休姆斯題解叢書

1986

複變分析
原理及題解

駱傳孝譯

含640個問題及解答

曉園出版社

複變分析

原理及題解

駱傅孝 譯

曉園出版社

初 版 1987年3月第一次印刷發行

複變分析原理及題解

定價：新臺幣 200 元

原著者：MURRAY R SPIEGEL
譯著者：駱傳孝
發行人：黃旭政
發行所：曉園出版社有限公司
HSIAO-YUAN PUBLICATION COMPANY LIMITED
臺北市青田街7巷5號
電話：(02)394-9931三線
郵撥：1075734-4號
門市部(1)：臺北市新生南路三段96號之三
電話：3917012・3947375
門市部(6)：臺北市重慶南路一段115號
電話：三三一三三六〇
門市部(3)：臺北縣淡水鎮英專路71號
電話：六二一七八四〇
門市部(4)：臺中市西屯區文華路113號
電話：(04)251-2759・254-6663
印刷所：遠大印刷廠
臺北市武成街36巷16弄15號
出版登記：局版臺業字第1244號
著作執照：臺內著字第 號

原著序

複變數函數理論，或簡稱為複變分析，是數學領域中最完美且最有用的一個分支。雖然在剛開始發展時，複變分析正如它字面上“虛”及“複”所表現的，充滿著神秘、懸疑的氣氛。但是在十九世紀經過柯西（Cauchy）、里曼（Riemann）、瓦士曲士（Weierstrass）、高斯（Gauss）等偉大數學家的努力，終於奠定了複變理論牢不可破的基礎。

今日，複變理論已經成為工程師、物理學家、數學家及其他科學家所不可或缺的數學知識。由理論的觀點來看，當使用複變理論來考慮時，許多數學觀念變得非常清晰明確。由應用的觀點來看，複變理論在解有關熱流、位論、流體力學、電磁理論、空氣動力學、彈力學及許多其他科學工程領域的問題時相當有價值。

本書的設計可作為現行標準教科書的補充教材，或作為複變理論及應用的正式課程教本。在數學、物理、空氣動力學、彈性理論及其他用到複變方法的課程中，本書也是一本相當有價值的參考書。

在各章的開始，先明確的敘述有關的定義、原理及定理的說明。然後跟著大量按內容分類的解說題及補充題。解說題用來說明及擴展定理的應用，使讀者能循序漸進的瞭解教材的內容，達到有效的學習。解說題也包含了大量定理的證明及公式的推導。附有答案的補充題，使讀者能充分的複習有關的教材。

本書的內容包含了複數的代數與幾何、複微分與複積分、無窮級數、留數定理及應用留數定理求級數及積分的值、保角映射及其在各不同領域的應用。此外，本書還附加了一章討論一些特殊論題，這些討論在讀者學習更深入的課程時非常有用。

本書也加入了一些較初級課程更深入的教材使得教材內容更具備彈性，更有參考價值，也更能引發讀者對複變分析的興趣。

目　　錄

第一章
複　　數

實數系

我們現在所熟知的數系是經由下列過程逐漸發展而成的。

1. **自然數**(natural number) 1，2，3，4，…，也稱作**正整數**(positive integer)，是最先用來作爲計數用的數。它的符號隨著時代不同而有所變化，例如，羅馬人使用 I，II，III，IV，…。如果 a 和 b 是兩個自然數，那麼它們的**和**(sum) $a+b$ 與**積**(product) $a \cdot b$，$(a)(b)$ 或 ab 也是自然數。因此，我們說此自然數集合對於**加法**(addition)及**乘法**(multiplication)運算是**封閉的**(closed)，或說它對這些運算具有**封閉性**(closure property)。
2. **負整數**(negative integer)與**零**(zero)分別記作 -1，-2，-3，…與 0，它們是爲了要解像 $x+b=a$（式中 a，b 爲任意自然數）這種方程式而產生的。由此引出了**減法**(subtraction)或**加法逆**(inverse of addition)運算，而我們將 x 寫作 $x=a-b$。

