

生活与科学文库

$$y=5 \log(4x+3)$$

$$y=2x$$

$$y=5 \log(4x+3) \quad y=\sin x$$

$$y=2x$$

$$y=5 \log(4x+3)$$

$$y=\sin x \quad y=5x+2x+1$$

$$y=x$$

$$y=\sin x$$

$$y=5x+2x+1$$

$$y=x$$

$$y=5 \log(y+x+5) \quad 2x+1$$

$$y=2x$$

$$y=\sin x$$

$$y=x$$

$$y=5x+2x+1$$

[日] 权平健一郎 神原武志 著

# 函数在你身边

生活与科学  
文库

直觉探索函数世界

◆ 形状与函数

◆ 气候与函数

◆ 人体与函数

◆ 热现象与函数

◆ 视觉与函数

◆ 相对论与函数

◆ 思维的软件与硬件

◆ 函数般的表达思想

-49

科学出版社

「関数とはなにか」 権平健一郎/神原武志

©Kenichiro Gondaira/Takeshi Kanbara

All rights reserved

First published in Japan in (1982) by Kodansha Ltd. Tokyo

Chinese version published by Science Press Chinese Academy  
of Sciences

Under license from Kodansha Ltd.

本书据日本讲谈社 1995 年第 15 次印刷版译

**图字:01-1999-3296 号**

**图书在版编目(CIP)数据**

函数在你身边:直觉探索函数世界/[日]权平健一郎,神  
原武志著;罗亮生,罗丽生译.-北京:科学出版社,2001  
(生活与科学文库)

ISBN 7-03-008548-5

I. 函… II. ①权… ②神… ③罗… ④罗… III. 函数  
-普及读物 IV. O174.49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 60684 号

**科学出版社 出版**

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

**新蕾印刷厂 印刷**

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

**定价:8.00元**

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

# 前 言

在撰写本书之前，笔者阅读了与函数有关的书籍，在多方面下了功夫，为理解函数积累了不少有价值的东西。笔者以为，这些书籍的内容包括了两个方面：一是提供了函数计算中的一些技巧；二是对函数的概念进行了说明。然而，所谓函数仅仅就是这些吗？

在此，笔者拟从一个较为与众不同的角度来介绍一下什么是函数，即函数是不是人们在考虑问题时所使用的概念。这种概念不但在数学、物理等诸多学科中得到了运用，还渗透到了人们的日常生活之中。

在本书中，笔者提出了“函数的功能（作用）就是人类的思维”这一假设。这样考虑就能明白，为什么函数会在以合理

思维为本质的领域中得到广泛运用。波赫那、外尔、施彭格勒、远山启等人还提出：函数是数学的最重要概念之一。

本书的目的是分析人们在解决问题时所进行的思维，以此来说明函数的功能。

第一章叙述的内容有：我们的日常生活中哪些地方出现了函数；人们对函数的看法；函数发展的历史。

在第二章中，针对实际问题与各种情况来说明两个问题：函数的概念是如何被引入实际问题中的？它在其中扮演了怎样的角色？

第三章是对函数的具体表示方法的总结。

通过以上三章，可以对函数有个大致的印象。在此基础上，第四章将考虑，在人类的思维中函数究竟有怎样的意义，起了什么作用。

我们所说的理解了函数，且在许多领域应用它，并不是指在计算问题时能否使用函数。函数的功能若只拘泥于用数学式来表现，那它反而会变得不能被深刻领会了。本书中也出现了数学式子，但那只是为了揭示如果用数学方法来表示函数，将会出现怎样的形态。本书始终站在“把数学式省略，让函数本身在日常生活中起作用”的立场上。这也是本书的核心。

