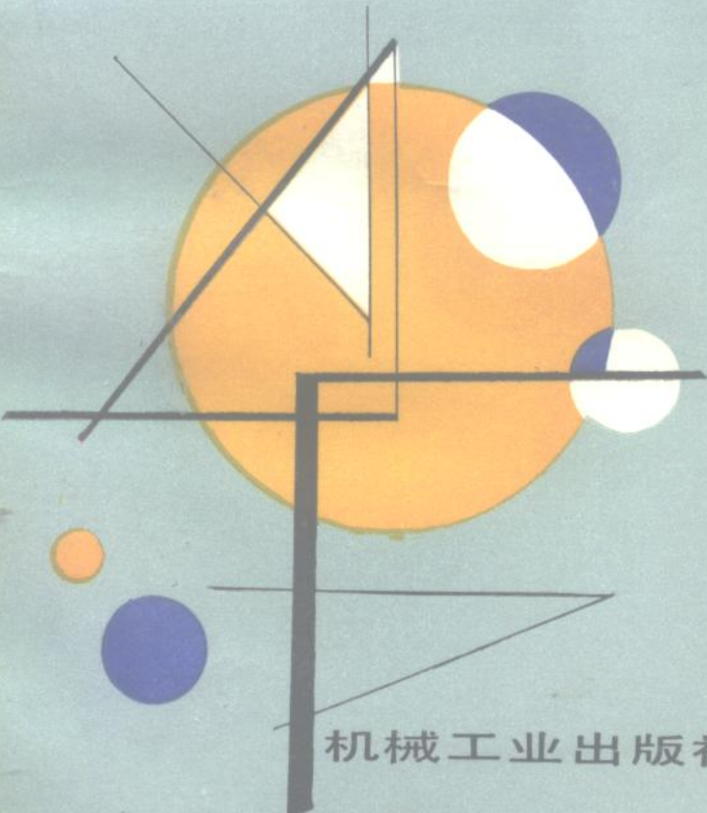
高等学校适用教材

概率论与数理统计

燕山大学 陈国良 主编



机械工业出版社

高等学校适用教材

概率论与数理统计

主　编　陈国良
副主编　赵来玉
编　者　陈国良　赵来玉
主　审　唐宗贤

机械工业出版社

(京)新登字 054 号

全书内容包括预备知识、概率论、数理统计。概念的叙述力求清晰易懂,便于自学,习题与例题都经精心挑选,使其既有广泛的应用性又具有一定的趣味性。

本书可作为高等学校工科、财经、管理等类专业教材,也可作为工程技术人员、管理人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/陈国良主编.—北京:机械工业出版社,1995 ISBN 7-111-04775-3

Ⅰ.概 Ⅱ.陈 Ⅲ.①概率论②数据理统计 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 08624 号

出 版 人:马九荣(北京市百万庄南街 1 号 邮政编码 100037)
责任编辑:张一萍 版式设计:李松山 责任校对:丁丽丽
封面设计:郭景云 责任印制:侯新民
北京昌平精工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1995 年 9 月第 1 版·1995 年 9 月第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/32·8 7/8 印张·195 千字
0 001—3 500 册
定价 9.90 元

前　言

本书是在 1983 年由陈国良、赵来玉、张文英编写的铅印讲义《概率论与数理统计》的基础上，经修改、补充而成的。可作为高等学校工科、财经、管理、土建等类专业的本科生、大专生概率论与数理统计课程的教材，也可作为工程技术人员、管理人员的自学用书。

全书共分三部分，第一部分是预备知识，介绍了排列组合与集合论的一些基本知识，供学习正式内容前复习之用。第二部分是概率论基础，叙述了事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等内容。第三部分是数理统计的基础知识与基本方法，介绍了抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。

原讲义在校内各专业试用多年，积累了不少经验，这次借出版的机会，对原书进行了大的修改和补充。大部分内容几乎是重新编写。概念的叙述力求清晰易懂，做到便于自学。对例题和习题也力图做到应用性与趣味性相结合。

