面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

最优化方法

施光燕　董加礼

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

最优化方法

施光燕　董加礼

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果,是面向21世纪课程教材.本书内容包括优化模型、线性规划、约束和无约束非线性规划、多目标规划和离散型优化问题,包含了工程技术人员所需要的最基本的优化方法.此外,还以简单的方式介绍了动态规划和遗传算法.本书是模块式结构,可以任意取舍、本书对各算法均配有框图,并有上机实习题和MATLAB优化工具箱的使用介绍.

本书可作为高等学校工科各专业的教科书,也可供理科专业选用和社会读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法/施光燕,董加礼.—北京:高等教育出版社,1999
ISBN 7-04-007707-8

Ⅰ.最… Ⅱ.①施… ②董… Ⅲ.最优化-数学方法
Ⅳ.0224

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第30628号

最优化方法
施光燕 董加礼

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010—64054588	传　　真	010—64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	1999年9月第1版
印　　张	10.75	印　　次	1999年9月第1次印刷
字　　数	190 000	定　　价	11.90元

前　言

在国民经济各部门和科学技术的各个领域中普遍存在着最优化问题.最优化问题的解就是从所有可能的方案中选择出最合理的、以达到最优目标的方案——最优方案,搜寻最优方案的方法就是最优化方法.随着计算机科学的发展和应用,应用最优化方法解决问题的领域不断扩大,解决问题的深度不断深化,最优化的理论和方法也不断地得到普及和发展.最优化方法的基本知识已成为新的工程技术、管理人员所必备的基础知识.因此,最优化方法已是目前各院校普遍开设的一门数学课程.本书可作为各专业本科学生以及研究生所用的教材,学时可控制在32～48学时,也可作为高等学校教师、工程技术人员和科研人员自学参考用书.

本书是作为教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"立项项目《工科数学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践》的研究成果之一.本书在编写时力求实现课题组提出的"以方法为主,不追求理论的系统性和完整性,方法要注意实用性和先进性以及结构模块化便于教学"等要求,具体有如下特点:

1. 本书以工科学生所具备的数学基础知识为起点,尽量采用从几何直观入手讲清方法思路,适当进行理论证明的方法,例如线性规划单纯形法的实质和非线性规划的最优性条件等,既避开纯形式的理论推演,却又能使学生理解、掌握方法的实质.

2. 努力体现实用性,我们认识到工科最优化方法课程应该突出两个方面,一是如何将一个实际问题提炼成最优化问题;二是如何求解,最后要落实到一个"用"字上来.第一方面的问题仅依靠本课程是不可能完全解决的,但本书尽量举一些实际例子使读者从中能得到领悟,同时又选编了一些上机实习和应用的案例.关于第二方面的问题,我们则对教材的内容进行精选,本书容纳了最优化方法中几个最主要的分支,而对每个分支却选择应用广泛、通用性大的方法作为重点讲授,而这些却又正包含了工程技术人员所需要的最基本的优化方法.本书采纳了专家的审稿意见,将这些方法计算机化,给出了算法的框图.

3. 在注意实用的同时又注意思维的启迪.本书不是单纯地把各个方法端出来,而是尽量讲清思路、各种方法之间的联系和关于方法发展历程的体会,使读者能够联想导出另外的方法或针对实际问题将各种方法结合使用,在本书中特意选编这种类型的习题.另外,本书对一些非主要内容采用分析"示例"的方法以达到介绍"入门",或让其在"门外看一看"的办法,使各类读者根据需要能顺着各

种思路继续学习,如对动态规划、图论中一些问题的处理.本书还介绍了近年所发展的遗传算法等.

4. 本书的叙述尽量简明,我们认为这样既可使教师有很多发挥的余地,又使读者易于抓住重点.

5. 本书对目前流行的MATLAB语言工具箱中的优化工具箱的使用进行了介绍.

本书是几经教学试点、修改而成的,参加本书教学试点的除编者外,还有大连理工大学的邹春苓副教授,吉林工业大学的黄万风、张士科、方沛辰、刘庆怀、孙喜梅、褚铭、姚国风各位副教授,他们对本书的完成起了重要的作用,编者借此机会对他们表示衷心的感谢.我们特别感谢主审人谭泽光教授和傅万涛教授,他们提出了许多宝贵的意见和建议,对提高本书的质量起了十分重要的作用.

