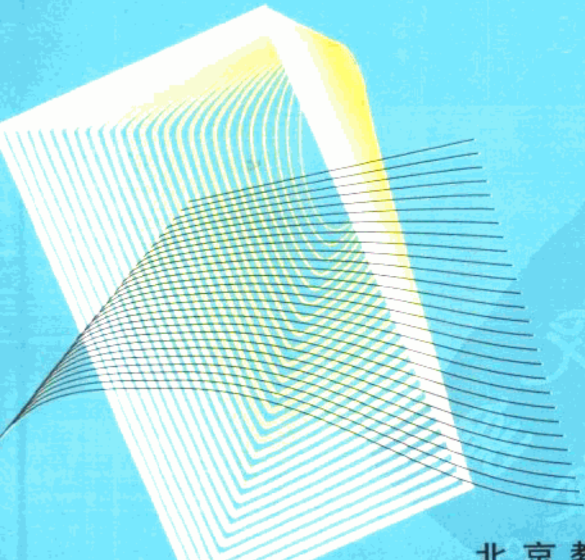
高考急诊室

数学答卷典型错误分析

前车之鉴
后人之师



主编 王大赫
本册主编 戴林元
高考数学阅卷组编

北京教育出版社

高考急诊室

数学答卷典型错误分析

主编　王大赫
本册主编　戴林元
高考数学阅卷组编

北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学答卷典型错误分析/戴林元主编 .—北京:北京教育出版社,2001

(高考急诊室/王大赫主编)

ISBN 7-5303-2478-0

Ⅰ.数… Ⅱ.戴… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 073562 号

高考急诊室

数学答卷典型错误分析

SHUXUE DAJUAN DIANXING CUOWU FENXI

高考数学阅卷组 编

*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网 址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新华书店经销

北京华威冶金印刷厂印刷

*

850×1168 32开本 8印张 180000字

2002年1月第1版 2002年1月第1次印刷

印数:1—20000

ISBN 7-5303-2478-0

G·2451 定价:10.00元

编委会名单

主　　编　王大赫
本册主编　戴林元

前　言

良药苦口利于病，前车之鉴利于行。为了广大考生的根本利益，为了考场上少犯错误、不犯错误，我们特别邀请了北京、福建、广东、四川等地参加过历年高考阅卷工作的老师，为广大考生编写了一套《高考急诊室丛书》。

这套丛书针对1995年以来的每年高考试卷，按照“试卷分析”“典型试题典型错误分析”“备考启示”三个方面进行了细致认真的阐述，特别是“典型试题典型错误分析”，在高考阅卷组老师当年阅卷总结的基础上，不但分析了考生典型错误的原因，而且总结了完整的解决问题的方法；不但找出了考生易犯习惯性错误的根源，而且开出了诊治的良方。严格讲，每个考生在应试过程中，都有不同的盲区，容易犯一些习惯性的错误。降低错误率，减少无谓的失分，是提高高考成绩、取得理想分值、考入重点大学的关键。因此，考前到“急诊室”看看病、求求医，是可以取得事半功倍的佳效的。

这套丛书除了对1995年以来的历年高考试卷进行典型试题典型错误分析之外，还附有历年高考试卷原文和参考答案及评分标准，这也是广大考生亟需的复习材料，吃透前几年的高考试题，对提高考场应试能力、加强命题思路与题型的理解，都可起到举一反三的作用。

高考试题是命题专家辛勤工作的结晶，它体现了我国高考的意志、命题的思想和水平，体现了我国选拔人才的能力要求

和测试的内容及方法。试题本身是教育教学的宝贵财富。考生了解高考命题意图及思路，认真演习历年高考试题，借鉴往届考生的答卷失误，是每个备考考生必不可少的一个复习环节，是复习考试最好的导向，也是《考试说明》的最好说明。同时，近几年高考试卷的特点、考生答卷典型错误分析，也是考研人员、教研人员的重要参考资料。

由于时间紧，工作量又较大，书中可能存在着不足，希望广大考生及老师予以批评指正。

编　者

目　录

第一章 1995年高考数学试题

第一部分 试卷分析

一、总体认识

1995年全国已普遍实行高中毕业会考制度，所有省、市、自治区都实行了“3+2”新科目组．根据实际情况确定了“整体保持稳定，文科降低难度，应用题加大力度”的指导思想．

1995年的高考数学试题力图保持近几年来形成的稳定风格，同时又不断探索求新，避免形成僵化的模式．

1．试卷设计贯彻了《考试说明》的各项要求，考查的知识范围没有超出规定，题型结构、知识结构、难度结构和学科能力层次要求的结构都符合《考试说明》规定的比例．

2．为保证试卷有较高的信度和效度，在确定考查内容时力图合理抽样、突出重点，考查中学数学的主体内容．试卷中对中学数学教学大纲中的重点知识，如基本概念、定理、公式、方法都进行了必要的考查．在此前提下，对那些与大学学习密切相关的知识内容给予适当的侧重，体现了试卷的选拔功能．