   正整數，負整數與零所成的集合稱爲**整數集**(integer set)，此集合對於加法、乘法及減法運算具有封閉性。
3. **有理數**(rational number)或**分數**(fraction)，例如 $\frac{3}{4}$，$-\frac{8}{3}$，…，它們是爲了解像 $bx=a$（a，b 可爲任意整數，但 $b \neq 0$）這樣的方程式而產生的。由此引出了**除法**(division)或**乘法逆**(inverse of multiplication)運算，而我們記作 $x=a/b$ 或 $a \div b$［稱爲 a 與 b 的**商**(quotient)］，其中 a 稱爲**分子**(numerator)，b 稱爲**分母**(denominator)。

   由於每一個整數 a 都會對應到一個有理數 a/b（$b=1$），所以整數集是有理數集的一個部分集合。

   只要分母不爲 0，有理數對於加法、減法、乘法與除法運算均具有封閉性。
4. **無理數**(irrational number)，例如 $\sqrt{2}=1.41423\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$，就是那些不是有理數的數，亦即不能表示成 a/b 形式的數，其中 a，b 均爲整數，$b \neq 0$。

有理數與無理數的集合稱爲**實數**(real number)。我們假設讀者對於實數的所

有運算都十分熟悉了。

實數的圖形表示法

實數可以像圖 1-1 一般，用一條直線上的點來表示，此直線稱爲**實軸**(real axis)。對應於零的點稱爲**原點**(origin)。

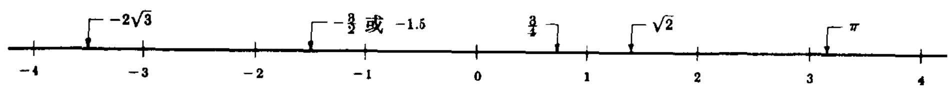

圖 1-1

反之，對此線上的任一點也恰有一實數與之對應。若對應於實數 a 的點 A 位於對應於實數 b 之點 B 的右側，則我們說 a **大於** b 或說 b **小於** a ，並且分別記作 $a > b$ 或 $b < a$ 。

所有滿足 $a < x < b$ 的 x 值所成的集合稱爲在實軸上的一個**開區間**(open interval)。而 $a \leq x \leq b$ 之區間包含了兩端點 a 和 b ，稱爲一個**閉區間**(closed interval)。符號 x 被用來代表一實數集合中的任一元素，稱爲**實變數**(real variable)。

一個實數 a 的**絕對值**(absolute value)，記作 $|a|$ ，在 $a > 0$ 時，其等於 a ；在 $a < 0$ 時，其等於 $-a$ ；而在 $a = 0$ 時， $|a| = 0$ 。介於實軸上兩點 a 與 b 之間的距離爲 $|a - b|$ 。

複數系

沒有一個實數 x 能滿足多項式方程式 $x^2 + 1 = 0$ 。爲了要解這一類的方程式，所以引進了**複數**(complex number)。

我們可以將一個複數看成 $a + bi$ 的形式，其中 a 和 b 均爲實數 ，而 i 稱爲**虛數單位**(imaginary unit)，其有 $i^2 = -1$ 的性質。若 $z = a + bi$ ，則 a 稱爲 z 的**實部**(real part)，而 b 稱爲 z 的**虛部**(imaginary part)，並且分別記作 $\mathrm{Re}\{z\}$ 及 $\mathrm{Im}\{z\}$ 。符號 z 被用來代表一複數集中的任一元素，稱爲**複變數**(complex variable)。

兩個複數 $a + bi$ 與 $c + di$ 相等若且唯若 $a = c$ 且 $b = d$ 。我們可以將實數看作是複數的一個子集合($b = 0$)。因此，複數 $0 + 0i$ 及 $-3 + 0i$ 分別代表實數 0 及 -3 。若 $a = 0$ ，則複數 $0 + bi$ 或 bi 稱爲**純虛數**(pure imaginary number)。