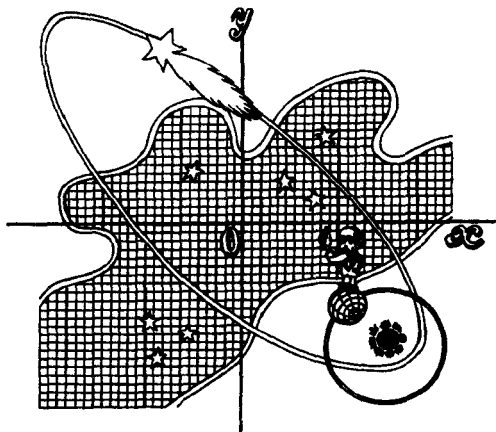
最后，我要向大江千寻先生表示衷心

感谢！感谢他在本书的策划至脱稿的整个过程中，不断地给予宝贵的意见。

权平健一郎  
神原 武志  
一九八二年四月

# 第一章

## 人与函数的关系



# 1 出现在我们身边的函数

《我是猫》中也出现了函数

“先生已经糊好了拉门啊？谁糊的？”

“是女人糊的，还不错吧？”

“真的很好。是不是那个经常来的小姐糊的？”

“嗯，她也帮了忙，还说能糊拉门就有资格出嫁呢，颇有点洋洋自得啊！”

“怪不得！”寒月君一边说一边看着拉门。

“这里挺平的，但右端多出了一些纸，有点皱巴巴的。”

“那边是最先糊的，当时还没有经验呢。”

“原来如此啊，是差了点。但那个表面具有绝妙的曲线，不是用普通的方法可以糊得出来的。”寒月君像学者评说着很难的事情似的。

“是啊，是啊。”主人附和着。

这是夏目漱石的作品《我是猫》中的一段。即使

是能把粗茶想象成好茶的苦沙弥先生，头脑中也不会出现把糊拉门的纸上出现的曲线用函数来表示的想法。

但是，如果留心一下我们的周围就会发现，的确存在着许多由简单的函数所表示出来的事



物与现象。下面，让我们为寻找身边的函数而作一次散步吧。

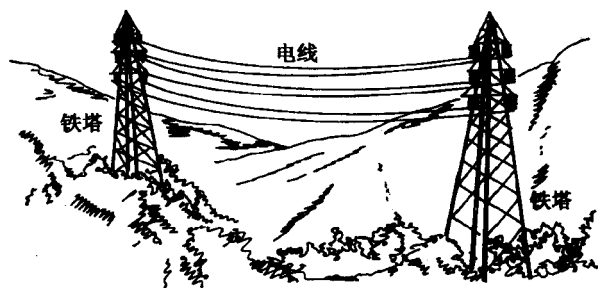


图 1.1 输电线是悬链线

在徒步旅行或越野识途比赛时，往往是一边察看地图一边在野外行进。此时，电线就成为了解所在位置的位置的合适参照物。高高的铁塔与铁塔之间，电线都是稍稍向下垂着的，那被称为悬链线。它是电线受到了重力与张力的共同作用而形成的曲线，利用指数函数  $e^{\frac{x}{a}}$ ，这条悬链线可以表示为  $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ 。

最近，在某些大厦的屋顶等处经常可以看到抛物面天线。因为诸如电视信号、电话声音的传送都使用了电波，需要利用抛物面天线所具有的方向性强的电波束来进行接收和发送。这样的抛物面是由二次函数  $y = ax^2$  所表示的抛物线绕  $y$  轴旋转所形成的。探照灯的原理也一样。将光源放置在由抛物线旋转而成的镜面的焦点处，就可以得到平行光线。

在是否曾与地球相撞这一问题上存在着争议的哈雷彗星，于 1986 年又一次接近地球。它的运动轨道



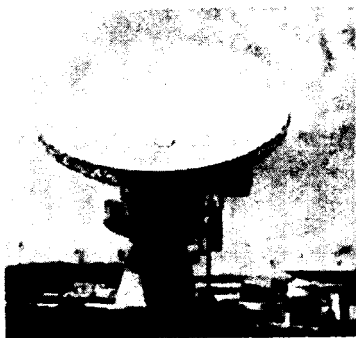


图 1.2 抛物面天线

是由  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  所表示的一个椭圆，每隔 76.02 年绕太阳一周。但并不是所有的彗星都像哈雷彗星那样去了又会再来，如同子弹般一去不复返的彗星也有很多。这些彗星是沿着抛物线  $y = ax^2$  或双曲线  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  所

