

高等学校教学参考书

数学分析的方法 及例题选讲

(修 订 版)

徐利治 王兴华

高等教育出版社

高等学校教学参考书
数学分析的方法
及例题选讲
(修订版)

徐利治 王兴华

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.125 字数 196,000

1955年12月第1版 1983年5月第2版 1984年2月第1次印刷

印数 00,001—50,000

书号 13010·0887 定价 1.30 元

前 言

经典数学分析中的思想方法和技巧是丰富多彩的。对每一个年青的数学工作者说来，及早掌握这些方法和技巧，将在一生的工作实践中受益无穷。正是从这个观点出发，本书前一编者早在1953—1954年就在东北人民大学（即吉林大学的前身）讲授了“分析方法”这门课程。1955年将讲稿整理出版，书名与本书同名。1958年该书曾由高等教育出版社重印一次。但两次印数总额只有7000余册，当即一销而空。二十多年来，该书早已不易找到了，只能偶而从一些数学著作的参考书目中发现该书的名字。

近些年来，曾不时收到各地读者来信建议再版该书。可是二十余年过去了，总感到原书的题材大有刷新一番的必要。只因苦于缺乏时间，致使修订工作拖延三年之久。去年，本书后一编者在杭州大学数学系为高年级学生开设了“分析方法及例题选讲”这门课，用上述原书作教材，并在讲课过程中不断进行删改和补充。于是在这个基础上我们便合作从事原书的修订工作，修订后的书稿又在杭大讲授了一次，然后略经修改，终于最后定稿。

在这个修订本中，已经加入不少新颖的题材，更换了一些旧的例题和习题。新增的内容中，也有一部分命题是属于编者们自己的研究成果（例如关于插值余项的命题及振荡型积分的渐近展开式等）。

在内容题材的铺设上，本书尽可能对相互关联的命题、例题及习题作出适当编排，以便使读者容易产生联想，从中领悟预示的途径去解决问题。就这个特点而言，它与鲍利亚与薛戈的名著《数学分析的问题与定理》多少有些类似。事实上本书还借用了该书中

的一些有趣题材。

鲍利亚曾说过：“一位好的数学教师或学生应努力保持解题的好胃口。”我们自己也有这样的经验：要想较熟练地掌握数学分析的方法和技巧，最好的办法莫过于经常动手去解题。因此在本书中，多半是示范性地给出典型命题与例题的极其简明扼要的证明或解法，类似的命题和习题则要求读者自己去解决。应该承认，本书中的个别题目确实是难度较大的，一时作不出来，既不用灰心，也不必去查阅任何现成的习题解答书籍。希望读者最好从一些相关联的题材中吸取经验和借鉴，能让自己去闯过难关，并从中享受乐趣！

这个修订本略去了原书的第五章（“各种类型的极限问题”），因为考虑到该章内容题材过份庞杂零乱，需要全面修改和增订，从而势必大大扩充篇幅。因此，我们期望将来通过出版《续编》的方式来完成上述任务。好在本书各章自成体系，且已足够表现出数学分析方法中的精采部分。当然原书的一些特色都在这里保留下来了。

我们要感谢吉林大学和杭州大学的数学系给我们提供了完成这个修订本的工作条件。还特别感谢审稿者路见可教授的细致审阅以及本书编辑的辛勤劳动。这个修订本仓促问世，错误与缺点谅必难免，希望读者不吝指教。

徐利治 王兴华
(吉林大学) (杭州大学)