本书得到原国家教委教学改革基金的资助,还得到大连理工大学教务处和吉林工业大学教务处的关怀和资助,借此机会向他们一并表示感谢.

限于编者的水平,不妥与错误之处在所难免,殷切期望专家、同行和广大读者批评指正.

编者

1999年3月

责任编辑 杨芝馨
封面设计 张　楠
责任绘图 李维平
版式设计 周顺银
责任校对 俞声佳
责任印制 杨　明

目　录

第一章 概 论

随着生产、经济、技术的发展,工程技术、管理人员在实际工作中,肯定会面临这样的一类问题:工程设计中怎样选择参数,使得设计既满足要求又能降低成本;资源分配中,怎样的分配方案既能满足各方面的基本要求,又能获得好的经济效益;生产计划安排中,选择怎样的计划方案才能提高产值和利润;原料配比问题中,怎样确定各种成分的比例才能提高质量、降低成本;城建规划中,怎样安排工厂、机关、学校、商店、医院、住宅和其他单位的合理布局,才能方便群众,有利于城市各行各业的发展;在各个领域中,诸如此类问题,不胜枚举.这一类问题的共同特点,就是要在所有可能的方案中,选出最合理的,达到事先规定的最优目标的方案,这个方案可称为**最优方案**,寻找最优方案的方法称为**最优化方法**.

最优化问题是个古老的课题.早在 17 世纪已经提出(我们在高等数学课程中亦已见到)极值问题.到本世纪 40 年代以来,由于生产和科学研究突飞猛进发展,特别是电子计算机日益广泛应用,使最优化问题不仅成为一种迫切需要,而且有了求解的有力工具.最优化理论和算法也就迅速发展起来,形成一个新的学科,并在实际应用中发挥越来越大的作用.因此,有关最优化方法的基本知识已成为新的工程技术、管理人员所必备的基础知识之一.本教材就是以此为目标,向工科、管理各专业的学生介绍最典型的优化模型及其应用背景、相关的优化理论和最常用的算法.在内容的编写上,我们并不想把众多的具体算法一一介绍给读者,而只是讲清在优化计算中所要考虑的问题、要注意的地方、解决问题的主要思路和主要算法构造的出发点.

§1.1 模 型 举 例

当量化地求解一个实际的最优化问题时,首先要把这个问题转化为一个数学问题,即建立数学模型.这是非常重要的一环.要建立一个合适的数学模型,必须对实际问题有很好的了解,经过分析、研究抓住其主要因素,理清其相互的联系,然后综合利用有关学科的知识和数学知识才能完成.下面仅举几个专业性不强的简单例子,以便对建模过程中数学处理上的一般步骤和本教材所论方法的实际应用背景有所了解.

例 1.1 配棉问题

棉纺厂的主要原料是棉花,一般要占总成本的 70% 左右.棉花的品种、等级不同,价格也不同.因此,若采用品种好、等级高、价格贵的棉花来纺成一种质量要求一般的棉纱,势必提高成本.所谓配棉问题,就是要根据棉纱的质量指标,采用各种价格不同的棉花,按一定比例配制成纱,使其既达到质量指标,又使总成本最低.

棉纱的质量指标一般由棉结和品质指标来决定.这两项指标都可用数量形式来表示.一般来说,棉结粒数越少越好,品质指标越大越好.但在具体生产过程中,它受棉花品种的现有量、生产技术、设备条件等多方面的制约.

一个年纺纱能力为 15 000 锭的小厂在采用最优化方法配棉前,某一种产品 32D 纯绵纱的棉花配比、质量指标及单价如下:

原料品名	单价 元/t	混合比 %	棉结粒	品质指标	混棉单价 元/t
国棉 131	8 400	25	60	3 800	2 100
国棉 229	7 500	35	65	3 500	2 625
国棉 327	6 700	40	80	2 500	2 680
平均合计		100	70	3 175	7 405

有关部门对 32D 纯棉纱规定的质量指标为棉结不多于 70 粒,品质指标不小于 2 900.