一個複數 $a + bi$ 的**共軛複數**(complex conjugate)爲 $a - bi$ 。複數 z 的共軛複數通常記作 $\bar{z}$ 或 z^* 。

複數的基本運算

在演算複數的運算時，我們可以遵循實數的運算法則，只要在遇到 i^2 時用 -1 取代即可。

(1) 加法

$$(a+bi)+(c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$$

(2) 減法

$$(a+bi)-(c+di) = a+bi-c-di = (a-c)+(b-d)i$$

(3) 乘法

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

(4) 除法

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$

$$= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

絕對值

一個複數 $a+bi$ 的絕對值（absolute value）或模（modules）定義為 $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$。

例：

$$|-4+2i| = \sqrt{(-4)^2+(2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

若 z_1，z_2，z_3，…，z_m 為複數，則其具有下列性質。

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$　或　$|z_1 z_2\cdots z_m| = |z_1||z_2|\cdots|z_m|$

(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$　若　$z_2 \neq 0$

(3) $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$　或　$|z_1+z_2+\cdots+z_m| \leqq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_m|$

(4) $|z_1+z_2| \geqq |z_1|-|z_2|$　或　$|z_1-z_2| \geqq |z_1|-|z_2|$

複數系的公理基礎

由嚴格的邏輯觀點來看，我們可以將複數定義成一個有序實數對（a，b），其具有的一些運算定義可以獲得與上述等價的結果。這些定義敍述於下，所有的字母均代表實數。

A. 相等性　$(a,b) = (c,d)$　若且唯若 $a=c,\ b=d$

B. 和　$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$

C. 積 $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

$m(a,b) = (ma,\ mb)$

由這些定義我們可以證明（第 14 題）$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$，在聯想到 $a+bi$ 時，我們可以用 i 代表符號 $(0,1)$，具有 $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)$［此可與實數 -1 視為等價］的性質，而 $(1,0)$ 可以視為與實數 1 等價。有序對 $(0,0)$ 對應於實數 0。

由上面的敘述，我們可以證明若 z_1，z_2，z_3 屬於複數集 S，則

(1) z_1+z_2 及 z_1z_2 屬於 S　　封閉性

(2) $z_1+z_2=z_2+z_1$　　加法交換律

(3) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$　　加法結合律

(4) $z_1z_2=z_2z_1$　　乘法交換律

(5) $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$　　乘法結合律

(6) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$　　分配律

(7) $z_1+0=0+z_1=z_1$，$1\cdot z_1=z_1\cdot 1=z_1$，0 稱為**加法單位元素**（identity with respect to addition），而 1 稱為**乘法單位元素**（identity with respect to multiplication）。

(8) 對任一複數 z_1，在 S 中存在唯一的數 z 使得 $z+z_1=0$；z 稱為 z_1 的**加法反元素**（inverse of z_1 with respect to addition），記作 $-z_1$。

(9) 對任一 $z_1\neq 0$，在 S 中存在唯一的數 z 使得 $zz_1=z_1z=1$；z 稱為 z_1 的**乘法反元素**（inverse of z_1 with respect to multiplication），記作 z_1^{-1} 或 $1/z_1$。

對一般的任意集合，若其滿足上列性質，則稱其為**一場**（field）。

複數的圖形表示法

如果如圖 1-2 所示，在兩條互相垂直的軸 $X'OX$ 及 $Y'OY$（分別稱為 x 軸和 y 軸）上選定實刻度，則對位於此二直線所決定之平面上的一點，我們可以用一個有序實數對 (x,y) 予以定位，稱為此點的**直角座標**（rectangular coordinate），圖 1-2 中的點 P，Q，R，S，T 即為一些例子。