本书在编写过程中得到了燕山大学数学教研室同行们的支持，在此向他们表示感谢。郭励碣同志描绘了本书的全部插图，并参与部分书稿的抄写，在此向她表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中缺点错误一定不少，恳请读者批评指正。

编　者

1995 年 1 月

目　录

第一章　预备知识

第一节　排列与组合

一、乘法原理

例 1　从甲村到丙村必过乙村，而从甲村到乙村有两条不同的路，从乙村到丙村有 3 条不同的路，那么从甲村到丙村共有

$$2\times3=6$$

条不同的路(图 1-1)。

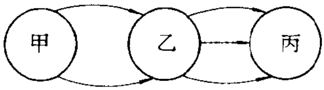


图　1-1

假如完成某项工作必须通过两个步骤，完成第一个步骤有 m 种不同方式，完成第二步骤有 n 种不同方式，则完成这项工作共有 $m\times n$ 种不同方式。更一般地，有如下乘法原理。

乘法原理　假如完成某项工作必须经过 k 个步骤，而完成第一步骤有 n_1 种不同方式，完成第二步骤有 n_2 种不同方式，……，完成第 k 步骤有 n_k 种不同方式，则完成这一工作共有

$$n_1n_2\cdots n_k$$

种不同方式。

二、排列

1. 全排列

例 2　甲、乙、丙三人站成一排，有多少种不同站法。

解 排头可以从三人中任选一人，共 3 种选法；排二只能从剩下的二人中任选一人，共 2 种选法；排尾只有一种选法。依乘法原理共有

$$3\times2\times1=6$$

种不同站法。

例 3 1、2、3 三个数可以组成多少没有重复数字的三位数？

解 此问题解法与例 2 相同，共可组成

$$3\times2\times1=6$$

个三位数。若将这些三位数排出来，它们是

123 132 213 231 312 321

今后，我们将考察对象称为**元素**。如例 2 中的人，例 3 中的数字。

定义 1 把 n 个不同元素，按照一定的顺序排成一列叫做 n 个不同元素的一种**全排列**。

所有不同的全排列种数用 P_n 表示。

n 个不同元素的全排列共有多少种呢？

我们设想 n 个元素的任何一种排列法都有 n 个位置。

第一个位置可以从 n 个元素中任取一个去占据，共有 n 种方法；

第二个位置可以从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个去占领，共有 $n-1$ 种方法，

……

第 n 个位置只剩下 1 个元素去占据，有 1 种方法。

依照乘法原理可知，n 个不同元素的全排列种数为

$$P_n=n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1=n!$$

如例 2、例 3 中，$P_3=3!=6$

2. 选排列

例 4 从四个不同数字 4、5、7、9 中每次取出 2 个不同数字排列起来共可组成多少没有重复数字的二位数？

解 先选出一个数字放到十位数的位置上共有 4 种不同选法；再从剩下数字中选出一个放到个位数的位置上共有 3 种不同选法。故共可组成

$$4\times3=12$$

种不同的二位数。

定义 2 从 n 个不同元素中每次取出 m 个元素按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个元素中每次取出 m 个元素的**排例**（或**选排列**）。

