动态规划与馬尔柯夫过程

〔美〕R. A. 霍华特 著

李为政 徐映波 赖炎連 譯

桂湘云 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书建立了一类决策系統的分析結构，以馬尔柯夫过程作为系統模型而以动态規划的迭代方法作为最优化手段，提供了实际計算的可能性。全书共9章。第一章討論时間离散的馬尔柯夫过程，第二章具有經济报酬的馬尔柯夫过程，第三章序貫决策过程，介紹了值迭代法，第四章討論策略迭代法，并在第五章中介紹了三个具体例子，第六章討論多鏈的策略迭代法，第七章推广到将来报酬有折扣的情形，第八章討論时間連續的过程，最后一章結論，提出了一些簡单的注釋。

本书可供高等学校高年級学生及运籌学工作者，工程师作参考。

DYNAMIC PROGRAMMING AND
MARKOV PROCESSES
Ronald A. Howard
The Technology Press of M. I. T.
&
John Wiley & Sons, Inc., 1960

动态規划与馬尔柯夫过程

李为政 徐映波 賴炎連 譯 桂湘云 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本850×1168 1/32 印張4 22/32 排版字数114,000
1963年11月第1版 1963年11月第1次印刷 印数1—3,000

統一书号 13119·523 定价(十四) 0.80元

引　言

系統工程师和运筹学工作者經常要对一些运行系統进行模型設計。这些系統通常同时包含着概率的和决策的两种性质，因此，我們可以預料，所得到的模型是十分复杂，在分析上是难于处理的。对于已經提出来的大多数的模型，情况的确是这样。R. 貝尔曼[1]提出的动态規划的想法給复杂系統的分析提供了希望，然而，由于在实际上往往有許多問題虽然可以用这个技巧来闡述，但是不能求解，因此，这种希望也就减少了。看来是很合理的一些方法往往在后来会碰到計算上不容易克服的困难。

本书的意图是对一类决策系統給出一个分析結构，一般說来，这种結构是足以描述系統而同时又有計算可能的。我們以作为系統模型的馬尔柯夫过程为基础，并且采用类似于动态規划的迭代技巧为其最优化方法。

我們从第一章的时間离散的馬尔柯夫过程的討論开始，后面几章将模型逐步推广。这些推广包括第二章的附加經济报酬的情形和第三章中引进的决策过程。

第四章討論的是求解概率結构簡单的决策过程的策略迭代法，随后的第五章提供了若干例子。第六章引进了概率結构复杂一些的情形，第七章把模型推广到将来的报酬有折扣的情形。第八章把前面各章从时間离散的情形推广到时間連續的情形。最后，第九章是一些結論性的注釋。

不幸，本书的性质不容許我們在此給出策略最优化方案的綫性規划的論述，这个非常有趣的观点在以后有机会时再提出来。但无論如何，熟悉綫性規划的讀者将可以看到我們所处理的那些綫性形式的熟悉的結构。

目　录

引言
第一章　馬尔柯夫过程 ……………………………………………… 1
玩具制造商例子——状态概率……………………………………… 2
z-变换……………………………………………………………… 6
馬尔柯夫过程的 z-变换分析 …………………………………… 8
瞬时的、多鏈的和周期的性质……………………………………11
第二章　有报酬的馬尔柯夫过程 …………………………………18
用递推关系求解………………………………………………………18
玩具制造商的例子……………………………………………………19
有报酬的馬尔柯夫过程的 z-变换分析 …………………………22
漸近性质………………………………………………………………24
第三章　用值迭代法求序貫决策过程的解 ………………………28
不同方式的引进………………………………………………………28
用值迭代法求解玩具制造商問題……………………………………30
値迭代法的估价………………………………………………………32
第四章　用策略迭代法求解序貫决策过程 ………………………34
定值运算………………………………………………………………36
策略改进程序…………………………………………………………39
迭代循环………………………………………………………………40
玩具制造商問題………………………………………………………42
策略迭代法的性质的証明……………………………………………44
第五章　策略迭代法的某些应用 …………………………………47
出租汽車問題…………………………………………………………47
棒球問題………………………………………………………………54
汽車替换問題…………………………………………………………59
第六章　多鏈过程的策略迭代法 …………………………………67
定值运算………………………………………………………………68