由於一個複數 $x+iy$ 可以被視為一有序實數對，所以我們可以用一個稱為**複數平面**（complex plane）或**阿干圖**（Argand diagram）的 xy 平面中的點來表示複數。例如，在圖 1-2 中的點 P，可以被當作 $(3,4)$ 或 $3+4i$。對每一個複數，在平面上恰有一點與其對應；反之，對平面上的任一點，也恰對應到一個複數。因此，我們

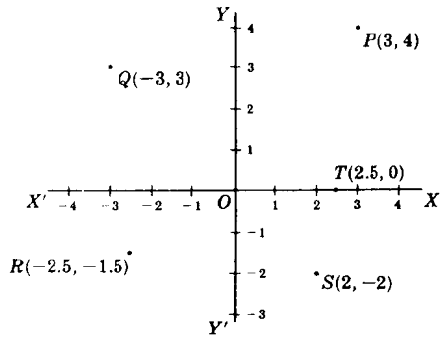

圖 1-2

通常將複數 z 視為一個**點** z。有時候，我們會將 x 軸與 y 軸分別稱為**實軸**(real axis) 和**虛軸**(imaginary axis)，而將複數平面當作 z 平面。在複數平面中介於兩點 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ 之間的距離為 $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$。

複數的極式

若 P 為複數平面中對應到複數 (x, y) 或 $x + iy$ 的點，則我們由圖 1-3 可看出

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ 稱為 $z = x + iy$ 的**模**(modulus) 或**絕對值**(absolute value)，記作 mod z 或 $|z|$；而 θ 稱為 $z = x + iy$ 的**幅角**(amplitude 或 argument)，記作 arg z，其為 OP 線與正 x 軸的夾角。

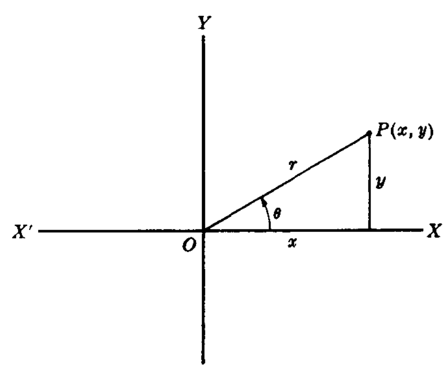

圖 1-3

因此，

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1}$$

此式稱爲複數 z 的**極式**（polar form），且 r 與 θ 稱爲 z 的**極座標**（polar coordinate），有時候爲了方便，我們也可以將 $\cos\theta + i\sin\theta$ 縮寫成 $\text{cis}\,\theta$。

對任一複數 $z \neq 0$，在 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的範圍中都會對應到唯一的 θ 值。然而，任一長度爲 2π 的區間，例如 $-\pi < \theta \leq \pi$，都可採用。對任一選定的特定區域，稱爲**主範圍**（principal range），而在此區域中的 θ 值稱爲**主值**（principal value）。

棣馬佛定理

若 $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$，我們可以證得［參閱第19題］

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \tag{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \tag{3}$$

將(2)式推廣可得

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\} \tag{4}$$

且若 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$，上式變爲

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{5}$$

此式通常稱爲**棣馬佛定理**（De Moivre's theorem）。

複數根

若 $w^n = z$，則我們稱 w 爲複數 z 的 **n 次方根**（nth root），記作 $w = z^{1/n}$。由棣馬佛定理我們可以證明，若 n 爲一正整數，則

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{6}$$

由此可顯示有 n 個不同的 $z^{1/n}$ 值，即只要 $z \neq 0$，就會有 n 個不同的 z 的 n 次方根。

奧衣勒公式

假設在基本微積分中的無窮級數展開式 $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$ 在 $x = i\theta$ 成立，則可導出下列結果，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e = 2.71828\ldots \tag{7}$$