3．突出对一般数学思想和数学能力的考查．会考后的高考更加突出选拔性，注重考试的预测效度，并注重对考生学习潜能的考查．一般认为当前信息社会对数学的需要有一种两极分化的趋势：一方面由于技术的发展，社会降低了对一般公民在特殊数学技巧方面的要求；另一方面却又增强了对公民具有

更普遍的数学概念与数学思想的要求. 1995 年试题注重考查一般的数学能力和通性通法，特别对阅读理解能力和各种数学语言转化的能力都有稳定的要求. 力图淡化对一些特殊技巧的要求.

4. 继续尝试考查信息迁移题. 1995 年理科试卷第（24）题中给出了价格与需求量、价格与供应量间的数学模型，并定义了市场平衡价格. 这是一个在平常教学中没有见过的情境，将未知的知识在题中给出. 本题的目的不在于增加知识内容，而是要求学生能读懂题目的条件和要求，将所学的知识和方法灵活地应用于陌生的情境，创造性地解题. 这样的题目对考生的理解能力、综合已有的知识编织信息网的解题能力都进行了深入的考查，为高校选拔有学习潜能的新生发挥了极为有利的作用，同时这类题也有助于学生摆脱“题海”的困扰，因为题目的类型、内容对每个学生都是未知的，并不在“题海”之内，考生必须临场应试，即时发挥，因而对每个考生的“综合实力”的考查都真实、可靠、公平合理，而“题海战术”则无力应付. 对中学教学发挥了正确的导向作用.

5. 充分发挥各种题型功能. 今年的选择题与非选择题都有一定的坡度，各尽所能，有机结合，从不同方面、不同层次实现考查目标. 前半部分考查基础知识，发挥对中学教学的导向作用，检验其基础知识是否全面牢固，后半部分则侧重于考查能力，发挥考试的选拔作用. 从控制难度、调整分数看，使送分题力求送到手，拉分题能拉得开，不但将合格新生选拔出来，而且将适合进入不同层次高校的考生区分出来.

6. 试题的语言准确、规范，常规试题的叙述和设问都参照课本要求，采用考生熟悉的语句，消除歧义和误解. 考查阅读和理解能力的题目则以文字语言为主，符号语言为辅，考查文字语言的识别、理解和转化能力.

二、试题特点

1995 年的数学高考试题在调整难度上做了积极、有益的探索和尝试.

1. 突出文科试卷的特点，适当控制难度. 随着社会主义市场经济的迅速发展，社会对文科考生的数学素质提出了更高的要求. 近年来，高考数学文科试卷坚持改革，逐步提高要求，以适应社会发展的需要，方向是完全正确的. 但是鉴于目前文科考生数学总体水平较低的实际情况，1995 年文科高考试卷，在 1994 年的基础上，进一步控制了难度. 不仅在解答题中，而且在选择题和填空题中，拉开了文科试卷与理科试卷的难度差异，这无疑是正确的、必要的、实事求是的.

2. 适应高中课程改革的要求，调整部分考试内容的试题难度. 我国现行的高中数学课程的教学内容，与国外的高中数学课程相比，差距较大，存在教学内容陈旧，知识面狭窄，课程结构单一，重视应用不够等问题. 进行课程改革势在必行，而课程改革应与考试制度的改革相互配合进行. 为了使考试制度的改革对课程改革产生一种正面导向作用，1995 年高考试卷在调整部分考试内容的试题难度上做了积极的、有益的探索和尝试. 一是加大了应用题的考查力度；二是适当降低了立体几何、三角变换、指数方程与对数方程、复数等内容的试题难度.

第二部分　典型试题典型错误分析

第（4）题

[试题简析] 本题主要考查空间想像能力. 缺乏这种想像，几乎无法解这道题. 当然抓住信息，从身边的实物中得到启

发，这是空间想像的基础.

[错例] 选 A、C、D.

[启示] 错解是因审题不慎，对正方体外接球的直径与正方体的位置关系不清楚所造成. 由于误认正方体外接球的直径为正方体底面的对角线，得错解 A，加上把正方体全面积 a^2 误作为一个面的面积得出正方体边长为 a，就得错解 C，把正方体边长读作为 a，得错解 D.

球的内接正（长）方体对角线才是球的直径，切莫误把一个面上的对角线当外接球的直径，当球内切于一正方体时，球直径即为正方体边长.

