弹性力学习题解答

丁立祚　邵震豪　编

中国铁道出版社

1982年·北京

内 容 简 介

本书共分十一章，包括平面问题、空间问题、薄板、薄壳等方面的习题100余个，选自徐芝纶编的《弹性力学简明教程》，《弹性力学》上下册，铁摩辛柯著的《弹性理论》第三版及清华大学编的《弹性力学讲义》（1964）。对其中某些题并按不同思路做出几种解法以帮助读者灵活运用所学知识。

本书可供高等工科院校土建、水利、机械等专业的师生、研究生以及工程技术人员参考。

弹性力学习题解答

丁立祚　邵震豪　编

中国铁道出版社出版

责任编辑　王能远　封面设计　翟　达

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张：9.25 字数：328 千

1 9 8 2 年10月 第 1 版　1 9 8 2 年10月 第 1 次印刷

印数：0001—24,000册　定价：1.35元

前　言

弹性力学是高等工科院校的一门基础技术理论课程，它在土建、水利及机械等专业的实际工程中已广泛应用。随着我国经济建设的需要，本课程在高等院校有关专业以及有关的工程部门中越来越多地受到重视，迫切要求开这门课程。但在目前的弹性力学教材中，例题和习题很少，特别是缺乏典型的范例。为了提高这门课程的教学质量，培养读者的分析问题和解决问题的能力，使初学者更便于理解和掌握弹性力学的基本概念、基本理论及基本方法，我们编写了这本习题解答。

本书共分十一章。我们从徐芝纶编《弹性力学简明教程》，《弹性力学》（上、下册）（人民教育出版社1979,1980版）；S.T.Timoshenko and J.N.Goodier: Theory of Elasticity (Third Edition,Mc-Graw-Hill BooK Company,1960)；以及清华大学土建系结构力学教研组编《弹性力学讲义》（1964年）中收集了100多个题目。根据初学者的特点和要求，在解题中力求做到步骤清楚、由浅入深循序渐进。另外对一些题目的解法作了一些探讨；对同一题目，按不同思路，不同方法来解答，以期帮助读者灵活运用所学知识，力求达到举一反三、融会贯通之目的。

本习题解答，是我们在1980年秋为北京市土木建筑学会部分会员举办的《弹性力学》学习班编写的讲义的基础上，作了修改、充实而成的。

本书可供高等工科院校土建、水利、机械等专业的学生、研究生以及力学教师和工程技术人员参考。

本书是由丁立祚、邵震豪合编，具体分工为一、二、三、四、五、六、七章由丁立祚编写，八、九、十、十一章由邵震豪编写，最后由丁立祚负责校核、定稿。

本书部分稿件承北京航空学院王俊奎教授、北京工业学院薛大为副教授、北方交通大学韩振宇副教授进行了认真、细致的审阅，提出了宝贵的修改意见。此外，并得到北京建筑工程学院侯玉珍同志大力协助，绘制了全部插图。在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，书中一定会有不妥和错误之处，敬请读者给予批评指正。

编　者　1981年6月

目　录

采用的符号

x、y, z——直角坐标

r, θ——极坐标

r, θ, z——柱坐标

R, θ, ψ——球坐标

ξ——无因次的横坐标

S——弧长

R——半径

ρ——曲率半径

V——体积

t——厚度

a, b, l, h——尺寸

I——截面的惯性矩

S——截面的静矩

A——截面面积

D——板的抗弯刚度

P——集中荷载

q——分布荷载

γ——容重或比重

ρ——密度

X, Y, Z——体力的直角坐标分量

$\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$——面力的直角坐标分量

M——弯矩

Q——剪力

N——轴向力

S——环向力

T——拉力

H——推力

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$——直角坐标中的正应力

σ_r, σ_θ——极坐标中的正应力

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$——柱坐标中的正应力

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$——直角坐标中的剪应力

$\tau_{r\theta}$——极坐标中的剪应力

τ_{rz}——柱坐标中的剪应力

u, v, w——直角坐标中的位移分量

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$——直角坐标中的正应变分量

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$——极坐标中的正应变分量

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$——柱坐标中的正应变分量

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$——直角坐标中的剪应变分量

$\gamma_{r\theta}$——极坐标中的剪应变分量

γ_{rz}——柱坐标中的剪应变分量

θ——体积应变，单位长度扭转角

Θ——应力第一不变量

α——热膨胀系数

T——温度

φ——应力函数

f、F、φ、ϕ——函数

a、b、c、d… A、B、C, D…——待定系数，积分常数

$\varkappa$——曲率或扭率

E——弹性模量

$G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$——剪切模量

μ——泊松系数

l、m、n——外法线方向余弦

ξ, η——平面曲线坐标分量

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$——主应力

∇^2、∇^4——拉普拉斯算子

$a=\dfrac{n\pi}{l}$——三角级数的系数

α、β、γ、k、l——系数

U——形变势能

V——外力势能

δ——变分记号

$$\{p\}=\begin{Bmatrix}X\\Y\\Z\end{Bmatrix}=[x\,y\,z]^T$$——体力分量用列阵$\{p\}$或用[ ]行阵，上标T表示矩阵的转置。