稱爲**奧衣勒公式**（Euler's formula）。如果我們將(7)式取爲 $e^{i\theta}$ 的定義將更方便。一般我們定義

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y) \tag{8}$$

此式在 $y=0$ 時可導出 e^{z} 。

注意在用(7)式來表示時，棣馬佛定理簡化成 $(e^{i\theta})^{n} = e^{in\theta}$ 。

多項式方程式

在實用上，我們經常需要解像

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0 \tag{9}$$

這種形式的多項式方程式，其中 $a_0 \neq 0$ ，a_1，a_2，…，a_n 爲已知複數，而 n 爲一正整數，稱爲此方程式的**次數**（degree）。這些解也稱爲(9)式左邊多項式的**零點**(zeros)或此方程式的**根**（roots）。

有一個叫做**代數基本定理**（fundamental theorem of algebra）［在第5章中將會證明它］的重要定理宣稱：每一個像(9)式這種形式的多項式方程式至少有一個複數根。由此我們可以證明，(9)式事實上有 n 個複數根，它們可能部分或全部相等。

若 z_1，z_2，…，z_n 爲(9)式的 n 個根，則(9)式可改寫成

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) = 0 \tag{10}$$

稱爲此多項式方程式的**因式形**（factored form），反之，若我們可以將(9)式改寫成(10)式，則可很容易地求出它的根。

1 的 n 次方根

若 n 爲正整數，則方程式 $z^n=1$ 的解稱爲**1 的 n 次方根**（nth roots of unity），且這些解爲

$$z = \cos 2k\pi/n + i\sin 2k\pi/n = e^{2k\pi i/n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{11}$$

如果我們令 $\omega = \cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n$ ，則此 n 個根爲 1，ω，ω^2，…，ω^{n-1}。在幾何中，它們代表一中心在原點，半徑爲 1 之圓上的內接正 n 邊形的 n 個頂點。此圓的方程式爲 $|z|=1$ ，通常稱爲**單位圓**（unit circle）。

複數的向量表示法

一個複數 $z=x+iy$ 也可以被看成一個向量 OP ，其**始點**（initial point）爲原點 O，而**終點**（terminal point）P 爲點（x，y），如圖1-4所示。我們有時稱

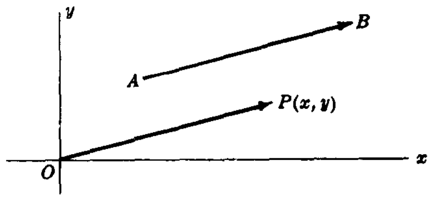

圖 1-4

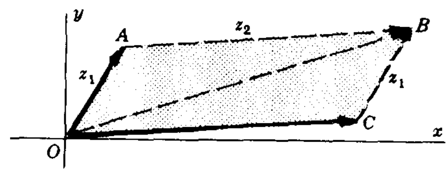

圖 1-5

$OP = x + iy$ 爲 P 點的**位置向量**(position vector)。兩個具有相同**長度**及**方向**，但始點不同的向量，像圖 1-4 中的 OP 及 AB，我們認爲它們是相等的，因此我們可以寫出 $OP = AB = x + iy$。

複數的加法對應於向量加法的**平行四邊形法則**(parallelogram law)[見圖 1-5]。因此要將複數 z_1 與 z_2 相加，我們只要完成平行四邊形 $OABC$ [其邊 OA 與 OC 分別對應於複數 z_1 及 z_2]，此平行四邊形的對角線 OB 就對應於 $z_1 + z_2$，參見圖 1-5。

複數的球面表示法

令 $\mathcal{P}$ [圖 1-6] 爲複數平面，並考慮一與 $\mathcal{P}$ 在 $z = 0$ 相切的單位球 $\mathcal{S}$。直徑 NS 與 $\mathcal{P}$ 垂直，而點 N 與 S 分別稱爲 $\mathcal{S}$ 的**北極**(north pole)和**南極**(south pole)。對 $\mathcal{P}$ 上的任一點 A，我們可畫出一條直線 NA，其與 $\mathcal{S}$ 交於一點 A'。因此，對複數平面 $\mathcal{P}$ 上的任一點，在球面 $\mathcal{S}$ 上都恰有一點與之對應，所以我們可以用球面上的點來表示任一複數。爲了完整性，我們令點 N 本身對應到平面上無窮遠之點。在複數平面上，包含無窮遠處之點的集合稱爲**完整複數平面**(entire complex plane)或**完整 z 平面**(entire z plane)或**擴展複數平面**(extended complex plane)。