有关正方体内接和外切于球的计算问题，在高考和各地区的模拟试题中时有出现：

第（10）题

[试题简析] 该题表面上要对 4 个命题进行检查判断，但是由于特殊的题型设计，使得逻辑思维能力好的考生，只需对两个命题（任意两个都可以）进行具体检验即可，至于逻辑思维能力差的考生，或者不善于利用备选项提示作用的考生，往往要检查 3 个命题之后才能作出判断，对于选拔性的高考，这样设计试题很有好处，不仅提高了考试的区分度，而且结构效度和内容效度都会有所提高. 此外，该题对知识的熟练掌握和空间想像能力的要求也是比较高的.

[错例] 选 B.

[启示] 误认为由线线垂直可推出线面垂直，于是得出 $l \perp m \Rightarrow l \perp B \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$ 的错误结论，导致误选 B.

本例给出的四个命题中的每个命题都只出现在两个选择支中，当其中有一个命题的真假被判断后，就可以剔除两个选择支，只需在剩下的两个选择支中再作选择.

第（11）题

[试题简析] 对数函数的单调性与底数的取值有关，当底数给定时，判断函数的单调性属于比较低层次的考查，这种考查方法，在以往高考中已出现多次．而本题换个角度，由函数的单调性，反过来确定底数 a 的取值范围，并加强逻辑思维能力的考查，在对数的真数中也含有字母 a（即底数），而且把单调性设定在有限区间上．

这道选择题有较强的综合性，既比较深刻地考查了对数函数的概念和性质，又能在逻辑思维能力的考查方面达到一定的深度．这是因为，解答时不论采取何种方法，都必须对概念和性质有比较透彻的理解和熟练的掌握，同时，思维必须十分清晰有条理，且合乎逻辑．

关于参数 a 的取值范围问题，是一个充分必要条件的问题，该题如果不是采用选择题这种题型，而改用解答题或填空题，则难度将会高出许多．但作为“4 选 1”的选择题，可用排除法求解，充要性问题无形中也被淡化了，但对分析判断能力的要求，仍然保持了较高的层次，从加强数学能力的考查，但又有所控制这个角度看，该题的题型设计还是比较成功的．

[错例] 选 A．

[启示] 错解的发生是由于忽视了复合函数的增减性的判断法则，由对数函数的底必须 $a>0$，由此导致 x 在 $[0,1]$ 上时，$f(x)=-ax+2$ 为减函数，进而 $y=\log_a u$ 作为 u 的函数为减函数导致错判．对复合函数 $y=f[u(x)]$ 的增减性有如下结论：若 $f(u)$ 与 $u(x)$ 同时为增函数或减函数，那么 y 必是 x 的增函数，若 $f(u)$ 和 $u(x)$ 中有一个是增函数，另一个是减函数，那么 y 必是 x 的减函数，同时还要顾及零与负数没有对数，以及对数底数 a 的要求．本题是给出一个含有参数的函数，已知这个函数在某一区间上的增减性，求参数的范围判断函数在某个区间上的增减性是高考考查的重点，除以本题的形

式出现外，还有两种形式：一种形式是给出一个区间，求哪一个函数在此区间上增或减，另一种形式是求已知函数的增减区间.

第（12）题

[试题简析] 这道试题一方面暴露了学生知识中的缺陷，另一方面又可以用来提高学生观察、联想、猜测、论证的能力，培养思维的深刻性、独创性、批判性等优良品质. 但是，要收到这些良好的教学效果，必须要有解题后的回顾，要有学生的反馈评价，要有老师的启导讲评等教学环节. 所以这道试题如果用在平时的教学之中，组织得好，一定可以发挥良好的教育功能，堪称一道好题. 但当年考场上许多学生不明白道理，只凭感觉认为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}$，从而选 C.

[错例 1]

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{T_n-T_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2(n-1)}{3n+1-[3(n-1)+1]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

$\therefore$ 选 C.

[错例 2] 设 $S_n=2nk$. $T_n=(3n+1)k(k\neq0)$

则 $S_{n-1}=2(n-1)k, T_{n-1}=[3(n-1)+1]k$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2nk-2(n-1)k}{(3n+1)k-[3(n-1)+1]k}=\lim_{n\to\infty}\frac{2k}{3k}=\frac{2}{3}.$$

$\therefore$ 选 C.

[错例 3]

$S_{2n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots+a_{2n-1}=(2n-1)a_n$

$T_{2n-1}=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots+b_{2n-1}=(2n-1)b_n$

则 $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1}=\dfrac{2n-1}{3n-1}$

∵　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-1}=\frac{2}{3}$

∴　选 C.