表示的轨道运动的。

1642 年，法国的哲学家帕斯卡因厌倦了总是要帮助他那当税务官的父亲进行计算，就用汽缸和齿轮制造出了计算机。此后，人们花了许多功夫，利用齿轮和旋转轴，制成了各种各样的计算机。

1930 年，马萨诸塞理工大学的布什博士制造了由无数齿轮和旋转轴组成的巨大的计算机。这台计算机在第二次世界大战中，对于炮弹弹道的计算起了很大的作用。

如果炮弹在真空中飞行，那么它的弹道可以用  $y = ax^2 + bx + c$  这种函数形式来表示。但是实际上，

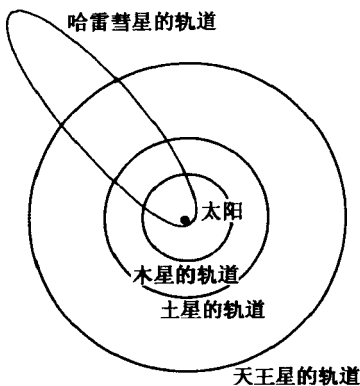


图 1.3 哈雷彗星的椭圆轨道

由于在空气中飞行会受到空气的阻力，从而式子变得更为复杂。

至此，我们可以看出，在我们的身边，出现的函数不胜枚举。如果你刚从附近散步回来，那就不妨离开现在所走的大路，去路边的草丛中转一转，放松一下，顺其自然地想一想，如何用函数来描述诸如人类声音及乐器声音这些复杂的现象。

### 复杂的曲线及其分析

“首先，正如我们以前所知道的那样，人类的声音是由许多和声<sup>①</sup>组成的。所以，自动语音合成器的着眼点就在于人类声音的人工再生。当然，也不需要全部的声音，但至少要将基本的和声进行收集、混合，以达到再生。和声可以用不同的脉冲发射机一个一个地输入。对了，您一定知道笛卡儿的直角坐标系吧？这是中学生也知道的。但您知道傅里叶级数吗？”

“等一等，”阿巴库摩夫说，“我只想知道，什么时候能完成自动语音合成器，完成它是在什么时候。”

“什么时候可以完成？嗯……这个问题还没有想过。”

……

这是索尔尼琴的《炼狱之中》里的一段。

国家安全部部长阿巴库摩夫被责成发明一种防止窃听用的电话装置，期限将至。因此，他询问担任发明工作的特殊机构的主任技师普里扬切科夫，何时能够完成这种装置。部长想知道的仅仅是在规定期限内

---

① 和声是指两个以上的音按一定的规律同时发声。——译者注

能否完成这项发明，而主任技师一直在强调要发明这种人工语言装置是何等的困难。其实，在斯大林的面前，部长是微不足道的。因此，他最关心的是，在规定的期限内能否完成它。

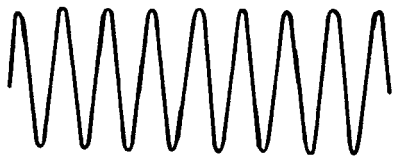


图 1.4 纯音的波形

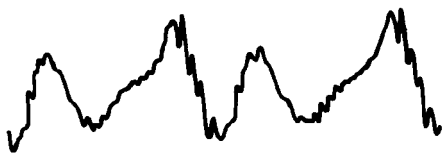


图 1.5 “衣”音的波形



图 1.6 小提琴声音的波形

但是，现在我们所关心的不是部长的结局，而是声音的波形能用怎样的函数来表示。由空气的压缩与膨胀所产生的压力变化的传播就是声音。这种随时间变化而产生的压力变化波形被称为音压波形。纯音的音压波形如图 1.4 所示，它可以用函数  $y = \sin x$  来表示。不过人类声音的波形比这复杂。图