1982年4月4日

目 录

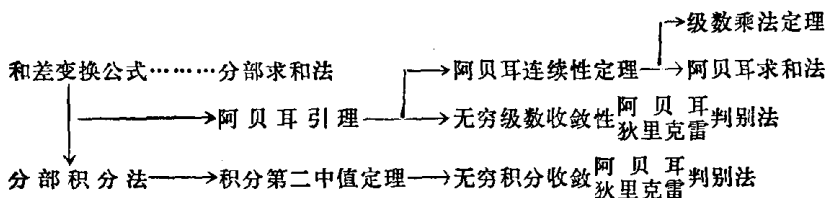
前言	1
第一章 关于阿贝耳方法	1
§ 1. 和差变换及其应用	1
§ 2. 阿贝耳引理应用于级数收敛性问题	7
§ 3. 阿贝耳的级数求和法	15
§ 4. 分部积分法与积分中值定理	20
第二章 幂级数在计算中的应用	41
§ 1. 线性不定方程解的个数问题	42
§ 2. 有关二项系数的计算	56
§ 3. 差分算子 Δ 的简单应用	72
§ 4. 欧拉-马克劳林求和公式	81
§ 5. 微分算子及函数方程在计算中的应用	99
第三章 不等式	116
§ 1. 若干简单的有穷不等式	117
§ 2. 平均值与有穷不等式	130
§ 3. 积分不等式、无穷不等式及函数的凸性	141
§ 4. 关于不等式的补充命题及杂题	152
§ 5. 关于常用函数的若干不等式	168
第四章 阶的计算法及有关问题	182
§ 1. 阶的估计法应用于收敛性问题	184
§ 2. 若干渐近估计及切比晓夫质数定理的证法	200
§ 3. 有关无穷大强度的问题	211
§ 4. 若干渐近展开公式及其应用	216
§ 5. 插值余项阶的估计	231
中外人名译法对照	251
主要参考书	254

第一章 关于阿贝耳方法

阿贝耳(N. H. Abel, 1802—1829)的方法是一套比较古典的数学分析技巧. 它在数学分析的某些部分, 特别是在级数的收敛性理论及有关和式(或积分式)的阶的计算中常常用到.

在分析学中, 因为理论系统性的关系, 常常把这个方法分散到几处来讲. 在这里, 由于我们无须受系统性要求的限制, 并希望能将这套方法在应用上的特点表现得更显著一些, 因此就在这一章中, 采用命题、例题和习题的形式, 加以比较集中的考虑.

阿贝耳方法是从一个十分浅显的恒等式开始的. 这个恒等式可以叫做和差变换公式, 又可以叫做分部求和公式, 它相当于积分学中的分部积分法. 从这个简单的恒等式可以直接导出阿贝耳引理, 从而又可导出一系列很有价值的命题. 简单地说, 这就是下表所示的模式:



现在我们就把有关阿贝耳方法的若干命题, 例题和习题分布在下列各节中.

§1. 和差变换及其应用

1. (和差变换公式) 设 $m < n$. 则

$$\sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

[证] 将等式左端的和拆开, 然后对 A_k 进行同类项合并即得.

2. (分部求和法) 设 $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$). 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}).$$

[证] 这是于命题 1 取 $A_0 = 0, A_k = s_k (k \geq 1)$ 的结果.

3. 设 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \rightarrow s (n \rightarrow \infty)$. 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = s b_1 + (s_n - s) b_n - \sum_{k=1}^{n-1} (s_n - s) (b_{k+1} - b_k).$$

[证] 这是于命题 1 取 $A_0 = -s, A_k = s_k - s (k \geq 1)$ 的结果.

4. (阿贝耳引理) 若对一切 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 而言,

$$\begin{aligned} b_1 &\geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0, \\ m &\leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq M. \end{aligned}$$

则有

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

[证] 应用命题 2, 由于 $m \leq s_k \leq M, b_k - b_{k+1} \geq 0$, 我们得到

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq M b_n + \sum_{k=1}^{n-1} M (b_k - b_{k+1}) = M b_1,$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq m b_n + \sum_{k=1}^{n-1} m (b_k - b_{k+1}) = m b_1.$$

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为任意实数或复数, 又设

$$A = \max(|a_1|, |a_1 + a_2|, \cdots, |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|).$$

则

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq A \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} |b_{k+1} - b_k| + |b_n| \right\}.$$

6. 设 $\varphi(n) > 0, \varphi(n) \uparrow \infty (n \rightarrow \infty)$. 又设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 则

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi(k) = o(\varphi(n)) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (\text{Kronecker})$$