策略改进程序……70
一个多鏈的例子……72
迭代循环的性质……76
第七章 具有折扣的序貫决策过程……84
用値迭代法解有折扣的序貫决策过程……88
定値运算……90
策略改进程序……92
例子……94
迭代循环性质的証明……95
最优策略对于折扣因子的敏感性……97
具有折扣的汽車替換問題……99
总結……100
第八章 时間連續的决策过程……101
时間連續的馬尔柯夫过程……101
用拉普拉斯变换求解时間連續的馬尔柯夫过程……103
有报酬的时間連續的馬尔柯夫过程……109
时間連續的决策問題……115
定値运算……117
策略改进程序……118
完全各态历經的过程……120
工长的抉擇問題……122
計算方面的比較……123
有折扣的时間連續的决策过程……125
策略改进……127
一个例子……130
与时間离散情形的比較……132
第九章 結 論……134
附录 瞬时和循环性态的关系……136
参考文献……141
譯者补充文献……142
索 引……143

第一章

馬尔柯夫过程

馬尔柯夫过程是一个数学模型，它对复杂系統的研究是很有用的。馬尔柯夫过程的基本概念是系統的“状态”和状态的“轉移”。当系統完全由定义状态的变量所取的值来描繪的时候，我們說系統处于一个状态。如果系統的描繪变量从一个状态的特定值变化到另一个状态的特定值，这时，我們就說系統实現状态的轉移。

在荷花池里的一只青蛙是馬尔柯夫过程的形象化的例子。随着时間的变化，青蛙依照它瞬間忽起的念头，从一片荷叶跳到另外一片荷叶。系統的状态現在是青蛙所处的荷叶的数目；状态的轉移此时就是它的跳动。如果荷叶的数目是有限的，那么，它就是一个有限状态的过程。我們以后所有的考虑都将限于这种过程。

如果我們集中注意于系統的状态轉移，并且只是考虑发生轉移的时刻，那么，我們把系統当作时間离散的过程来考虑，也許是有利的。如果二次轉移之間的时間是一个随机变数，那么我們可以将它考虑成一个时間連續的过程。后面这种情形，将在第八章里討論。

要研究时間离散的过程，我們必須詳細說明状态轉移的概率性质。为方便起見，假定二次轉移間隔的时間是一个常数，并設系統有 N 个状态，标以 1 至 N. 如果系統是一个簡单的馬尔柯夫过程，那么，系統現在处于状态 i 而在下一个时間区間轉移到状态 j 的概率，仅仅是 i 和 j 的函数而与系統到达状态 i 之前的任何历

史无关。换句話說，我們可以列出一組 p_{ij}，它是系統現在处在状态 i 而在下一次轉移到达状态 j 的条件概率。因为系統在下一次轉移后必須到达某一个状态，所以

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1,$$

其中，系統停留在状态 i 的概率 p_{ii} 也包含在內。因为 p_{ij} 是概率，故有

$$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1.$$

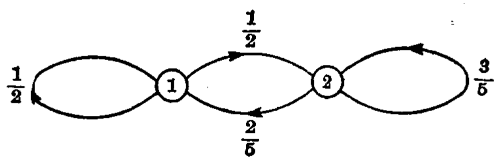
玩具制造商例子——状态概率①

我們可以将一个玩具制造商的經营过程作为前面定义的这类时間离散的馬尔柯夫过程的一个非常簡单的例子。玩具制造商从事新玩具的营业。他可以处在二种不同的状态之一。如果他現在生产的玩具在市場上的銷路很好，則他处于状态 1，否則他就处于状态 2. 我們假定当他处在状态 1 时，在下一个星期末仍然处在状态 1 的可能性是百分之 50. 因此，他不幸地轉移到状态 2 的可能性也是百分之 50. 当他处在状态 2 时，他便試制新玩具并在一个星期以后他可以回到状态 1 的概率是 $\frac{2}{5}$，而仍然留在不利的状态 2 的概率是 $\frac{3}{5}$. 因此，$p_{11}=\frac{1}{2}$，$p_{12}=\frac{1}{2}$，$p_{21}=\frac{2}{5}$，$p_{22}=\frac{3}{5}$. 写成矩陣形式，我們有