所有不同选排列的种数用 P_n^m 表示（或用 A_n^m 表示）。如例 4 中 $P_4^2=12$

在排列里要注意：只有元素相同，排列顺序也相同才是同一种排列。元素相同而排列顺序不同则是不同的排列。

如从 A、B、C 三个不同字母中每次取出两个的排列共 6 种，它们是

$$AB\quad AC\quad BA\quad BC\quad CA\quad CB$$

其中 AB 与 BA 虽然元素相同，但排列顺序不同，则是不同的排列。

与全排列的种类公式类似，可得

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

例如 $P_7^4=7\times6\times5\times4$

$$P_n^3=n(n-1)(n-2)$$

例 5 一排 10 个座位，5 个人去坐，共有多少种不同坐法？

解 每次从 10 个座位中任选出 5 个座位来的一种排列就对应一种坐法。共有

$$P_{10}^{5}=10\times9\times8\times7\times6=30240$$

种坐法。

例 6 用 0、1、2…9 这 10 个数字，可以组成多少没有重复数字的三位数？

解 百位数上不能为零，故百位数上只有 9 种取法，百位数取定后，其余两位数相当于在余下的 9 个数字中每次取出两个的排列，故共可组成三位数

$$9P_{9}^{2}=9\times9\times8\text{ 种}=648\text{ 种}$$

3. 可重复的排列

例 7 由数字 1、2、3、4、5、6 可以组成多少个数字可以重复的三位数？

解 百位数上有 6 种选法，因为数字可以重复，故不论百位数上选的是哪一个数字，十位数上仍有 6 种选法，同样，个位数上也仍有 6 种选法。故可组成

$$6\times6\times6=6^{3}=216$$

个三位数。

例 8 有三封不同的信，投入 4 个不同的信箱，共有多少种投信方法？

解 第一封信有 4 种不同投法，同样第二封信、第三封信仍有 4 种投法。故共有

$$4\times4\times4=4^{3}=64$$

种投信方法。

象这种允许元素重复出现的排列，叫做可重复的排列。

从 n 个不同元素里，每次取出 m 个元素，元素可以重复出现，所有不同排列的种数是：

$$U_n^m=n^m$$

三、组合

1. 组合的定义

例 9 从不在同一直线上的三点 A、B、C 中，每次取两个点连成一条直线，可以得到几条不同直线？

解 因为这任意两点能且只能引一条直线，故可得三条直线。AB,BC,AC。

在这个问题里，这两点连结成一条直线是不需要考虑顺序的。即 AB、BA 表示同一条直线。因此，这个例子可以更一般地叙述为：

从 3 个不同元素中，每次取出两个不同元素，不管怎样的顺序并成一组，一共有多少不同的组。从而引出组合定义。

定义 3 从 n 个不同元素里，每次取出 m 个元素，不管怎样的顺序并成一组，叫做从 n 个不同元素中每次取出 m 个元素的**组合**。

所有不同组合的种数用符号 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$ 表示。

从定义可知，对于组合来说，只要取出的元素一样，就是相同的组合。例如，从 a、b、c、d 四个字母中，每次取出 3 个字母的组合是：

$$abc \quad abd \quad acd \quad bcd \quad \text{四种}$$

组合 abc 与 bca、bac、cab 表示同一种组合。

2. 组合种数计算公式

从 n 个不同元素中，每次取出 m 个元素的排列种数 P_n^m，可以通过如下两个步骤完成：第一步，求出从 n 个不同元素中，每次取出 m 个元素的组合数 C_n^m；第二步，求每一种组合中的 m 个元素的全排列 P_m，再根据乘法原理可得

$$P_n^m=C_n^mP_m$$

故有

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

3. 组合的性质

组合有如下性质：

(1)$C_n^m=C_n^{n-m}$

(2)$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$

这两条性质，利用组合种数公式不难证明。

为了使读者对排列问题和组合问题加以区别，我们给出如下几个问题，请读者自己加以区别。

(1)10 个人相互写一封信，共写了几封信？

10 个人相互通一次电话，共通了几次电话？

(2)从 10 个人里选出三名代表，共有多少种选法？

从 10 个人里选出一个数学科代表，一个力学科代表，一个英语科代表，共多少种选法？

(3)有 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，每次取出两个数相减，共可得多少种差？

有 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，每次取出两个数相乘，共可得多少不同的积？

(4)一个人从 5 本书里选取 2 本，共有多少种选法？

从 5 本不同的书里选 2 本分配给甲乙二人，共有多少种分配方法？

例 10 一批产品由 45 件正品，5 件次品组成。从中取 3 件，恰有一件次品的取法有多少种？

解 取 3 件有 1 件次品则有 2 件正品，这 2 件正品是从 45 件正品中取得的，共 C_{45}^2 种取法。对于其中的每一种取法，另一件次品又有 C_5^1 种取法，故共有

$$C_{45}^{2}C_{5}^{1}=990$$

种取法

例 11 10 本书放在书架上，其中指定的 3 本书必须放在一起，共有多少种不同放法？

解 先把这三本书看成一本，共 8 本书，放法有 $P_8=8!$ 种。这 3 本书相互之间顺序又有 $P_3=3!$ 种放法。故共有

$$P_8P_3=8!\times3! \text{ 种}$$

第二节 集合及其运算简介

一、集合的概念

我们称具有某种共同性质的事物组成的集体为集合。简称集。组成集合的各个事物，称为集合的元素。一般用大写字母 A、B、C 等表示集合。用小写字母 a、b、c 等表示元素。

