$
	14		$m_{AB}=-\frac{Pl}{2}$ $m_{BA}=-\frac{Pl}{2}$	$Q_{AB}=+P$ $Q_{B左}=+P$ $Q_{B右}=0$
	15	 $t'=t_1-t_2$	$m_{AB}=\frac{EI\alpha t'}{h}$ $m_{BA}=-\frac{EI\alpha t'}{h}$	$Q_{AB}=0$ $Q_{BA}=0$

如果等截面杆件既有已知荷载作用，又有已知的端点位移，则根据叠加原理，杆端弯矩的一般公式为[对照式(5-5)]：

$$\left.\begin{aligned} M_{AB}&=4i\theta_A+2i\theta_B-6i\frac{\Delta}{l}+m_{AB}\\ M_{BA}&=2i\theta_A+4i\theta_B-6i\frac{\Delta}{l}+m_{BA}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}12)$$

杆端剪力的一般公式为[对照式(5-6)]：

$$\left.\begin{aligned} Q_{AB}&=-\frac{6i}{l}\theta_A-\frac{6i}{l}\theta_B+\frac{12i}{l^2}\Delta+\bar{Q}_{AB}\\ Q_{BA}&=-\frac{6i}{l}\theta_A-\frac{6i}{l}\theta_B+\frac{12i}{l^2}\Delta+\bar{Q}_{BA}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}13)$$

式中 $\bar{Q}_{AB}$ 和 $\bar{Q}_{BA}$ 是荷载引起的固端剪力。

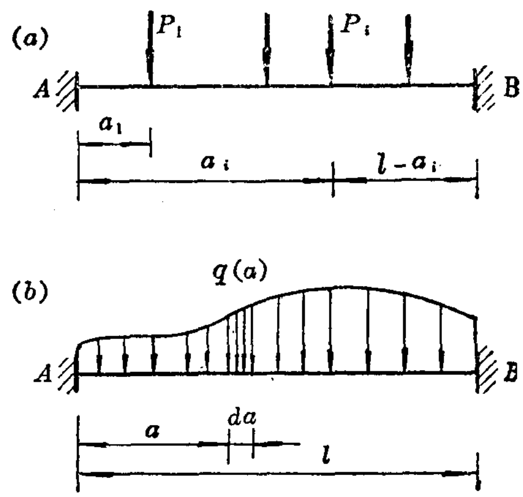


图 5-8

思 考 题

5-2-1. 试从两端刚结杆的杆端弯矩公式推求一端刚结、他端铰结杆的杆端弯矩公式。

5-2-2. 试用式(5-11)验算表 5-1 中第 1、2行中的固端弯矩公式。

§5-3 无侧移刚架的计算

如果刚架的各结点(不包括支座)只有角位移而没有线位移，这种刚架叫做无侧移刚架。

本节先讨论无侧移刚架的计算。连续梁的计算也属于这类问题。

图 5-9 a 所示为一连续梁，在荷载作用下，结点 B 只有角位移 θ_B，没有线位移，属于无侧移的问题。

采用位移法计算时，我们取结点角位移 θ_B 作为基本未知量(铰支座 C 处虽有角位移，但不选作基本未知量)。

由表 5-1 可求出各杆的固端弯矩为：

$$-m_{AB}=+m_{BA}=\frac{20\times 6}{8}=15\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$m_{BC}=-\frac{2\times 6^2}{8}=-9\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

再利用式(5-8)和(5-9)(其中令 $\Delta=0$)，可列出各杆杆端弯矩如下(设各杆的线刚度 i 相等)：

$$\left.\begin{aligned} M_{AB}&=2i\theta_B-15\\ M_{BA}&=4i\theta_B+15\\ M_{BC}&=3i\theta_B-9\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