1.5 所示的是“衣”字发音的波形。它虽然与纯音有很大的不同，但是，从“同样的曲线段周期性地出现”这一点来看，它们是一样的。小提琴声音的波形

如图 1.6. 它比“衣”字的波形更复杂，但“同样的曲线段周期性地出现”这一性质却没有改变。

人声与小提琴声音的波形虽然复杂，但都是在周期性地重复着各自的曲线类型。若用图 1.4 所示的纯音来合成这种波形，就可以将声音再现。普里扬切科夫对部长所说的傅里叶级数，就是种种纯音的合成，用函数可表示为

$$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \\ + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

任何人发“衣”字的音听起来就是“衣”，这是因为各人声音的波形差别很小。也就是说，上面函数中的系数  $a_i$  和  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n, \dots$ ) 的值对每个人来说只有微小的差异。但就是这些微小的差异，产生了各人的声音特征。

普里扬切科夫所要发明的装置，是要将人类的声音分解为各种纯音并将其发送，然后在接收器中组合还原为原来的声音。这样，即使在发送途中有人窃听，但若窃听者不知道组合还原方法的话，就无法知道通话内容，使用者从而可以放心地进行通话。

但是，要想掌握  $a_i$  与  $b_i$  的微小差别，并且完全无误地进行组合，也不是一件容易的事。

苏联的干部们通过电话接受斯大林的命令，但是，如果不能判断那是不是斯大林的声音，那么，这种电话即使可以防止窃听也是毫无用处的。在日本已有这样的先例，在苏联未必就没有吧？

即使是小提琴演奏家斯托拉吉帕利和哥达尼尼的小提琴的音色，若用纯音来组合，与普通小提琴的音



色也只有微小的差别。所以，为了防伪，诸如鉴定书、大学教授的担保等都采用实物。若有了像自动语音合成器那样的装置，欺骗和被欺骗的悲剧也许就不会存在了吧。但是，就事物本身的美而言，它需要

人们通过自己的眼睛与耳朵来接受，并用心灵去感觉、去判断，不能靠他人或机械来决定。

## 2 函数让你觉得讨厌吗？

### 不擅长函数

正如前一节所看到的，函数在我们身边经常出现，但它一般不受人欢迎。苦沙弥先生似乎也一样，并不喜欢它。

在《我是猫》中，自然科学家水岛寒月为了演讲“自缢的力学”，先在苦沙弥与迷亭两人面前作了预演：

“……首先假设以同样的距离吊着一个女人。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ 是绳子与地平线所构成的角度； $T_1, T_2, \dots, T_6$ 是绳子受到的力。

“根据众所周知的多边形平均性理论，可得如下的12个方程：

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 \quad (1)$$

$$T_2 \cos \alpha_2 = T_3 \cos \alpha_3 \quad (2)$$

…….”

“这方程也太多了吧!”主人粗暴地打断了寒月的话。

“实际上,这些式子是演讲的核心,‘核心’就应给予格外的重视。”看得出,寒月君对于不让他讲这些方程感到非常可惜。

“丈夫是家庭的核心,那岂不是要格外重视、服侍他了吗?”看起来迷亭也有点担心。

“如果不讲这些式子,就不能进行力学的研究了…….”

“这倒不必担心,我劝您还是将它们全部都省略了吧。”主人平静地说。

“好吧,那就听您的,虽然不讲这些式子很可惜。”

“这太好了!”听到这里,迷亭高兴地鼓起掌来。

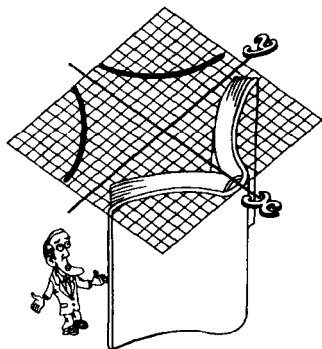
讨厌数学的人,想必也遇到过这种情不自禁鼓起掌来的情况吧。但是,与明治时代<sup>①</sup>不同,函数计算器等已经出现,在充满了正弦和余弦的现代,要想“全部省略”可就不容易生存了。