$$\boldsymbol{P}=[p_{ij}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

相应于系統的状态和轉移概率的直观图形是：

① 本书內容以資本主义經济为背景，所以有些例子、观点，对我国社会主义經济并不适合。后面也有类似情况，請讀者注意。——譯者注



因此，轉移矩陣 $\boldsymbol{P}$ 完全描繪了馬尔柯夫过程。这个矩陣的各行之和均为 1，并且它是由不大于 1 的非負元素所組成；这样的矩陣称为随机矩陣。我們利用这个矩陣来回答关于过程的所有問題。例如，如果已知玩具制造商在 n 个星期的开始处于状态 1，我們希望知道，他在 n 个星期以后处于状态 1 的概率是多少。为了回答这个以及其他的問題，我們定义状态概率 $\pi_i(n)$，它表示当系統在 $n=0$ 时的状态为已知时，在 n 次轉移之后处在状态 i 的概率。因此，有

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i(n)=1, \tag{1.1}$$

$$\pi_j(n+1)=\sum_{i=1}^{N}\pi_i(n)p_{ij} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{1.2}$$

如果我們定义一个状态概率的行向量 $\boldsymbol{\pi}(n)$，其元素为 $\pi_i(n)$，那么，

$$\boldsymbol{\pi}(n+1)=\boldsymbol{\pi}(n)\boldsymbol{P} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{1.3}$$

由递推得

$$\boldsymbol{\pi}(1)=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P},$$
$$\boldsymbol{\pi}(2)=\boldsymbol{\pi}(1)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}^2,$$
$$\boldsymbol{\pi}(3)=\boldsymbol{\pi}(2)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}^3,\ \cdots,$$

一般地，
$$\boldsymbol{\pi}(n)=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}^n \quad (n=0,1,2,\ \cdots). \tag{1.4}$$

因此，初始状态概率向量 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 右乘以轉移概率矩陣的 n 次冪，可以求出 n 次轉移后系統处在它的每一个状态的概率 $\boldsymbol{\pi}(n)$.

今以玩具制造商的經营过程来說明这些关系式。如果玩具制造商在开始的时候具有成功的玩具，那么，$\pi_1(0)=1$，$\pi_2(0)=0$，

即 $\pi(0)=[1\ 0]$. 因而，由方程(1.3)，

$$\pi(1)=\pi(0)P=[1\quad 0]\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix},$$

即
$$\pi(1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

在一个星期以后，玩具制造商的成功与不成功的可能性恰好相同。二个星期以后，

$$\pi(2)=\pi(1)P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix},$$

即
$$\pi(2)=\begin{bmatrix}\frac{9}{20} & \frac{11}{20}\end{bmatrix},$$

即玩具制造商不成功的机会稍多一些。三个星期以后，

$$\pi(3)=\pi(2)P=\begin{bmatrix}\frac{89}{200} & \frac{111}{200}\end{bmatrix},$$

并且处在每一个状态的概率比二个星期后的数值有少許改变。我們注意，因为

$$P^3=\begin{bmatrix}\frac{89}{200} & \frac{111}{200}\\ \frac{111}{250} & \frac{139}{250}\end{bmatrix},$$

$\pi(3)$ 可以直接从 $\pi(3)=\pi(0)P^3$ 得到。

如果将 $\pi_i(n)$ 作为 n 的函数如表1.1那样計算出来，我們就可以看到一个有趣的趋势。

表1.1 玩具制造商开始时有成功玩具的逐次状态概率

$n=$	0	1	2	3	4	5	…
$\pi_1(n)$	1	0.5	0.45	0.445	0.4445	0.44445	…
$\pi_2(n)$	0	0.5	0.55	0.555	0.5555	0.55555	…