为运用最优化方法解决该品种的配棉问题,我们来建立其数学模型.

首先,根据问题的需要设置变量:设 x_1,x_2,x_3 分别为国棉 131,229,327 的棉花配比.然后用所设置的变量把所追求的目标和所受的约束,用数学语言表述出来,就得到该问题的数学模型.

本例的目标是混棉单价最小,用 x_1,x_2,x_3 即可表为

$$\min z = (8\,400x_1 + 7\,500x_2 + 6\,700x_3)$$

本例关于 32D 纯棉纱的质量指标要求可作为约束条件表出,即有

$$60x_1 + 65x_2 + 80x_3 \leqslant 70$$

$$3\,800x_1 + 3\,500x_2 + 2\,500x_3 \geqslant 2\,900$$

再由变量 x_1,x_2,x_3 的实际意义,它们都应是一个百分数,而且它们之和应为 100%,因此也应把它们作为约束条件提出

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1,x_2,x_3 \geqslant 0$$

所以,32D纯棉纱配棉问题的数学模型为:

$$\min z = (8\,400x_1 + 7\,500x_2 + 6\,700x_3)$$

$$\text{s.t.(满足于)}\ 60x_1 + 65x_2 + 80x_3 \leqslant 70 \tag{1.1}$$

$$3\,800x_1 + 3\,500x_2 + 2\,500x_3 \geqslant 2\,900$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

运用第二章的方法可解得:$x_1=0$, $x_2=0.667$, $x_3=0.333$,混棉单价降低为7 233元/t.

例1.2 资金使用问题

设有400万元资金,要求4年内使用完,若在一年内使用资金 x 万元,则可得到效益$\sqrt{x}$万元(效益不能再使用),当年不用的资金可存入银行,年利率为10%.试制订出资金的使用规划,以使4年效益之总和为最大.

很明显,不同的使用方案,所取得效益之总和是不同的.如第一年就把400万元全部用完,则效益总和为$\sqrt{400}=20.0$(万元);若前三年均不用而存入银行,则第四年把本息和:$400\times(1.1)^3=532.4$(万元)全部用完,则效益总和为$\sqrt{532.4}=23.07$(万元),比第一方案效益大3万元多.但若应用最优化方法,可得到如下的最优方案:

万元

	第一年	第二年	第三年	第四年
现有资金	400	345.2	265.1	152.8
使用金额	86.2	104.2	126.2	152.8

效益总和为$\sqrt{86.2}+\sqrt{104.2}+\sqrt{126.2}+\sqrt{152.8}=43.1$(万元),是第一方案效益总和的两倍多.这个例子非常生动地反映出进行定量的优化计算的作用.所以,一些工业界人士称最优化方法为不需增加投入而能增加产出的手段.

为了得出上述最优方案,首先要把该问题转化为数学问题,即建立它的数学模型.我们还是首先根据问题所需要的回答,设变量 $x_i(i=1,2,3,4)$分别表示第 i 年所使用的资金数.于是,所追求的目标——4年的效益总和最大,即可表为

$$\max z = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}$$

所受到的约束即为每年的使用数额既不能为负数又不能超过当年资金拥有数.具体地即为

第一年 $0\leqslant x_1\leqslant 400$

第二年 $0\leqslant x_2\leqslant(400-x_1)\times 1.1$(第一年未使用资金存入银行一年后的本利和)

第三年 $0\leqslant x_3\leqslant[(400-x_1)\times 1.1-x_2]\times 1.1$

第四年 $0\leqslant x_4\leqslant\{[(400-x_1)\times 1.1-x_2]\times 1.1-x_3\}\times 1.1$

资金使用问题的数学模型为:

$$
\begin{aligned}
&\max z=(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4})\\
\text{s.t.}\quad & x_1\leqslant 400\\
& 1.1x_1+x_2\leqslant 440\\
& 1.21x_1+1.1x_2+x_3\leqslant 484\\
& 1.331x_1+1.21x_2+1.1x_3+x_4\leqslant 532.4\\
& x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

例 1.3 汽轮机叶片排序问题

1977 年某机械研究所在汽轮机转子叶片安装设计中,遇到这样一个环形排序问题:由于考虑到共振的因素,一百多个叶片的质量及几何形状不尽相同,转动时产生的惯性离心力也就存在差异;如何确定它们的安装位置(排列顺序),使诸离心力的合力为最小.由于叶片数量较多,经验方法不能奏效,设计部门希望有一个计算机算法.