上述這種將平面映射至球面的方法稱爲**球極射影**(stereographic projection)，而此球面有時稱爲**黎曼球面**(Riemann sphere)。

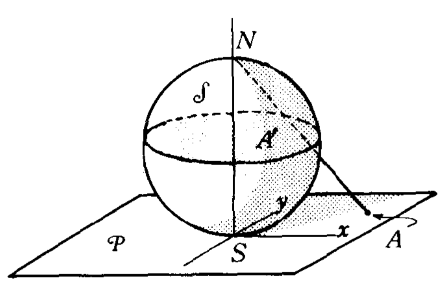

圖 1-6

點積與叉積

令 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$ 爲兩複數［向量］，z_1 與 z_2 之**點積**（dot product）［也稱爲**純量積**（scalar product）］的定義爲

$$z_1 \circ z_2 = |z_1||z_2|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = \text{Re}\{\bar{z}_1 z_2\} = \tfrac{1}{2}\{\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2\} \tag{12}$$

其中 θ 爲 z_1 與 z_2 之夾角，介於 0 與 π 之間。

z_1 與 z_2 之**叉積**（cross product）的定義爲

$$z_1 \times z_2 = |z_1||z_2|\sin\theta = x_1y_2 - y_1x_2 = \text{Im}\{\bar{z}_1 z_2\} = \frac{1}{2i}\{\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2\} \tag{13}$$

明顯地，

$$\bar{z}_1 z_2 = (z_1 \circ z_2) + i(z_1 \times z_2) = |z_1||z_2|e^{i\theta} \tag{14}$$

若 z_1 與 z_2 均非零，則

(1) z_1 與 z_2 垂直的充要條件爲 $z_1 \circ z_2 = 0$。
(2) z_1 與 z_2 平行的充要條件爲 $z_1 \times z_2 = 0$。
(3) z_1 在 z_2 上的投影大小爲 $|z_1 \circ z_2|/|z_2|$。
(4) 以 z_1 及 z_2 爲邊的平行四邊形面積爲 $|z_1 \times z_2|$。

複共軛座標

在複數平面上的點可以用直角座標（x，y）或極座標（r，θ）來定位，當然還有許多其他的方法可以用來定位。其中一種就是利用 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ 的事實，用（z，$\bar{z}$）來定位一點，稱爲**複共軛座標**（complex conjugate coordinates）或簡稱爲該點的**共軛座標**（conjugate coordinates）。［參見第 43 題及第 44 題］。

點集合

在複數平面中任何點的組合稱爲一（二維）**點集合**（point set）。而在點集合中的任一點稱爲此集合的**元**（member）或**元素**（element）。下面列出一些基本定義以供參考。

1. **鄰域**　一點 z_0 的 δ - **鄰域**（δ neighbourhood）是指所有使得 $|z - z_0| < \delta$ 的點 z 所成的集合，其中 δ 爲任一給定的正數。而 z_0 的 δ - **去心鄰域**（deleted δ neighbourhood）是指 z_0 的一個鄰域，但不包含 z_0 點，即 $0 < |z - z_0| < \delta$。

2. **極限點** 若 z_0 的每一個去心鄰域都包含點集 S 中的一些點，則稱 z_0 爲 S 的一個**極限點**(limit point)或**聚點**(point of accumulation 或 cluster point)。

由於 δ 可爲任一正數，所以 S 必須有無窮多點。注意 z_0 不一定屬於 S 。

3. **閉集** 如果 S 的每一個極限點都屬於 S ，即 S 包含其所有的極限點，則稱 S 爲一**閉集**(closed set)。例如 $|z| \leq 1$ 即爲一閉集。