随着 n 的增大，看起来似乎 $\pi_1(n)$ 趋向 $\frac{4}{9}$，$\pi_2(n)$ 趋向 $\frac{5}{9}$. 如果玩具制造商开始时有不成功的玩具，即 $\pi_1(0)=0$, $\pi_2(0)=1$，那么 $\pi_i(n)$ 的表变为表 1.2。

表 1.2　玩具制造商开始时有不成功玩具的逐次状态概率

$n=$	0	1	2	3	4	5	…
$\pi_1(n)$	0	0.4	0.44	0.444	0.4444	0.44444	…
$\pi_2(n)$	1	0.6	0.56	0.556	0.5556	0.55556	…

对于这种情形，随 n 的增大，$\pi_1(n)$ 似乎仍然趋于 $\frac{4}{9}$，$\pi_2(n)$ 趋于 $\frac{5}{9}$. 因而，状态概率当状态轉移次数很大的时候看起来与系統的初始状态无关。許多的馬尔柯夫过程具有这样的性质。任何馬尔柯夫过程，它的极限状态概率分布是与初始条件无关的，我們称之为完全各态历經的过程。对于轉移次数很大时，状态概率依賴于系統的初始状态的馬尔柯夫过程，我們将在以后討論。

对于完全各态历經的馬尔柯夫过程，我們可以定义量 π_i 为轉移很大次数以后系統处于第 i 个状态的概率。分量为 π_i 的行向量 $\boldsymbol{\pi}$ 因而是当 n 趋向于无穷时 $\boldsymbol{\pi}(n)$ 的极限，称之为极限状态概率向量或絕对状态概率向量①。从方程(1.3)得出，$\boldsymbol{\pi}$ 必須满足方程

$$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}, \tag{1.5}$$

并且 $\boldsymbol{\pi}$ 的分量的和必須是 1，

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i=1. \tag{1.6}$$

我們可以从(1.5)和(1.6)求出任何过程的极限状态概率。对于玩具制造商例子，方程(1.5)是

$$\pi_1=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{2}{5}\pi_2,$$

① $\boldsymbol{\pi}(n)$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 是行向量，其他的向量是列向量。

$$\pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{3}{5}\pi_2,$$

而方程(1.6)变为

$$\pi_1+\pi_2=1.$$

这三个方程对于二个未知量 π_1 与 π_2 有唯一解 $\pi_1=\frac{4}{9}$，$\pi_2=\frac{5}{9}$. 当然，这些值与我們从 $\pi_i(n)$ 的表中所推出来的极限状态概率相同。在許多应用中，往往极限状态概率对我們是唯一有兴趣的量。例如，可能只要知道我們的玩具制造商有 $\frac{4}{9}$ 的时間幸运地有成功的玩具，而 $\frac{5}{9}$ 是不幸的时間就足够了。求解极限状态概率也就是解 N 个方程的綫性联立方程組。但是，我們必須記住，仅仅是对于在多次轉移以后可以不考虑初始位置的情形，量 π_i 才能充分地描写这个过程。在下一节，当状态概率趋向于极限值的时候，我們可以更加看清楚这种过程的瞬时性质。

z-变 换

为了研究瞬时性质和理論上的方便，从母函数或我們将称之为 z-变换的观点来研究馬尔柯夫过程是有好处的。我們考虑一个时間函数 $f(n)$，它在非負的、离散的、整数間隔的时間点上取任意值 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，…，而在負的时間，取值为 0. 在图 1.1 中画出了一个这样的时間函数。对于在数值上随 n 变化而不比几何序列增加得更快的时間函数，可以定义一个 z-变换 $f(z)$，使得

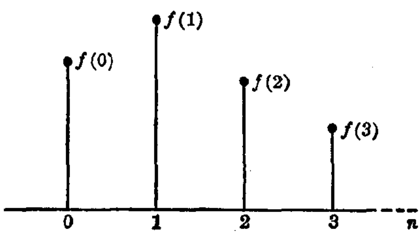


图 1.1　一个任意的时間离散的函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^n. \tag{1.7}$$