今设有 n 个叶片,第 j 个叶片在转动时产生的惯性离心力的数值(模)为 $r_j(1\leqslant j\leqslant n)$.转子的一周被分为 n 等份,安装位置 k 用辐角 $\varphi_k=\dfrac{2k\pi}{n}(1\leqslant k\leqslant n)$表示.如果将第 j 个叶片安装在位置 k 上,它产生的离心力(向量)可用复数表示:

$$f(j,k)=r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}=r_j(\cos\varphi_k+\mathrm{i}\sin\varphi_k)$$

设叶片的排序方案用排列 $\pi(j_1,j_2,\cdots,j_n)$来表示,即叶片 j_1 排在第一位,叶片 j_2 排在第二位,…,叶片 j_n 排在第 n 位(与第一位相邻).那末合力就是

$$F(\pi)=\sum_{k=1}^{n}f(j_k,k)=\sum_{k=1}^{n}r_{j_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$$

问题是求排列 π,使$|F(\pi)|$为最小.

于是,设变量 x_{jk}, $j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,n$,其意义为

$$x_{jk}=\begin{cases}1, & \text{表示叶片 } j \text{ 被排在第 } k \text{ 位}\\ 0, & \text{表示叶片 } j \text{ 未被排在第 } k \text{ 位}\end{cases}$$

这样,合力可表示为:

$$F=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}r_j e^{i\varphi_k}x_{jk}$$

而

$$|F|^2=\langle F,F\rangle=\langle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}r_j e^{i\varphi_k}x_{jk},\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}r_p e^{i\varphi_q}x_{pq}\rangle$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}r_j r_p\cos(\varphi_k-\varphi_q)x_{jk}x_{pq}$$

于是,问题的目标可以表示为 $\min|F|^2$,而约束条件为:

每个叶片只能安装在一个位置上,即

$$\sum_{k=1}^{n}x_{jk}=1,\quad j=1,2,\cdots,n$$

且每个位置只能安装一个叶片,即

$$\sum_{j=1}^{n}x_{jk}=1,\quad k=1,2,\cdots,n$$

所以,汽轮机叶片排序问题的数学模型为:

$$\begin{aligned}\min|F|^2&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}r_j r_p\cos(\varphi_k-\varphi_q)x_{jk}x_{pq}\\ \text{s.t.}\ &\sum_{k=1}^{n}x_{jk}=1,\qquad j=1,2,\cdots,n\\ &\sum_{j=1}^{n}x_{jk}=1,\qquad k=1,2,\cdots,n\\ &x_{jk}=0\text{ 或 }1,\qquad j,k=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{1.3}$$

例 1.4 投资的收益和风险(1998 年全国大学生建模竞赛题)

市场上有几种资产(如股票、债券、…)$S_i(i=1,\cdots,n)$供投资者选择,某公司有数额为 M 的一笔相当大资金可用作一个时期的投资.公司财务分析人员对几种资产进行了评估,估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i,并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i.考虑到投资越分散,总的风险越小,公司决定,当用这笔资金购买若干种资产时,总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量.

购买 S_i 要付交易费,费率为 p_i,并且当购买不超过给定值 u_i 时,交易费按购买 u_i 计算(不买当然无须付费).另外,假定同期存款利率是 $r_0(r_0=5\%)$,且既无交易费又无风险.

已知 $n=4$ 时的相关数据如下:

S_i	r_i %	q_i %	p_i %	u_i 元
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案,即用给定的资金 M,有选择地购买若干种资产或存银行生息,使净收益尽可能大,而总体风险尽可能小.