同样有：

$$\{\overline{p}\}=\begin{Bmatrix}\overline{X}\\\overline{Y}\\\overline{Z}\end{Bmatrix}=[\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}]^T$$

$$\{\sigma\}=[\sigma_x\sigma_y\sigma_z\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}]^T$$

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}]^T$$

$$\{f\}=[u\quad v\quad w]^T$$

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & & \text{对称}\\ \mu & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}$$——弹性矩阵

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}U_i\\V_i\\U_j\\V_j\\\vdots\end{Bmatrix}$$——外力沿坐标轴的分量用列阵表示

$$\{\delta^*\}=\begin{Bmatrix}u_i^*\\v_i^*\\u_j^*\\v_j^*\\\vdots\end{Bmatrix}$$——虚位移分量$u_i^*v_i^*u_j^*v_j^*\cdots$用列阵表示

$\{F\}^e$——一个单元上的结点力用列阵表示

$\{\delta\}^e$——一个单元上的结点位移用列阵表示

$[k]^e$——单元的劲度矩阵

$[K]$——结构的整体劲度矩阵

$\{R\}$——结构的整体结点荷载列阵

$[N]$——形函数矩阵

$[B]$——几何矩阵

$[S]$——应力转换矩阵

第一章 平面问题的基本理论

习题1.1 试证明当六面体的各面上所受的应力不是均匀分布(如图1.1(*a*) 所示) 时，其平衡微分方程仍为

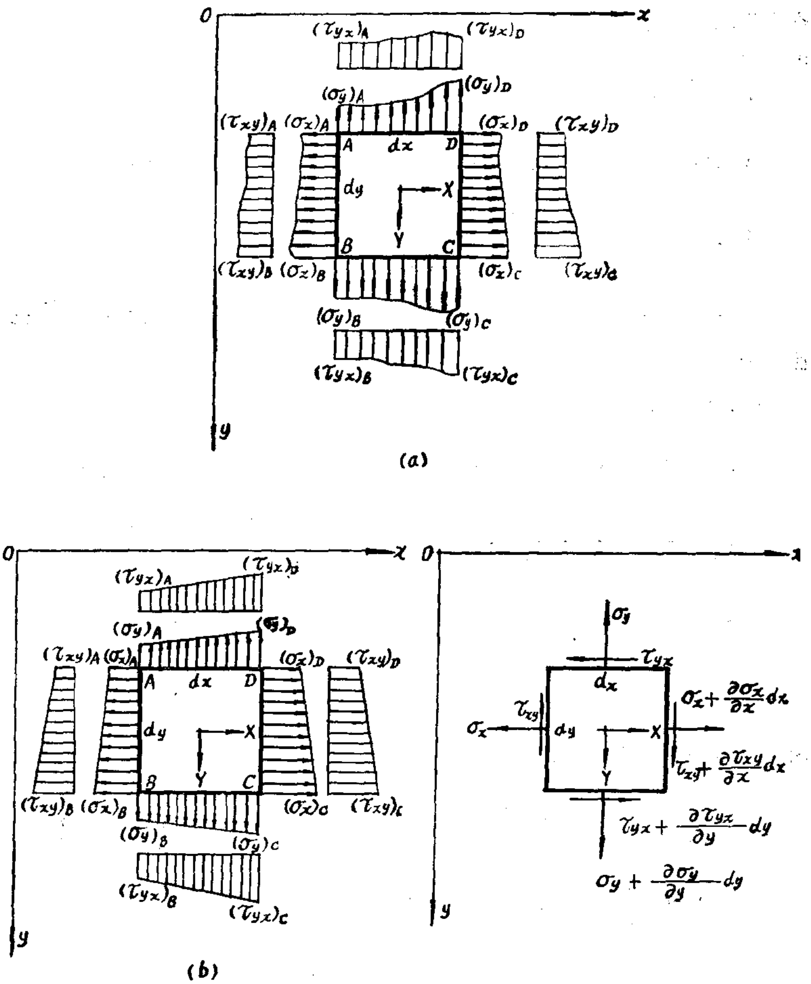

图 1.1

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0$$

证　法 1 见图1.1(b)。

由于在单元体$ABCD$中dx及dy都是微量，所以我们假设在单元体各面上所受的应力忽略了两阶以上的高阶微量看作是线性分布的，如图1.1(b)所示。并设单元体厚度为t。