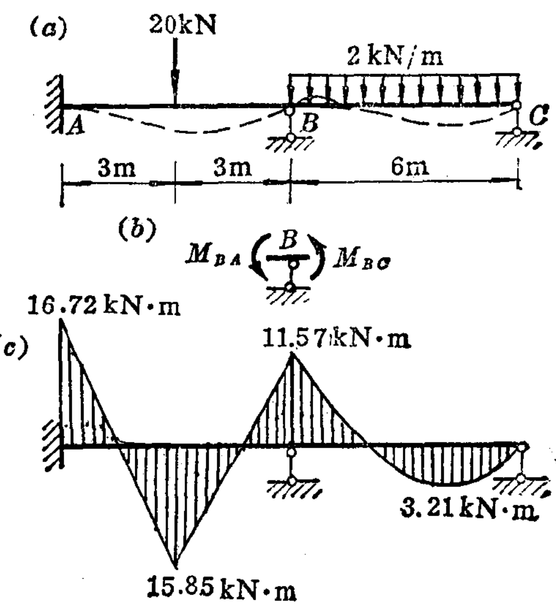


图 5-9

由此看出，一旦求出 θ_B，杆端弯矩即可求出。

下面建立位移法基本方程，以便求出基本未知量 θ_B。为此，取结点 B 为隔离体(图 5-9b)，可列出力矩平衡方程：

$$\Sigma M_B=0, \quad M_{BA}+M_{BC}=0 \tag{b}$$

利用式(a)，此平衡方程可写为

$$7i\theta_B+6=0 \tag{c}$$

式(c)就是用位移 θ_B 表示的平衡方程，即位移法的基本方程，由此可求出基本未知量

$$\theta_B=-\frac{6}{7i} \tag{d}$$

至此，位移法的关键问题已得到解决。余下的问题是将式(d)代入式(a)，即可求出各杆杆端弯矩：

$$M_{AB}=2i\left(-\frac{6}{7i}\right)-15=-16.72\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{BA}=4i\left(-\frac{6}{7i}\right)+15=11.57\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{BC}=3i\left(-\frac{6}{7i}\right)-9=-11.57\ \mathrm{kN\cdot m}$$

据此，可作弯矩图，如图 5-9 c 所示。

一般说来，用位移法解连续梁和无侧移刚架时，在每个刚结点处有一个结点转角——基本未知量；与之相应，在每个刚结点处又可写出一个力矩平衡方程——基本方程。因此基本方程的个数与基本未知量的个数恰好相等，因而，可解出全部基本未知量。

位移法的基本作法是先拆散，后组装。组装的原则有二：首先，在结点处各个杆件的变形要协调一致；其次，装配好的结点要满足平衡条件。关于第一个要求，在选定基本未知量时已经考虑到了。因为在每个刚结点处只规定了一个结点转角，也就是说，我们规定了刚结点处的各杆杆端转角都彼此相等，这样就保证了结点处的变形连续条件。关于第二个要求，是在建立基本方程时才考虑的。因为基本方程就是根据结点的平衡条件列出的。从这里我们不仅看到位移法的解答已经满足平衡条件和变形连续条件，而且还看到经过什么途径才使这两方面的条件得到满足。

例 5-2 求作图 5-10a 所示刚架的弯矩图。

解：

(1) 基本未知量

共有两个基本未知量：θ_B、θ_C。

(2) 杆端弯矩

固端弯矩查表 5-1 求得：

$$m_{BA}=\frac{ql^2}{8}=\frac{20\times4^2}{8}=40\mathrm{kN\cdot m}$$

$$m_{BC}=-\frac{ql^2}{12}=-\frac{20\times5^2}{12}=-41.7\mathrm{kN\cdot m}$$

$$m_{CB}=41.7\mathrm{kN\cdot m}$$

各杆刚度取相对值计算，设 $EI_0=1$，则：

$$i_{BA}=\frac{4EI_0}{4}=1,\ i_{BC}=\frac{5EI_0}{5}=1,\ i_{CD}=\frac{4EI_0}{4}=1$$