设变量 $x_i(i=0,1,2,3,4)$分别表示存入银行和购买 S_i 的金额,$y_j=0$ 表示不买 S_j,$y_j=1(j=1,2,3,4)$表示买 S_j.目标有两个

第一个目标 $\max z_1 = \sum_{i=0}^{4} r_i x_i - \sum_{i=1}^{4} p_i y_i \max\{x_i, u_i\}$

第二个目标 $\min z_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\{q_i x_i\}$

约束是总资金为 M,$\sum_{i=0}^{4} x_i \leqslant M$ 和 $x_i \geqslant 0$,以及 x_i 和 y_i 之间的联系.

最后,投资的收益和风险的数学模型为:

$$
\begin{aligned}
&\max z_1 = \sum_{i=0}^{4} r_i x_i - \sum_{i=1}^{4} p_i y_i \max\{x_i, u_i\} \\
&\min z_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\{q_i x_i\} \\
&\text{s.t.}\ \sum_{i=0}^{4} x_i \leqslant M \\
&\qquad x_i \geqslant 0,\quad i = 0,1,2,3,4 \\
&\qquad x_j \leqslant M y_j,\ y_j = 0 \text{ 或 } 1, j = 1,2,3,4
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

例 1.5 管路铺设问题

设自来水公司要为四个新居民区供水,已知自来水公司和四个居民区的位置、可供铺设管线的地方及距离,现要选择一个管线总长度最短的铺设方案.

这个问题的条件,很自然能用图 1.1 表示出来,其中点 V_0 表示自来水公司,V_1, V_2, V_3, V_4 分别表示四个居民区,各条边分别表示可供铺设管线的位置,边上的数字(称为权数)表示相应的距离.而这个问题就是要从边集中找出一个子集使达到既能使四个居民区 V_1, V_2, V_3, V_4 都通上水,又使所选边的权数总和尽量小.

我们再来进一步分析所提的两个要求.为要实现第一个目标,即使四个居民

区都能上水,则只要选择的边的子集能使五个顶点之间都有路相通;为要实现第二个目标,则所选择的边的子集不应构成圈.如选择图1.2所示的方案,顾名思义即可知用黑线标出的三条边即是一个圈,很显然在这三个边中任意去掉一条边后仍然达到四个居民区都通上水的目标,因此这个方案显然不是最优方案,我们把各顶点间都有路相通且没有圈的图称为"树",大家想一下自然界的树就具有特点:各树叶之间都可沿着树枝相通,而所有树枝是不构成圈的.

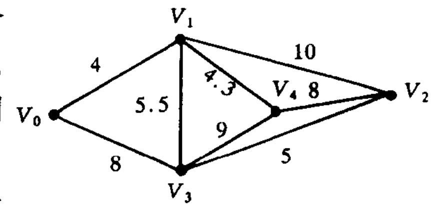

图 1.1

于是,这个管路铺设问题就是要在图1.1中找出一颗树,而且要使权数总和尽量小,这样的问题起名为求最小生成树.利用数学上的专有的术语,这个问题的数学模型就是要求图1.1的最小生成树.

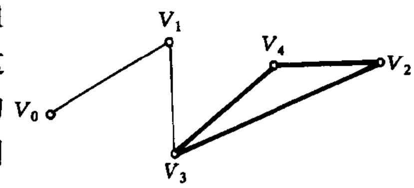

图 1.2

此例启示我们:最优化问题模型的形式是多样的,大家在实际工作中是可以不断创造和发展的,只要能够清晰、确切地表述出面对的问题,就是一个正确的数学模型.

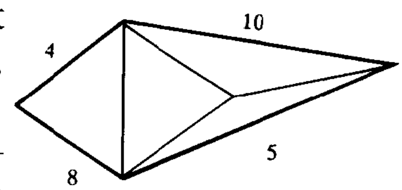

图 1.3

现介绍求最小生成树的一个简单求法——**破圈法**.即在所论图中任意找出一个圈,然后把构成这个圈的权数最大的一条边去掉,如此继续,一直到所剩的图中不存在圈为止,则所剩的图即为所求的最小生成树.如上例,我们先找图1.3中用黑线标出的圈,于是把权数最大为10的这条边去掉,以下类推,过程见图1.4.