若集合 A 是由元素 a、b、c 等组成的，那么记 $A=\{a,b,c,\cdots\}$。如果 a 是集合 A 的元素则记为 $a\in A$，读作"a 属于 A"。如果 a 不是集合 A 的元素，记为 $a\overline{\in}A$，读作"a 不属于 A"。

在研究集合时，重复元素只算一个元素。例如$\{1,2,3,1\}$与$\{1,2,3\}$看作同一集合。

仅含有有限个元素的集合叫有限集。含有无限多个元素的集合叫无限集。在无限集中，其元素能和全体自然数一一对应的集合称为**可列集**或**可数集**。否则为**不可数集**。

不含元素的集合称为**空集**。常记为$\varnothing$。

组成集合的元素不一定都是数。例如双曲线 $xy=1$ 上的全体点构成一个集合。某班学生中身高在 1.70m 以上者也构成一个集合。这些集合的元素就不是数。

集合有很多表示方法，常用的有列举法和描述法。

如由元素 1,2,3,4,5 组成的集合记为

$$\{1,2,3,4,5\}$$

这种把集合中的元素一一列举出来的方法称为列举法。

把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律写在大括号内，用以表示集合的方法叫描述法，如由小于 5 的实数构成的集合表示为。

$$\{x \mid x<5\}$$

二、子集与空间

如果集合 A 中的每一个元素都属于集合 B，则称集合 A 为集合 B 的子集。记为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A$$

读作“A 含于 B”或“B 包含 A”。

例如$\{2,4,6,8\} \supset \{2,4\}$。

任何一个集合是它本身的子集。

如果 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作

$$A=B$$

如果 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集。

为了研究问题方便，我们规定，空集是任何集合的子集，即

$$\varnothing \subset A$$

例 1 写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集。

解 $\{a,b,c\}$的所有子集为：$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a,b\}$、$\{a,c\}$、$\{b,c\}$、$\{a,b,c\}$。

在研究集合与集合的关系时，如果所涉及的集合都是某集合的子集，则称该集合为空间。今后常用 Ω、U、S 等表示空间。

如果集合 A 是空间 Ω 的子集，把 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 的余集，记为 $\overline{A}$。

三、集合的运算

1. 并集

由属于集合 A 或属于集合 B 的元素的全体组成的集合，称为 A 与 B 的并集。记为 $A\cup B$。

例 2 设 $A=\{x\mid -1<x<2\}$

$B=\{x\mid 1<x<3\}$

则 $A\cup B=\{x\mid -1<x<2\}\cup\{x\mid 1<x<3\}=\{x\mid -1<x<3\}$

由并集的定义可知，对任何集合 A 有

$A\cup A=A \quad A\cup\varnothing=A$

有限个或可列个集合的并集分别记为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i \quad \text{及} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

2. 交集

由属于集合 A 且属于集合 B 的那些元素的全体所组成的集合，称为 A 与 B 的交集。记为 $A\cap B$。A 与 B 的交集有时也简记为 AB。

例 3 设 $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{3,4,5,6\}$，则 $A\cap B=\{3,4\}$。

3. 差集

由属于集合 A 而不属于集合 B 的那些元素的全体所组成的集合，称为 A 与 B 的差集。记作 $A-B$。

余集 $\overline{A}$ 实际上是空间 Ω 与 A 的差集。即

$$\overline{A}=\Omega-A$$

也有 $A=\Omega-\overline{A}$，$A\cup\overline{A}=\Omega$。

4. 集合运算的某些性质

(1)并与交的交换律

$$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$$

(2)结合律

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3)分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

(4)德·莫根定理

$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2} \qquad \overline{A_1\cap A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$

一般地有$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$