4. **有界集合** 如果我們可以找到一個常數 M ，使得對 S 中的每一點 z ，均有 $|z| < M$ ，則稱 S 爲**有界**(bounded)。一個沒有界的集合，稱爲**無界集合**(unbounded set)。若一集合有界且封閉，則稱其爲**緊緻**(compact)。

5. **內點、外點及邊界點** 一點 z_0 ，若我們可以找到一個 δ 鄰域，使此鄰域中的所有點均屬於 S ，則稱 z_0 爲 S 的一個**內點**(interior point)。若 z_0 的每一個 δ 鄰域，均有些點屬於 S ，而另一些點不屬於 S ，則稱 z_0 爲 S 的一個**邊界點**(boundary point)。若一點既非 S 的邊界點，也不是 S 的內點，則稱爲 S 的**外點**(exterior point)。

6. **開集** 若一集合僅包含內點，則稱爲一**開集**(open set)，例如 $|z| < 1$ 即爲一開集。

7. **連通集合** 若一開集 S 中的任二點都可以用直線段路徑（即一多邊形路徑）相連，且路徑上各點均屬於 S ，則稱 S 爲一**連通集合**(connected set)。

8. **開區域** 一開連通集合亦稱爲**開區域**(open region 或 domain)。

9. **閉包** 若將集合 S 所有的極限點都加入 S 中，則此新的集合爲一閉集，稱爲 S 的**閉包**(closure)。

10. **閉區域** 一開區域的閉包稱爲**閉區域**(closed region)。

11. **區域** 若對一個開區域，我們增加一些，所有，或不增加其極限點，則可得到一集合，稱爲**區域**(region)。如果所有的極限點都加入，此區域爲一**閉區域**。如果一個極限點都不加入，則爲一**開區域**。在本書中，當我們使用**區域**而沒有特別描述時，都指的是開區域。

12. **集合的聯集與交集** 若一個集合包含了所有屬於 S_1 或 S_2 或 S_1 及 S_2 的元素，則稱此集合爲 S_1 與 S_2 的**聯集**(union)，記作 $S_1 + S_2$ 或 $S_1 \cup S_2$ 。

若一集合包含了所有屬於 S_1 也屬於 S_2 的元素，稱爲 S_1 與 S_2 的**交集**(intersection），記作 S_1S_2 或 $S_1 \cap S_2$ 。

13. **餘集合** 若一集合包含了所有不屬於 S 的元素，稱爲 S 的**餘集合**(complementary set)，記作 $\widetilde{S}$ 。

14. **空集合與子集合** 考慮一個不包含任何元素的集合，對我們處理問題時有許多方便，這樣的集合稱爲**空集合**（null set），記作 ϕ 。若兩集合 S_1 與 S_2 沒有共同的元素［此時，我們稱此二集合**不相交**（disjoint）或**互斥**（mutually exclusive）］，則可用 $S_1 \cap S_2 = \phi$ 來表示。

任一個由一集合 S 中選取一些，全部或都不選元素所形成的集合，稱爲 S 的**子集合**(subset)。若除去全部 S 的情形，則稱爲 S 的**真子集**(proper subset)。

15. **集合的可數性** 如果一集合中的元素可以與自然數 1，2，3，…作一對一對應，則稱此集合爲**可數**（countable 或 denumerable）；否則，則稱此集合爲**不可數**（non-countable）。

下面是有關點集合的兩個重要定理。

1. **瓦士曲士－波查諾定理**（Weierstrass-Bolzano theorem） 每一個有界無窮集合至少有一個極限點。

2. **哈納－鮑萊耳定理**（Heine-Borel theorem） 令 S 爲一緊緻集，其中每一點均包含於一個或更多個開集合 A_1，A_2，…中［則稱這些開集合**覆蓋**(cover) S］，則存在有很多個集合 A_1，A_2，…可覆蓋 S 。