[证] 本题可用和差变换(命题3)来证. 设 $s = \Sigma a_n$, 并设 $1 < m < n$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \varphi(k) &= s\varphi(1) + (s_n - s)\varphi(n) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k)) \\ &= O(1) + o(\varphi(n)) - \sum_{k=1}^{m-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k)) \\ &\quad - \sum_{k=m}^{n-1} (s_k - s)(\varphi(k+1) - \varphi(k)). \end{aligned}$$

从而对任意固定的 m 而言, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi(k) \right| &\leq O(1) + o(\varphi(n)) - O(1) \\ &\quad + \varepsilon_m \sum_{k=m}^{n-1} (\varphi(k+1) - \varphi(k)), \end{aligned}$$

此处 $\varepsilon_m = \max_{k \geq m} |s_k - s|$. 注意 $\varphi(n) \uparrow \infty$, 且 $\varepsilon_m \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$, 因此

对于任意预先给定的正数 ε , 总可以取 m 充分大, 使得

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi(k) \right| \leq o(\varphi(n)) + \varepsilon_m \varphi(n) \leq o(\varphi(n)) + \varepsilon \varphi(n).$$

由于上式左端与 ε 并无关系, 自然可令 $\varepsilon \rightarrow 0$. 故命题得证.

7. 设 $\varphi(n) \downarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(n)$ 为收敛. 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \varphi(n) = 0.$$

[证] 显然在本命题中, 只要将 $a_n \varphi(n)$ 看作是命题6中的 a_n , 而把 $\varphi(n)^{-1}$ 看作是命题6中的 $\varphi(n)$, 就立刻得到

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k \varphi(k)) \varphi(k)^{-1} = o(\varphi(n)^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

[另证] 本命题亦可利用阿贝耳引理直接证明. 任意给定 $\varepsilon > 0$. 由收敛性假设, 可选取自然数 N , 使当 $n > N$ 时有

$$\frac{\varepsilon}{2} > a_N \varphi(N) + a_{N+1} \varphi(N+1) + \cdots + a_n \varphi(n) > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

又显然

$$0 < \varphi(N)^{-1} \leq \varphi(N+1)^{-1} \leq \cdots \leq \varphi(n)^{-1}.$$

故按命题 4 (视 $\varphi(n)^{-1}, \dots, \varphi(N)^{-1}$ 为 $b_1, \dots, b_n$), 便得到

$$\frac{\varepsilon}{2} \varphi(n)^{-1} > a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n > -\frac{\varepsilon}{2} \varphi(n)^{-1}.$$

亦即

$$|(a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n) \varphi(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而由于 $\varphi(n) \rightarrow 0$, 故又可取自然数 N' , 使 $n > N'$ 时

$$|(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}) \varphi(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n > \max(N, N')$ 时

$$|(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \varphi(n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

命题证毕.

很明显, 命题 6 与命题 7 是可以相互推导的.

8. 设 $\sigma > 0$. 则当下列的狄利克雷 (G. L. Dirichlet, 1805—1859) 级数

$$a_1 \cdot 1^{-\sigma} + a_2 \cdot 2^{-\sigma} + a_3 \cdot 3^{-\sigma} + \cdots + a_n \cdot n^{-\sigma} + \cdots$$

收敛时, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) n^{-\sigma} = 0$.

9. 设 $\{z_n\}_1^\infty$ 为任意一个复数列而 $\sum_{n=1}^\infty |z_{n+1}^{-1} - z_n^{-1}| = \infty$. 又设

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ 为收敛. 则必有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n \right) \left(\sum_{n=1}^N |z_{n+1}^{-1} - z_n^{-1}| \right)^{-1} = 0.$$

[提示] 应用命题 5 并仿照命题 7 的后一证法即可证得本命题.

10. 设当 $k=1, 2, 3, \dots$ 时 $b_k \geq b_{k+1}$, $\frac{1}{2}(b_k + b_{k+2}) \geq b_{k+1}$ 并且

$$m \leq s_1 + s_2 + \dots + s_k \leq M.$$

其中 $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. 则有下列不等式成立:

$$m(b_1 - b_2) + s_n b_n < \sum_{k=1}^n a_k b_k < M(b_1 - b_2) + s_n b_n.$$

[提示] 对于 $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ 应用分部求和法并利用题设不等式即可.