$f(n)$与其变换 $\mathscr{f}(z)$之間的关系是唯一的；每一个时間函数仅有一个变换，并且变换的逆变换又产生原来的时間函数。z-变换对于馬尔柯夫过程是有用的，因为馬尔柯夫过程的瞬时概率是几何序列。对于这样的序列，z-变换提供了一个"封閉"的表示式。

让我們来求出那些即将碰到的典型的时間函数的z-变换。首先，我們考虑阶梯函数。

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\\ 0 & n<0,\end{cases}$$

它的z-变换是

$$\mathscr{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^n=1+z+z^2+z^3+\cdots \quad 或 \quad \mathscr{f}(z)=\frac{1}{1-z}.$$

对于几何序列$f(n)=\alpha^n$, $n\geqslant 0$,

$$\mathscr{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z)^n \quad 或 \quad \mathscr{f}(z)=\frac{1}{1-\alpha z}.$$

注意，如果
$$\mathscr{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^n,$$

则
$$\frac{d\mathscr{f}(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n z^{n-1},$$

且
$$\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n z^n=z\frac{d}{dz}\mathscr{f}(z)=z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\alpha z}\right)=\frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}.$$

因此，我們推得，如果时間函数是$f(n)=n\alpha^n$，则其z-变换是

$$\mathscr{f}(z)=\frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}.$$

从这些和其他容易推得的結果，我們可以造出z-变换的表1.3. 特别，如果变换为$\mathscr{f}(z)$的时間函数$f(n)$向右推移一个单位而变为$f(n+1)$，那么推移后的函数的变换是

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n+1)z^n=\sum_{m=1}^{\infty}f(m)z^{m-1}=z^{-1}[\mathscr{f}(z)-f(0)].$$

因为在一些例子与証明中，它們将被广泛利用，讀者应熟悉表1.3中的結果。

表 1.3 z-变换对照表

$n \geqslant 0$ 的时間函数	z-变换
$f(n)$	$\mathcal{f}(z)$
$f_1(n)+f_2(n)$	$\mathcal{f}_1(z)+\mathcal{f}_2(z)$
$kf(n)$ (k 为一常数)	$k\mathcal{f}(z)$
$f(n-1)$	$z\mathcal{f}(z)$
$f(n+1)$	$z^{-1}[\mathcal{f}(z)-f(0)]$
α^n	$\dfrac{1}{1-\alpha z}$
1 (单位阶梯)	$\dfrac{1}{1-z}$
$n\alpha^n$	$\dfrac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}$
n (单位梯步)	$\dfrac{z}{(1-z)^2}$
$\alpha^n f(n)$	$\mathcal{f}(\alpha z)$

馬尔柯夫过程的 z-变换分析

現在，我們利用z-变换来分析馬尔柯夫过程。向量和矩陣的z-变换就是对它的元素分别取z-变换。如果我們在这个意义下取方程(1.3)的变换并以$\boldsymbol{\Pi}(z)$記向量$\boldsymbol{\pi}(n)$的z-变换，那就得到

$$z^{-1}[\boldsymbol{\Pi}(z)-\boldsymbol{\pi}(0)]=\boldsymbol{\Pi}(z)\boldsymbol{P}. \tag{1.8}$$

經过整理，有

$$\boldsymbol{\Pi}(z)-z\boldsymbol{\Pi}(z)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\pi}(0),$$
$$\boldsymbol{\Pi}(z)(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})=\boldsymbol{\pi}(0),$$

最后得

$$\boldsymbol{\Pi}(z)=\boldsymbol{\pi}(0)(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}. \tag{1.9}$$

在这个表示式中，$\boldsymbol{I}$是单位矩陣。因此，狀态概率向量的变换等于初始概率向量右乘以矩陣$(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})$的逆；在这里，$(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})$的逆是恒存在的。注意，所有瞬时問題的解都包含在矩陣$(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}$之中。对于任何瞬时問題要得到完全的解，所有我們必須要做的一切就是用初始狀态概率对$(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}$的各行加权，相加，然后在