習題與解答

複數的基本運算

1.1 計算下列各運算。

答 (a) $(3+2i)+(-7-i) = 3-7+2i-i = -4+i$

(b) $(-7-i)+(3+2i) = -7+3-i+2i = -4+i$

(a) 與 (b) 的結果說明了加法交換律。

(c) $(8-6i)-(2i-7) = 8-6i-2i+7 = 15-8i$

(d) $(5+3i)+\{(-1+2i)+(7-5i)\} = (5+3i)+\{-1+2i+7-5i\} = (5+3i)+(6-3i) = 11$

(e) $\{(5+3i)+(-1+2i)\}+(7-5i) = \{5+3i-1+2i\}+(7-5i) = (4+5i)+(7-5i) = 11$

(d) 與 (e) 的結果說明了加法結合律。

(f) $(2-3i)(4+2i) = 2(4+2i) - 3i(4+2i) = 8+4i-12i-6i^2 = 8+4i-12i+6 = 14-8i$
(g) $(4+2i)(2-3i) = 4(2-3i)+2i(2-3i) = 8-12i+4i-6i^2 = 8-12i+4i+6 = 14-8i$

(f) 與 (g) 的結果說明了**乘法交換律**。

(h) $(2-i)\{(-3+2i)(5-4i)\} = (2-i)\{-15+12i+10i-8i^2\}$
$= (2-i)(-7+22i) = -14+44i+7i-22i^2 = 8+51i$

(i) $\{(2-i)(-3+2i)\}(5-4i) = \{-6+4i+3i-2i^2\}(5-4i)$
$= (-4+7i)(5-4i) = -20+16i+35i-28i^2 = 8+51i$

(h) 與 (i) 的結果說明了**乘法結合律**。

(j) $(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\} = (-1+2i)(4-i) = -4+i+8i-2i^2 = -2+9i$

另解 $(-1+2i)\{(7-5i)+(-3+4i)\} = (-1+2i)(7-5i)+(-1+2i)(-3-4i)$
$= \{-7+5i+14i-10i^2\}+\{3-4i-6i+8i^2\}$
$= (3+19i)+(-5-10i) = -2+9i$

此題說明了**分配律**。

(k) $$\frac{3-2i}{-1+i} = \frac{3-2i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-3-3i+2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-5-i}{2} = -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

另解 由定義，$(3-2i)/(-1+i)$ 爲一數 $a+bi$，其中 a 與 b 均爲實數，且 a，b 滿足 $(-1+i)(a+bi)=-a-b+(a-b)i=3-2i$，因此 $-a-b=3$，$a-b=-2$，即 $a=-\frac{5}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$ 或 $a+bi=-\frac{5}{2}-\frac{i}{2}$。

(l) $$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i} = \frac{5+5i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}+\frac{20}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}$$
$$= \frac{15+20i+15i+20i^2}{9-16i^2}+\frac{80-60i}{16-9i^2} = \frac{-5+35i}{25}+\frac{80-60i}{25}$$
$$= 3-i$$

(m) $$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9 i}{2i-1} = \frac{3(-1)^{15}-(-1)^9 i}{-1+2i}$$
$$= \frac{-3+i}{-1+2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

1.2 若 $z_1=2+i$，$z_2=3-2i$ 且 $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求下列各題。

(a) $|3z_1-4z_2| = |3(2+i)-4(3-2i)| = |6+3i-12+8i|$
$= |-6+11i| = \sqrt{(-6)^2+(11)^2} = \sqrt{157}$

(b) $z_1^3-3z_1^2+4z_1-8 = (2+i)^3-3(2+i)^2+4(2+i)-8$
$= \{(2)^3+3(2)^2(i)+3(2)(i)^2+i^3\}-3(4+4i+i^2)+8+4i-8$
$= 8+12i-6-i-12-12i+3+8+4i-8 = -7+3i$

(c) $$(\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2$$