11. 设 N 为一固定的大整数, $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$ 为任意两组常数. 今定义 $b_k = 0 (k > N)$ 以及

$$\Delta^m b_k = \Delta^{m-1} b_{k+1} - \Delta^{m-1} b_k, \Delta b_k = b_{k+1} - b_k,$$

$$s_k^{(m)} = \sum_{v=1}^k s_v^{(m-1)}, \quad s_k^{(1)} = s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

则有下列恒等式成立:

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k = (-1)^m \sum_{k=1}^N s_k^{(m)} \Delta^m b_k.$$

[提示] 相继应用 m 次分部求和法即可.

12. 设 $a_k > 0, b_k > 0$, 而 $\{v_k\}$ 为单调下降的正数列. 又设

$$H = \max\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \dots, \frac{B_n}{A_n}\right), \quad h = \min\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \dots, \frac{B_n}{A_n}\right),$$

$$H_m = \max\left(\frac{B_m}{A_m}, \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}}, \dots, \frac{B_n}{A_n}\right),$$

$$h_m = \min\left(\frac{B_m}{A_m}, \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}}, \dots, \frac{B_n}{A_n}\right),$$

此处 $A_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k$, $B_k = b_0 + b_1 + \dots + b_k$. 则有下列不等式成立:

$$\begin{aligned} h_m + (h - h_m) \frac{\sum_{k=0}^m a_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} &\leq \frac{\sum_{k=0}^n b_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} \\ &\leq H_m + (H - H_m) \frac{\sum_{k=0}^m a_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k}. \end{aligned}$$

[证] 本命题可看作阿贝耳引理的扩充. 其证明的办法亦大致相似. 首先我们注意到 $B_k \leq H A_k$ ($k=0, 1, \dots, n$), $B_r \leq H_m A_r$ ($r=m, m+1, \dots, n$). 因此

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=0}^n b_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k (v_k - v_{k+1}) + B_n v_n}{\sum_{k=0}^{n-1} A_k (v_k - v_{k+1}) + A_n v_n} \\ &\leq \frac{\sum_{k=0}^{m-1} H A_k (v_k - v_{k+1}) + \sum_{k=m}^{n-1} H_m A_k (v_k - v_{k+1}) + H_m A_n v_n}{\sum_{k=0}^{n-1} A_k (v_k - v_{k+1}) + A_n v_n} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^n b_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} - H_m \leq (H - H_m) \frac{\sum_{k=0}^{m-1} A_k (v_k - v_{k+1})}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} \end{aligned}$$

$$\leq (H - H_m) \frac{\sum_{k=0}^n a_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k}.$$

故命题中不等式的右段已告证明。其左段的证法与此相似。

13. 保留命题 12 的全部假设, 但将 $\{v_n\}$ 改设为单调上升的数列。则有

$$\begin{aligned} H_m - \frac{(H_m - h_m) A_n v_n + (H - H_m) A_m v_m}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} &\leq \frac{\sum_{k=0}^n b_k v_k}{\sum_{k=0}^n a_k v_k} \\ &\leq h_m + \frac{(H_m - h_m) A_n v_n + (h_m - h) A_m v_m}{\sum_{k=0}^n a_k v_k}. \end{aligned}$$

§ 2. 阿贝耳引理应用于级数收敛性问题

14. (阿贝耳定理) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$.

[证] 容易看出 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上为一致收敛。事

实上, 对任给正数 ε , 有 N 使当 $n > N$ 时 $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$. 从而由阿

贝耳引理(命题 4)可知同时有 $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k x^k \right| < x^n \varepsilon \leq \varepsilon$, 只要 $0 \leq x \leq 1$.