这个結果中取每一个元素的逆变换。

我們用 z-变换来研究玩具制造商的例子。对于这种情形，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix},$$

卽

$$\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}z & -\frac{1}{2}z\\ -\frac{2}{5}z & 1-\frac{3}{5}z\end{bmatrix}$$

和

$$(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\frac{3}{5}z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}z\right)} & \dfrac{\frac{1}{2}z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}z\right)}\\ \dfrac{\frac{2}{5}z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}z\right)} & \dfrac{1-\frac{1}{2}z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}z\right)}\end{bmatrix}.$$

$(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}$的每一个元素是 z 的函数，以因式$(1-z)\left(1-\frac{1}{10}z\right)$为分母。利用部分分式[2]，我們可以将每一个元素表成二項的和：一个是以 $1-z$ 为分母，另一个以 $1-\frac{1}{10}z$ 为分母。現在，矩陣 $(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}$ 变为

$$(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\frac{4}{9}}{1-z}+\dfrac{\frac{5}{9}}{1-\frac{1}{10}z} & \dfrac{\frac{5}{9}}{1-z}+\dfrac{-\frac{5}{9}}{1-\frac{1}{10}z}\\ \dfrac{\frac{4}{9}}{1-z}+\dfrac{-\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{10}z} & \dfrac{\frac{5}{9}}{1-z}+\dfrac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{10}z}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-z}\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}+\frac{1}{1-\frac{1}{10}z}\begin{bmatrix}\frac{5}{9} & -\frac{5}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{bmatrix}.$$

令矩陣 $\boldsymbol{H}(n)$ 为 $(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}$ 的各个元素取逆变换而得的矩陣。那么，从表 1.3，我們看到

$$\boldsymbol{H}(n)=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{10}\right)^n\begin{bmatrix}\frac{5}{9} & -\frac{5}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{bmatrix},$$

且最后取(1.9)的逆变换得

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{H}(n). \tag{1.10}$$

和方程(1.4)比較，我們看到 $\boldsymbol{H}(n)=\boldsymbol{P}^n$，并且也看到我們已經找到了計算轉移概率矩陣的 n 次冪的一个方便的方法。在时刻 n 的状态概率向量因而可經对初始概率向量右乘以矩陣 $\boldsymbol{H}(n)$ 而得出。矩陣 $\boldsymbol{H}(n)$ 的第 ij 个元素表示系統在时刻 $n=0$ 时处在状态 i 而在时刻 n 时将处在状态 j 的概率。如果玩具制造商在开始时处于成功的状态 1，则 $\boldsymbol{\pi}(0)=[1\quad 0]$ 和

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{10}\right)^n\begin{bmatrix}\frac{5}{9} & -\frac{5}{9}\end{bmatrix},$$

或 $$\pi_1(n)=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n,\quad \pi_2(n)=\frac{5}{9}-\frac{5}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

注意，$\pi_1(n)$ 和 $\pi_2(n)$ 的这种形式是表 1.1 中用矩陣的乘法得出的状态概率的精确的分析表示式。并且随着 n 的变大，$\pi_1(n)$ 趋向于 $\frac{4}{9}$，$\pi_2(n)$ 趋向于 $\frac{5}{9}$；它們趋向于过程的极限状态概率。

假如玩具制造商开始于状态 2，则

$$\boldsymbol{\pi}(0)=[0\quad 1],\ \boldsymbol{\pi}(n)=\begin{bmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{10}\right)^n\begin{bmatrix}-\frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{bmatrix},$$

因而 $$\pi_1(n)=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n,\ \pi_2(n)=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