各点的应力值为：

正应力

$$(\sigma_x)_A=\sigma_x \qquad (\sigma_y)_A=\sigma_y$$

$$(\sigma_x)_B=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy \qquad (\sigma_y)_D=\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}dx$$

$$(\sigma_x)_D=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx \qquad (\sigma_y)_B=\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$$

$$(\sigma_x)_C=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy \qquad (\sigma_y)_C=\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$$

剪应力

$$(\tau_{xy})_A=\tau_{xy} \qquad (\tau_{yx})_A=\tau_{yx}$$

$$(\tau_{xy})_B=\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy \qquad (\tau_{yx})_D=\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx$$

$$(\tau_{xy})_D=\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx \qquad (\tau_{yx})_B=\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$$

$$(\tau_{xy})_C=\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy \qquad (\tau_{yx})_C=\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$$

由单元体的平衡条件$\Sigma F_x=0$得

$$\left\{-\frac{1}{2}\left[\sigma_x+\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\right)\right]t\right\}dy+\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\right)\right]t\right\}dy$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\left[\tau_{yx}+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx\right)\right]t\right\}dx$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)\right]t\right\}dx$$

$$+Xtdxdy=0$$

展开约简以后，两边除以$tdxdy$，得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0$$

同样，由平衡方程$\Sigma F_y=0$可得一个相似的微分方程。即

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0$$

证毕。

证 法 2

如图1.1（a）所示，在单元体各面上所受的应力非均匀分布。则可用积分求和来解。

由单元体的平衡条件$\Sigma F_x=0$得

$$-\int_y^{y+dy}\sigma_x dy+\int_y^{y+dy}\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy$$

$$+\int_x^{x+dx}\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx-\int_x^{x+dx}\tau_{yx}dx$$

$$+Xdxdy=0$$

上式两边除以$dxdy$得

$$\frac{1}{dy}\int_y^{y+dy}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dy+\frac{1}{dx}\int_x^{x+dx}\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dx+X=0$$

根据积分中值定理："设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ是D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η)使得下式成立$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$。

则有 $$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0$$

同理有 $$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0$$

可见上述平衡微分方程成立。证毕。

证 法 3

在平衡的弹性体中任取一单元体，设六面体体积为V，界面为S，在体力及面力作用下处于平衡。并在单元体各面上所受的应力不是均匀分布，如图1.1(a)所示，用积分求和来求证。

由平衡条件$\Sigma F_x=0$得

$$\iiint_V X\,dx\,dy\,dz+\iint_S \overline{X}\,dS=0$$

因为所研究的问题为平面问题，则与z轴无关即可将上式简化为

$$\iint_V X\,dx\,dy+\int_S \overline{X}\,dS=0 \tag{1}$$

由柯西（Cauchy）方程则有

$$\overline{X}=l\sigma_x+m\tau_{yx}$$

$$\overline{Y}=l\tau_{xy}+m\sigma_y$$ 代入（1）式得

$$\iint_V X\,dx\,dy+\int_S (l\sigma_x+m\tau_{yx})\,dS=0 \tag{2}$$

利用场论中奥-高氏公式将上式中第二项线积分化为二重积分

则有

$$\iint_V X\,dx\,dy+\iint_V\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\right)dx\,dy=0 \tag{8}$$

即有

$$\iint_V\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X\right)dx\,dy=0 \tag{4}$$

由于连续函数的性质及V的任意性，可见弹性体中任意一点必有

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0$$

同理

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0$$

证毕

讨　论　如果把图1.1（b）的应力状态简化为图1.1（c）的应力状态，即假设各面上的平均应力分别作用于各面的中点。见图1.1(c)。在推导平衡微分方程时其结果是一样的。