$$i_{BE}=\frac{3EI_0}{4}=\frac{3}{4},\quad i_{CF}=\frac{3EI_0}{6}=\frac{1}{2}$$

由式(5-5)、(5-8)、(5-9)，再叠加固端弯矩，可列出各杆杆端弯矩如下：

$M_{BA}=3i_{BA}\theta_B+m_{BA}=3\theta_B+40$

$M_{BC}=4i_{BC}\theta_B+2i_{BC}\theta_C+m_{BC}=4\theta_B+2\theta_C-41.7$

$M_{CB}=2i_{BC}\theta_B+4i_{BC}\theta_C+m_{CB}=2\theta_B+4\theta_C+41.7$

$M_{CD}=3i_{CD}\theta_C=3\theta_C$

$M_{BE}=4i_{BE}\theta_B=3\theta_B,\quad M_{EB}=2i_{BE}\theta_B=1.5\theta_B$

$M_{CF}=4i_{CF}\theta_C=2\theta_C,\quad M_{FC}=2i_{CF}\theta_C=\theta_C$

(3) 位移法方程

结点 B 平衡，$\Sigma M_B=0$ (图 b)：

$$M_{BA}+M_{BC}+M_{BE}=0$$

将上步结果代入得

$$10\theta_B+2\theta_C-1.7=0 \qquad (a)$$

结点 C 平衡，$\Sigma M_C=0$ (图 c)：

$$M_{CB}+M_{CD}+M_{CF}=0$$

将上步结果代入得

$$2\theta_B+9\theta_C+41.7=0 \qquad (b)$$

(4) 求基本未知量

解 (a)、(b)两方程，得

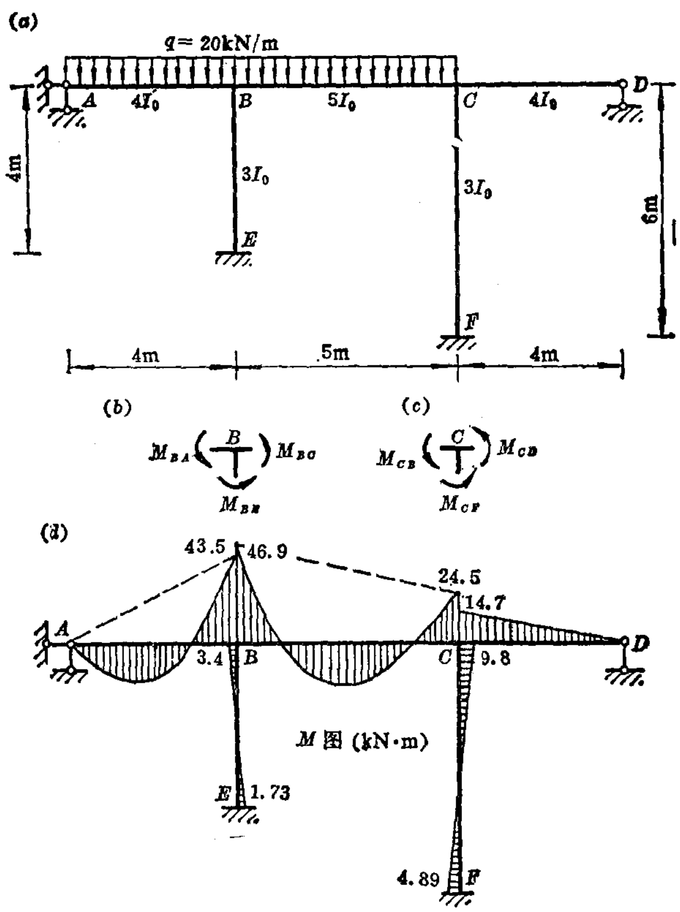


图 5-10

$$\theta_B=1.15,\quad \theta_C=-4.89$$

(5) 求杆端弯矩

将求得的位移代入第 2 步各式，得：

$M_{BA}=3\times(1.15)+40=43.5\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{BC}=4\times(1.15)+2\times(-4.89)-41.7=-46.9\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{CB}=2\times(1.15)+4\times(-4.89)+41.7=24.5\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{CD}=3\times(-4.89)=-14.7\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{BE}=3\times(1.15)=3.4\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{EB}=1.5\times1.15=1.73\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{CF}=2\times(-4.89)=-9.78\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{FC}=-4.89\text{kN}\cdot\text{m}$

最后指出，因为各杆用的是相对刚度，因而例题中求出的位移并不是真值。如果要求位移的真值，则刚度也必须采用真值。

思 考 题

5-3-1. 为什么支座处的角位移可不选作基本未知量？试比较当支座处角位移选作与不选作基本未知量时两种算法的优缺点。

5-3-2. 为什么求内力时可采用刚度的相对值，而求位移时则需采用绝对值？