現在，我們便得到了表 1.2 中数据的分析形式。对于大的 n，我們再次看到，状态概率变为过程的极限状态概率。

关于 $\boldsymbol{H}(n)$ 所取的这种形式可以給出一般的叙述。首先，在它的分量矩陣中总是至少有一个随机矩陣并且它是从矩陣 $(\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P})^{-1}$的 $\dfrac{1}{1-z}$ 的項所产生的。这也就是説，$\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P}$ 的行列式当 $z=1$ 时为 0，或者説一个随机矩陣至少总有一个等于 1 的特征值。如果过程是完全各态历經的，那么，在 $\boldsymbol{H}(n)$ 中恰有一个随机矩陣。这个矩陣的各行是相同的而且每一行都是过程的极限状态概率向量。我們称 $\boldsymbol{H}(n)$ 的这一部分是稳定状态部分，并用符号 $\boldsymbol{S}$ 記之，因为它不是 n 的函数。

$\boldsymbol{H}(n)$ 的其他項表示过程的瞬时性质。这些項是矩陣与形如 α^n, $n\alpha^n$, $n^2\alpha^n\cdots$ 的系数的乘积。自然，$|\alpha|$ 必須不大于 1，因为任一 α 如果大于 1，概率的那一部分将会变为无界，而这种情形显然是不可能的。这些瞬时矩陣表示概率递减的几何序列的那一部分，这是馬尔柯夫过程的一个特征。$\boldsymbol{H}(n)$ 的瞬时部分是 n 的函数，所以可用 $\boldsymbol{T}(n)$ 来記之。因为对完全各态历經过程，对所有 α，有 $|\alpha|<1$，故知瞬时部分随 n 增大而消失。組成 $\boldsymbol{T}(n)$ 的矩陣也是有趣的，因为它們的每一行之和为 0．瞬时部分加起来必須为 0，因为它們可以作为极限概率的擾动来考虑。行之和为 0 的矩陣称为微分矩陣。最后，对于完全各态历經过程，

$$\boldsymbol{H}(n)=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}(n), \tag{1.11}$$

此处 $\boldsymbol{S}$ 是一个随机矩陣，它的所有的行均等于极限状态概率向量，而 $\boldsymbol{T}(n)$ 是一些带几何系数的微分矩陣的和，这里，几何系数是随 n 的增大而趋于 0 的。

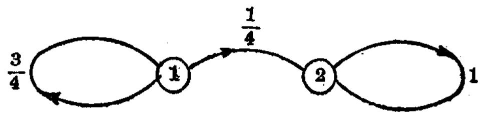
瞬时的、多鏈的和周期的性质

为了更进一步看清楚馬尔柯夫过程，让我們利用 z-变换的方法去分析具有典型性质的模型的过程。在玩具制造商問題中，当轉

移次数很大时，二个状态都有有限的概率。某些状态的极限状态概率可以等于 0，这种情形甚至对完全各态历經的过程也是可能的。这样的状态，称为瞬时状态，因为我們可以肯定在經过一个相当长的时間以后，系統不会处于这些状态。矩陣

$$P=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

描繪一个二状态的过程，它具有一个瞬时状态，其轉移图形是：



如果系統处于状态 1，它轉移到状态 2 的概率是 $\frac{1}{4}$. 但是，如果它一經轉移到状态 2，那么，从此系統就永远停留在状态 2. 状态 1 是瞬时状态；状态 2 是"吸收"状态（$p_{ii}=1$ 的状态 i）。

应用 z-变换分析，我們得到

$$(I-zP)=\begin{bmatrix}1-\frac{3}{4}z & -\frac{1}{4}z\\ 0 & 1-z\end{bmatrix}$$

和
$$(I-zP)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-z}{(1-z)\left(1-\frac{3}{4}z\right)} & \dfrac{\frac{1}{4}z}{(1-z)\left(1-\frac{3}{4}z\right)}\\[2ex] \dfrac{0}{(1-z)\left(1-\frac{3}{4}z\right)} & \dfrac{1-\frac{3}{4}z}{(1-z)\left(1-\frac{3}{4}z\right)}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-z}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{1-\frac{3}{4}z}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

因此，
$$H(n)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\frac{3}{4}\right)^n\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$