[启示] 上述错解，不属于粗心大意造成的计算上的错误，而是说得出道理的概念错误，错误的实质，是误认为等差数列前 n 项和是 n 的一次函数（或者根本就没有考虑过这个问题），于是取 $S_n=2n$，$T_n=3n+1$，事实上，由等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，知 $S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，说明公差不为零的等差数列的前 n 项和是关于自然数 n 缺少常数项的二次函数（逆命题也成立）.（*）

另外，若取 $T_n=3n+1$，则数列 $\{b_n\}$ 为 4，3，3，3，…，它从首项起并非等差数列，与题设条件相悖，也说明取 $S_n=2n$，$T_n=3n+1$ 是不正确的.

应当注意，$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$ 是约去公因式后的最简分式. 那么，约去的公因式是怎样的一个一次因式？是 kn，还是 $kn+m(m\cdot k\neq 0)$？

若设 $S_n=2n\cdot kn=2kn^2$，$T_n=(3n+1)\cdot kn=3kn^2+kn$，从而得 $a_n=2(2n-1)k$，$b_n=2(3n-1)k$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)k}{2(3n-1)k}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-1}=\frac{2}{3}$.

若设 $S_n=2n(kn+m)=2kn^2+2mn$，

$T_n=(3n+1)(kn+m)=3kn^2+(k+3m)n+m$，根据命题（*），应有 $m=0$，但这与假设 $m\neq 0$ 矛盾，这说明约去的一次因式只能是 kn 形式.

从上述剖析看到，正确解答试题需要以命题（*）作为理论依据，观察 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}$，与选择支 A 相同，因

而猜测 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}$，并着手证明猜测而获得结论.

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+(n-1)d_1}{b_1+(n-1)d_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_1}{n-1}+d_1}{\dfrac{b_1}{n-1}+d_2}=\frac{d_1}{d_2}$$

$$\text{又}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d_1}{nb_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_1}{n-1}+\dfrac{1}{2}d_1}{\dfrac{b_1}{n-1}+\dfrac{1}{2}d_2}$$

$$=\frac{d_1}{d_2}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}.$$

这一巧妙解法使我们看到，选择题是一种结构特殊的命题形式，它的题干（题设条件）、选择支（备选结论）都含有解题信息，解题时应充分注重这些信息的使用，而不应只注意题干所存储的信息，把选择题一概当解答题去做. 这一巧妙解法，正是沟通了题干与选择支所存储信息的联系，运用观察、联想、猜测、论证而获得的

这一巧解，还证明了等差数列的一个有趣性质：对于两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}$ 都存在，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}$，这一结论，中学教材也没有讲到，试题从另一角度，引出了这一精彩结果.

第（15）题

[试题简析] 如图 1 所示，本题考查异面直线所成角的计算. 要求能够根据图形. 想像各个线、面的位置关系，正确引用辅助线求解.

[错例] 选 B 或 D.

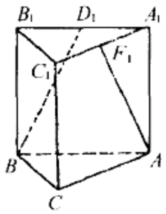


图 1

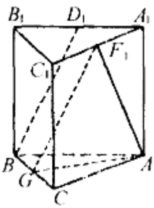


图 2

[启示] 误认为 $AF_1 = BD_1$ 得出了错解 B；计算错误，$AF_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}a$ 得错解 D.

AF_1 和 BD_1 是异面直线，求异面直线交角的基本策略是将一条异面直线平移后与另一条相交，然后再用解三角形的方法求出交角. 平移时要考虑平移后所得三角形的边长可求，因此常用线段平行的性质如应用中位线定理、构造平行四边形等方法来实现平移. 取 CB 的中点 G，则有 $F_1G \parallel D_1B$，$\angle AF_1G$ 为 BD_1 与 AF_1 所成的角，记其大小为 α，因为 $B_1D_1 > A_1F_1$ 可知 $BD_1 > AF_1$，又 $A_1A = AC$，$A_1F_1 = CG$，可得 $AF_1 = AG$ 从而在 $\triangle AF_1G$ 中（如图 2）有 $F_1G > AF_1 = AG$，

$$\cos\alpha = \frac{F_1G}{2AF_1} > \frac{1}{2}$$

据此，可排除 A、B、C 得 D. 根据选择项的特点，用估值法求解，可大大减少运算量. 本题选择项的这种设计，反映出本题考查的重点在于线面与线线的位置关系，突出空间观念的考查.

第（21）题

[试题简析] 本题在复平面上给出简单几何图形，要求计算图形（正方形）顶点的对应复数值，借以考查复数的向量表示与复数运算的几何意义等基本知识，以及运算能力和数形结合的解题能力.

[错例 1] 审题不细心，有的考生看成“按顺时针方向”；

[错例 2] 对复数乘法的几何意义一知半解，记得相应向