因此由函数项级数的连续性定理即得

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = s.$$

15. (级数乘法定理) 令 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. 又设级数 $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ 都收敛。则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right). \quad (\text{Abel})$$

[证] 因为绝对收敛的级数可以相乘, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = s_1(x) s_2(x) \quad (0 \leq x < 1).$$

于是由阿贝耳定理(命题 14)便立刻得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{x \rightarrow 1-} s_1(x) s_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} s_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1-} s_2(x) \\ &= s_1(1) s_2(1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right). \end{aligned}$$

16. 试证

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \right)^2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &\quad - \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \cdots. \end{aligned}$$

[证] 于阿贝耳关于级数乘法的定理(命题 15)中, 取 $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), $a_0 = b_0 = 0$, 则有

$$c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 = (-1)^n w_n,$$

此处

$$w_n = \frac{1}{1 \cdot (n-1)} + \frac{1}{2 \cdot (n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot 1} \quad (n \geq 2).$$

显然

$$\begin{aligned} n w_n &= \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} + 1 \right) \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) = 2 \ln n + 2\gamma + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

式中 γ 为欧拉 (L. Euler, 1707-1783) 常数 (参见第四章题 25).

由是 $w_n \rightarrow 0$. 又因为 $(n+1)w_{n+1} - n w_n = \frac{2}{n}$, $n(w_n - w_{n+1}) =$

$w_{n+1} - [(n+1)w_{n+1} - nw_n] = w_{n+1} - \frac{2}{n} > 0$, 故知 $w_n \downarrow 0$. 从而

由莱布尼兹 (G. W. Leibniz, 1646—1716) 收敛判别法可见级数

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n w_n$ 为收敛. 所以最后应用命题 15 即获证明.

17. 试证级数

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

的自乘级数为发散.

18. 设 $u_n \downarrow 0, v_n \downarrow 0$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 与

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n$ 的乘积级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} w_n$ 为收敛的充要条件是:

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1 \rightarrow 0. \quad (\text{Pringsheim})$$

[证] 条件的必要性是显然的. 今证充分性. 写

$$A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} v_k,$$

$$C_n = \sum_{n=1}^n (-1)^{k-1} w_n,$$

并以 A, B 分别表 $\sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} u_k, \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} v_k$ 之和. 则

$$\begin{aligned} C_n &= w_1 - w_2 + w_3 - \dots + (-1)^{n-1} w_n \\ &= u_1 v_1 - u_1 v_2 + u_1 v_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_1 v_n \\ &\quad - u_2 v_1 + u_2 v_2 - \dots + (-1)^{n-1} u_2 v_{n-1} \\ &\quad + u_3 v_1 - \dots + (-1)^{n-1} u_3 v_{n-2} \\ &\quad - \dots \dots \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} u_n v_1 \\ &= u_1 B_n - u_2 B_{n-1} + u_3 B_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} u_n B_1. \end{aligned}$$

从而

$$A_n B - C_n = u_1(B - B_n) - u_2(B - B_{n-1}) + u_3(B - B_{n-2}) - \cdots \\ + (-1)^{n-1} u_n(B - B_1).$$

据题设

$$|B - B_n| \leq v_{n+1}, |B - B_{n-1}| \leq v_n, \dots, |B - B_1| \leq v_2,$$

由是

$$|A_n B - C_n| \leq u_1 v_{n+1} + u_2 v_n + \cdots + u_n v_2 \\ = w_{n+1} - u_{n+1} v_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B = AB.$$

19. 设 $u_n \downarrow 0, v_n \downarrow 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} v_n$ 的乘

积级数收敛的充要条件是 $U_n v_n \rightarrow 0$ 并且 $V_n u_n \rightarrow 0$, 这里

$$U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n. \quad (\text{Pringsheim})$$

[证] 设 $U_n v_n \rightarrow 0, V_n u_n \rightarrow 0$. 则由 u_n 和 v_n 的单调性, 有

$$w_{2n} = u_1 v_{2n} + u_2 v_{2n-1} + \cdots + u_n v_{n+1} + u_{n+1} v_n + \cdots + u_{2n} v_1 \\ \leq (u_1 + \cdots + u_n) v_n + (v_1 + \cdots + v_n) u_n = U_n v_n + V_n u_n, \\ w_{2n+1} \leq U_n v_n + V_n u_n + u_{n+1} v_{n+1}.$$

所以 $w_n \rightarrow 0$.

反之, 设 $w_n \rightarrow 0$, 则由

$$U_n v_n = (u_1 + \cdots + u_n) v_n \leq u_1 v_n + \cdots + u_n v_1 = w_n, \\ V_n u_n \leq w_n.$$

可知 $U_n v_n \rightarrow 0, V_n u_n \rightarrow 0$. 证毕.