## 本书使用函数的性质

阅读本书的读者一定不会对函数一无所知吧?但是,对它却很可能没有什么兴趣。不同的读者有不同的目的:有的想进一步了解在学校或公司里所遇到的函数;有的是工作中要用到函数;还有的是在日常生

<sup>①</sup> 明治时代指公元1869~1911年。——译者注

活中突然碰到它，临时抱佛脚，带着“函数是什么”的疑问来翻看此书。



显然，要满足所有读者的需要，把大家想知道的都写出来是不可能的；笔者也没有这样的才能。因而有必要在此指出这本书究竟介绍了函数众多功能中的哪些方面。

现在，出了不少有关函数的书。除去教科书与学术著作，像本书这样面向普通大众的科普书籍也有很多。若去图书馆看一下，立刻就能找到十几二十本。

为了使能轻松地阅读本书，笔者对其中的许多内容都下了大功夫。但就本质而言，本书仍然与教科书站在同一立场上。即仍从定理、公理出发，严密地使用数学式，一步一步地进行逻辑推理，最后得出结论。正如寒月君所说，省略数学式子是不能进行研究的。

诚然，对于人造卫星的轨道或原子反应堆的安全运转来说，严密的计算是不可缺少的。但是，要解决这些问题，就不得不系统地学习教科书和学术书籍。因为，解决这种层次的问题，科普书籍是无能为力的。

在人们解决问题的过程中，在运用逻辑推理之前，有一个不运用逻辑而凭直觉进行思维的阶段。

思维是“对感性的东西施以理性的整理”（杜威）。对混沌的对象施以理性的整理之后，就开始了

逻辑思维。到目前为止所出的书，似乎都将函数作为逻辑思维的工具。

函数的功能不仅在数学的演算中能发挥出来，在活跃的直觉思维阶段也能起重要作用。

本书希望在直觉思维中发现函数的作用。但不可能如同在逻辑思维中的函数那样，用数学式来明确表示其作用。

### 把函数当作自己的东西

为了把函数当成自己的东西来使用，光凭课堂练习是不够的。从直觉思维开始，利用合乎函数功能的方法进行思维是很重要的。

以康德为首的很多人认为，仅凭逻辑是不能产生新事物的。为了创造性地解决人生中不同境遇下产生的问题，有一个看法是：对函数的认识是不可缺少的。从新的角度看待事物是通往创造的必经之路。

## 3 函数是……

函数到底是什么？人们一般是如何考虑它的？它的历史又是怎样的？在考虑函数时，必须先弄清楚这些问题。

让我们从一些辞典中来看一下函数的概念。

《国语辞典》（新明解国语辞典，三省堂）中：



函数——在两个（以上）变量中可以看出  $y$  随着  $x$  的确定而确定的规则（关系）。这时  $y$  叫做  $x$  的函数， $x$  是独立变量（自变量）， $y$  是从属变量（因变量）。

《广辞苑》（岩波书店）中：

函数（function）——有两个变量  $x$  与  $y$ ， $y$  与  $x$  的变化有关连。当  $y$  从属地变化时， $x$  是独立变量， $y$  是从属变量，或者说，它是函数：独立变量也可能有 2 个以上。

《百科事典》（国民百科事典，平凡社）中：

函数——代表了某个范围内的变数的文字称为变量，那个范围称作变域。有两个变量  $x$  与  $y$ ，相对于  $x$  的变域中的各个值， $y$  均有一个值与之对应，确定了这一规则，就称定义出了  $x$  的函数  $y$ 。 $x$  的变域称为函数的定义域， $x$  在变域中变化时， $y$  所对应的变化范围称为函数的值域。

《理化辞典》（岩波书店）中：

函数（英 function，法 fonction，德 Funktion）——两个变量  $x$ ， $y$  之间有一定的关系，当  $x$  的值确定了以后，与之相对应的  $y$  的值也就确定了，则称  $y$  是  $x$  的函数，表示为  $y=f(x)$ 。例如，圆的面积是半径的函数。