习　题1.2　试证明在图1.2中，y方向的位移v所引起的线段PA的伸缩是高阶微量。

证　法1

我们研究的问题只限于微小变形的情况。

设α为微量，如果忽略二阶以上微量，则有

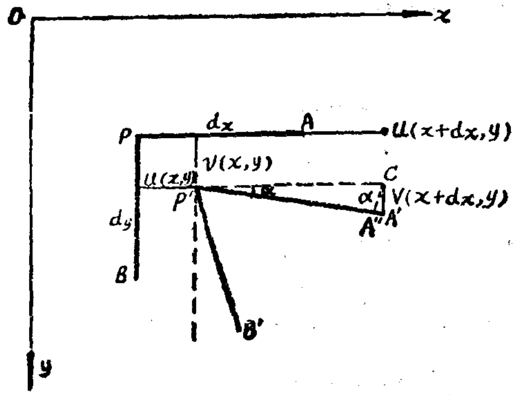

图 1.2

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{tg}\,\alpha=\sin\alpha=\alpha \text{为一阶微量} \\ \cos\alpha=1\text{为有限量}\end{cases}$$

在图中 $\overline{A'A''}$ 就是v所引起的PA线段的伸缩长度。

$\because \Delta P'CA' \backsim \Delta CA''A'$

$$\therefore \quad \frac{\overline{A''A'}}{\overline{CA'}}=\frac{\overline{CA''}}{\overline{P'C}}$$

又因为α很小，则$\overline{A''C}=\overline{A'C}$

$$\therefore \qquad \overline{A''A'}=\overline{CA'}\cdot\frac{\overline{CA'}}{\overline{P'C}} \qquad (1)$$

由于 $\overline{CA'}=\dfrac{\partial v}{\partial x}dx$， $\overline{P'C}=dx$代入（1）式

$$\therefore \qquad \overline{A''A'}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx$$

故对于ε_x而言v引起的影响项为二阶微量当忽略后则有

$$\varepsilon_x=\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \text{证毕。}$$

证 法2

从形变的定义有$\varepsilon_x=\dfrac{\overline{P'A'}-\overline{P'C}}{\overline{P'C}}$

$$=\frac{\sqrt{\left(dx+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2}-dx}{dx}$$

因为$\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2$是$v$所引起的二阶微量忽略后为

$$\varepsilon_x=\frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx-dx}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

证毕。

证　法3

由已知条件P'，A'点的坐标可分别写为：

$$P'[x+u(x,y),y+v(x,y)]$$

$$A'[x+dx+u(x+dx,y),y+v(x+dx,y)].$$

$$\overline{P'A'}=\left[\left(dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2dx^2\right]^{1/2}$$

$$\varepsilon_x=\frac{\overline{P'A'}-\overline{PA}}{\overline{PA}}=\frac{\left[1+2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}dx-dx}{dx}$$

$$=\left[1+2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}-1$$

利用牛顿二项式展开则有

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\cdots$$

而V在式中恰为二阶微量的影响。上式为几何非线性方程，若略去二阶微量则变为线性方程为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

证毕。

习　题1.3 试利用边界条件证明，当变截面杆受轴向拉伸时，如图1.3所示。除了正应力σ_y外，还有剪应力τ_{xy}和正应力σ_x。试确定边界上σ_y与τ_{xy}及σ_x的关系。

解　法 由于变截面杆的侧面无荷载。任取一单元体A为研究对象。根据弹性体边界上各点的应力分量与面力分量之间的关系则有

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}&=l\sigma_x+m\tau_{yx}=0\\ \overline{Y}&=l\tau_{xy}+m\sigma_y=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

其中方向余弦分别为：

$$l=\cos(N,x)=-\cos\alpha,\qquad m=\cos(N,y)=\sin\alpha$$

代（1）式得

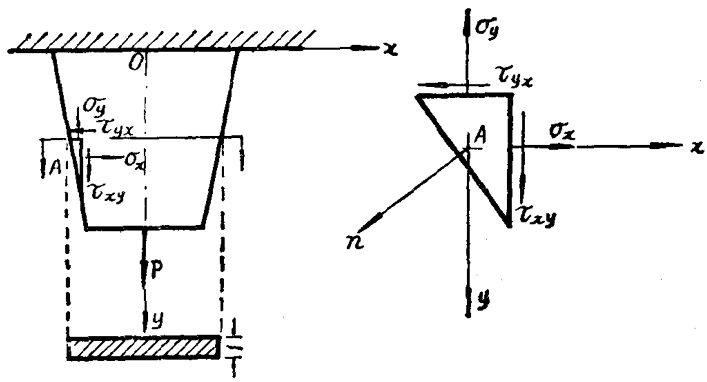

图 1.3

$$\left.\begin{array}{l}-\sigma_x\cos\alpha+\tau_{yx}\sin\alpha=0\\ \sigma_y\sin\alpha-\tau_{xy}\cos\alpha=0\end{array}\right\}\qquad(2)$$