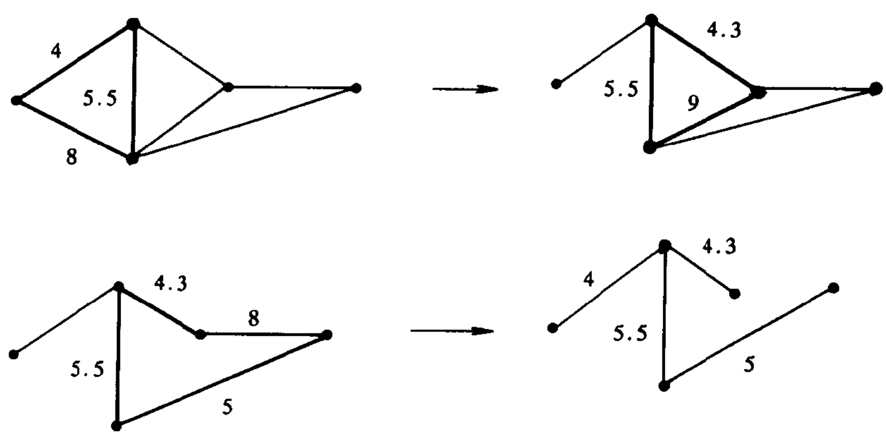

图 1.4

读者完全可以用逐边生成的办法构思出最小生成树的另外的求法——**加边法**.

例 1.6 运货汽车调度问题

在汽车运输工作中,合理组织行车路线,若能使里程利用率(重驶行程/总行程)提高 1% ,全年每 4 辆运输车就可降低成本 30 万元.我国的汽车运输企业采用的调度方式之一为:车队自己组织货源,统一调度后由本车队去完成.

假设某车队有 n 项待运业务,设第 i 项业务的装货点到卸货点的最短路长为 d_i,运量为 w_i(不妨设 w_i 为整数)($i=1,2,\cdots,n$).该车队的车场为 P,拥有 k 辆载重汽车,其载重量为 1,每辆汽车执行任务的路线是从车场出发,到第一个装货点装货,运送到第一个卸点卸货后再到每二个装点,直至最后一个卸点返回车场的闭路,其总行程通常控制在$[a,b]$之间.问如何安排车辆并确定每辆车的行驶路线,使得在完成 n 项托运业务的前提下,总空驶行程最小(假设该车队有足够多的车辆完成这些任务).

我们把该调度问题转化为一个网络优化问题.构造 n 个结点的有向网络如下(图 1.5 表示 $n=3$ 的情形):

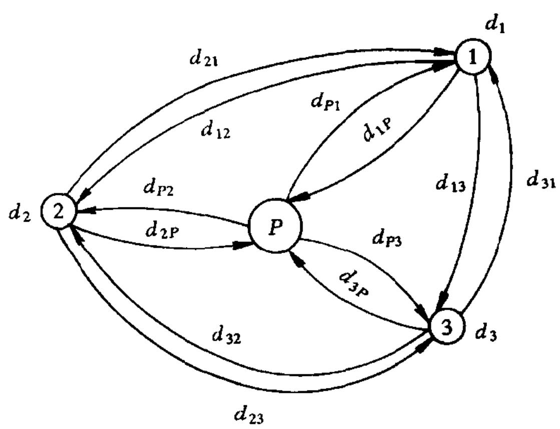

图 1.5

1. 用 n 个结点①,②,…,ⓝ分别代表 n 项业务;

2. 每个结点都有权 d_i($i=1,2,\cdots,n$),d_i表示第 i 项业务从装点到收点的最短路长;

3. 对任意 i,j($i,j\leqslant n$)都有一条从ⓘ到ⓙ的有向弧,其权为 d_{ij}表示第 i 项业务的卸点到第 j 项业务的装点间最短路长;

4. 用结点Ⓟ表示车场,Ⓟ与ⓘ和从ⓘ到Ⓟ的弧,分别具有权 d_{Pi}和 d_{iP},其中 d_{Pi}表示车场 P 到第 i 项业务装点的最短路长,d_{iP}表示第 i 项业务的卸点到车场的最短路长.