20. 试讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}$ 的乘积级数的收敛

性, 这里 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$.

21. 设 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 二收敛级数中至少有一个绝对收敛, 又设

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. 则 $\sum c_n$ 必收敛, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \quad (\text{Mertens})$$

[证] 不妨设 $\sum a_n$ 为绝对收敛, 且设

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \rightarrow A, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k \rightarrow B, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = A', \quad |B_n| \leq B'.$$

则如同命题 18 之证明, 可得

$$A_n B - C_n = a_0(B - B_n) + a_1(B - B_{n-1}) + \cdots + a_n(B - B_0).$$

从而

$$|A_n B - C_n| \leq \sum_{\nu=0}^{[\frac{n}{2}]-1} |a_{\nu}| |B - B_{n-\nu}| + \sum_{\nu=[\frac{n}{2}] }^n |a_{\nu}| |B - B_{n-\nu}|$$

$$\leq A' \max_{[\frac{n}{2}] \leq k \leq n} |B - B_k| + 2B' \sum_{\nu=[\frac{n}{2}]}^n |a_{\nu}|.$$

可见 $A_n B - C_n \rightarrow 0$, 即 $C_n \rightarrow AB$ ($n \rightarrow \infty$).

22. (阿贝耳判别法) 设级数 $\sum a_n$ 为收敛而 $\sum(b_n - b_{n+1})$ 为绝对收敛(其中 a_n, b_n 可以是复数), 则 $\sum a_n b_n$ 必收敛.

[证] 设 $\sum |b_n - b_{n+1}| = B$. 则 $|b_n| = |b_1 - \sum_1^{n-1} (b_k - b_{k+1})| \leq |b_1| + B$. 于是由命题 5 的阿贝耳引理, 得

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k b_k \right| \leq \left\{ \max_{1 \leq p \leq n} \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \right| \right\} \cdot$$

$$\left\{ \sum_{k=m+1}^{m+n-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_{m+n}| \right\}$$

$$\leq (2B + |b_1|) \max_{1 \leq p \leq n} \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \right|.$$

由是可见 $\sum a_n b_n$ 必收敛.

23. (狄利克雷判别法) 设 $\sum_{k=1}^n a_k$ 为有界而 $\sum (b_n - b_{n+1})$ 为绝对收敛且 $b_n \rightarrow 0$ (其中 a_n, b_n 可以是复数). 则 $\sum a_n b_n$ 必收敛.

[证] 在阿贝耳判别法的证明中, 不等式

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k b_k \right| \leq \left\{ \max_{1 \leq p \leq n} \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \right| \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=m+1}^{m+n-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_{m+n}| \right\}$$

右端的两个因子, 前一个因子是 $o(1)$, 后一个因子是 $O(1)$. 而今则前一个因子是 $O(1)$, 后一个因子是 $o(1)$.

24. 设 $\{b_n\}_1^\infty$ 为一有界单调实数列而级数 $\sum a_n$ 为收敛. 则级数 $\sum a_n b_n$ 必收敛. (Abel)

25. 设 $b_n \downarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 而 $\sum_1^n a_k$ 为有界. 则级数 $\sum a_n b_n$ 必收敛. (Dirichlet)

[提示] 命题 24 及 25 显然分别为命题 22 及 23 的特例.

26. 令 $t = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$. 则当 $0 < \theta < 2\pi$ 且 $a_n \downarrow 0$ 时级数 $\sum a_n t^n$ 为收敛, 同时 $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k t^k \right| \leq \frac{2a_n}{1-t}$.

[提示] 当 $|t| \leq 1$ 且 $t \neq 1$ 时

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} t^k \right| = \left| \frac{t^{n+1}(1-t^p)}{1-t} \right| \leq \frac{2}{|1-t|}.$$

于是利用命题 23 或 25 即得.

27. 设 $a_n \downarrow 0$. 则当 $0 < \theta < 2\pi$ 时级数 $\sum a_n \cos n\theta$ 及 $\sum a_n \sin n\theta$ 为收敛, 且有