因此，由（2）式可得如下关系式

$$\sigma_x=\sigma_y\mathrm{tg}^2\alpha$$

$$\tau_{xy}=\sigma_y\mathrm{tg}\alpha,$$

习　题1.4 设有任意形状的等厚度薄板，体力可以不计，在全部边界上（包括孔口边界上）受有均匀压力q。试证$\sigma_x=\sigma_y=-q$及$\tau_{xy}=0$能满足平衡微分方程，相容方程和边界条件，因而就是正确的解答。

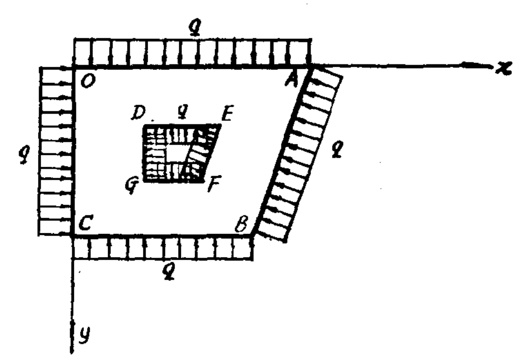

图 1.4（a）

解　法1

将$\sigma_x=\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$代入平衡微分方程，相容方程，显然是满足的。

应力边界条件：

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x+m\tau_{yx}=\overline{X} \\ m\sigma_y+l\tau_{xy}=\overline{Y} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在OA边界上，$l=0$　$m=-1$

故得$-\tau_{yx}=\overline{X}$及$-\sigma_y=\overline{Y}$，　（2）

将$\sigma_x=\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$代入（2）式则

$\overline{X}=0$，　$\overline{Y}=q$　再代入（1）式显然是满足的。

在OC边界上，$l=-1$，$m=0$

故得　$-\sigma_x=\overline{X}$，　及$-\tau_{xy}=\overline{Y}$，　（3）

将$\sigma_x=\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$　代入（3）式则

$\overline{X}=q$，　$\overline{Y}=0$　再代入（1）式显然满足。

其它边界CB，DE，DG及GF的验证从略……

下面检验AB边

$\overline{X}=-lq$

$\overline{Y}=-mq$　代入（1）式

$l(-q)+m(0)=-lq$

$m(-q)+l(0)=-mq$　　显然也是满足的。

在EF边界上

$$\overline{X}=lq,\quad \overline{Y}=mq$$

将$\sigma_x=\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$　代入（1）式得

$-l(-q)+m(0)=lq$

$-m(-q)+l(0)=mq$　　亦满足

因而$\sigma_x=\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$是所提问题的正确解答。

解　法2　写出下列方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0 \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x+m\tau_{yx}=\overline{X} \\ m\sigma_y+l\tau_{xy}=\overline{Y} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

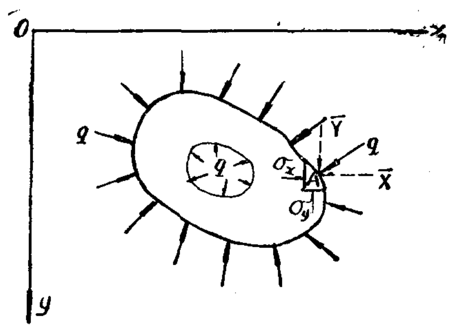

图 1.4 (b)

由（2）式展开则有

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=0$$

由题可知

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}=0 \qquad \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=0$$

代入（1）、（2）式显然是满足的。

对于微小的三角板A，dx，dy都是正值，斜边上的方向余弦$l=\cos(N.x)$ $m=\cos(N.y)$.将$\sigma_x=\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$，代入（3）式则有

$$\sigma_x\cos(N.x)=-q\cos(N.x) \qquad \therefore \sigma_x=-q$$

$$\sigma_y\cos(N.y)=-q\cos(N.y) \qquad \sigma_y=-q$$

所以 $\sigma_x=\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$ 是上图的正确解答。但是应该保证位移单值条件。

习　题1.5　设有矩形截面的悬臂梁，在自由端受有集中荷载P，如图1.5所示。体力可以不计。试根据材料力学公式，写出弯曲应力σ_x和剪应力τ_{xy}的表达式。并取挤压应力$\sigma_y=0$，然后证明，这些表达式满足平衡微分方程和相容方程，然后说明，这些表达式是否就表示正确的解答。

解　法　按照材料力学公式

$$\sigma_x=\frac{My}{I}=\frac{Pxy}{I}$$