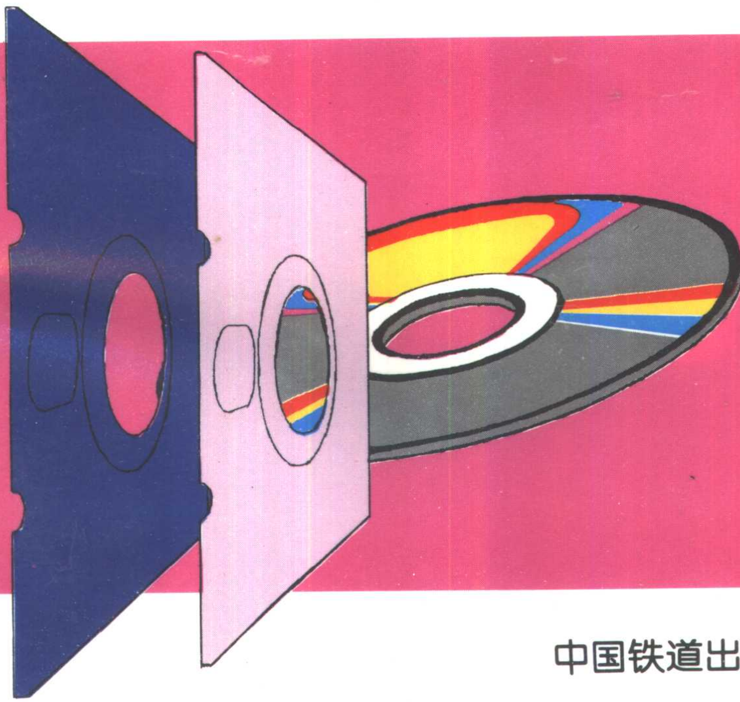
高等学校教学参考书

运筹学算法的计算机程序

兰州铁道学院 顾守淮 李引珍 编著



中国铁道出版社

高等学校教学参考书

运筹学算法的计算机程序

兰州铁道学院 顾守淮 李引珍 编著

兰州铁道学院 张忠辅 主审

中国铁道出版社

1997年·北京

（京）新登字 063 号

内 容 简 介

学习运筹学，将运筹学算法应用于解决实际问题，必须编写程序在计算机上计算。本书就是为适应这一要求编写的。全书共分九篇，三十二章，分别给出了线性规划、整数规划、图和网络、统筹网络、动态规划、决策方法、排序和排队问题等运筹学算法的数学模型、算法思想、编程要点，并配有程序举例以便学习参考。

本书可作为高等院校管理专业本科生及研究生用教材，也可供有关专业研究人员参考。

高等学校教学参考书

运筹学算法的计算机程序

兰州铁道学院 顾守淮 李引珍 编著

*

中国铁道出版社出版发行

（北京市宣武区右安门西街 8 号）

责任编辑 毕湘利 封面设计 马 利

北京市燕山联营印刷厂印

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：11.75 字数：259 千

1997 年 3 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数：1—2000 册

ISBN7-113-02479-3/U・690 定价：13.80 元

序

运筹学发源于军事、经济以及其它有关实际问题，现在应用已经十分广泛。

运筹学应用的关键是算法的确定与实现。国内外这方面的书籍和文献较多。本书作者根据自己多年的教学与研究的实践，编写了这本对读者进行运筹学研究具有参考价值和实用价值的书。这本书的出版将有助于运筹学的推广普及，有助于促进我国运筹学的教学、研究与应用的发展。

全国政协常委
中国科学院院士
国务院学位委员会委员
中国数学学会副理事长
国际模糊系统协会副主席
刘应明
1996.8.2

前　　言

一、有关运筹学算法的书籍和文献已有很多。读者在学习了这些算法后，若要将它们运用于实际问题，必需先建立问题的数学模型，再求解这个模型。作者推出本书的宗旨是为帮助读者突破这第二道关。一个问题的数学模型建立之后，算法便是关键。运筹学为很多典型的问题提供了有效的算法。什么是算法？简言之，一个算法就是有限个计算规则的有序集合。执行一个算法，就是将输入的信息有序地按照算法的规则加以处理，最终输出加工后的信息。运筹学算法和计算机算法，就基本概念而言都是一样的。但是运筹学的算法和求解该问题的计算机算法还不是一回事。计算机的算法最终要构成可逐条执行的计算机程序，而不仅是文字的或公式的描述。虽然现在有不少人在采用尽可能接近计算机语言的形式来描述一个算法，并受到欢迎，但这两者总还存在差别，不可能完全统一，毕竟一个算法写得完全像计算机程序那样，是不大容易看明白的。从运筹学算法到它的计算机算法（最终形式是计算机程序），还需要做不少的工作才能实现。不可能也没必要要求每个学习运筹学的人去为每个算法编写程序。当读者手中有了这本书后，在很多情况下就可轻松地直接使用书中所提供的程序解决自己的问题了。

读者阅读本书或使用所提供的程序，需要有运筹学的基础，就是说要系统地学习过运筹学。但本书为那些基础不强和运筹学接触不多的读者也作了考虑。我们在每一算法介绍

中都给出了该算法的“算法思想”。算法思想是这一算法的基本思路，为了使更多的读者能够接受，对算法的描述一般以文字叙述为主，辅以必要的数学公式；以将算法的原理阐述清楚为原则，公式、定理不作证明；力求深入浅出，易读易懂，学以致用。

如果读者学习本书的目的不仅是弄懂算法原理，使用提供的程序，而且还要更进一步结合自己所研究的实际问题编写程序，那么本书也将为您提供帮助。每个算法都附有一项“编程要点”，指明程序编写中的难点和特殊技巧。书中程序较多，涉及的编程技巧相当广。我们还在不少算法的应用中，让读者去做一些程序的完善工作，以作练习。相信读者在详细地阅读程序并完成指定的练习后，一定会有所收获。

二、本书主要编著了如下几个方面的算法：

1. 已广泛采用的有代表性的经典算法，如单纯形法。

2. 实用价值大的算法。

3. 计算效率较高的算法。

4. 适用于一些 NP 完全问题的较好的隐枚举算法、分枝定界算法或启发式算法。隐枚举算法、分枝定界法可得到最优解，但要求规模不能过大。我们选用的算法，可以解决一般规模的问题，例如一般 0-1 规划问题、巡回推销员问题等。这些算法具有一定的实用价值。某些启发式算法得到的虽是近似最优解，但从实用性考虑，亦有介绍之必要，例如统筹网络的压缩工期算法。

5. 一些特殊条件下的有效算法。如 0-1 规划算法中，除了适用于一般 0-1 规划的隐枚举算法外，本书还介绍了几种特殊的 0-1 规划算法，如集分割算法等。这些适用于特殊模型的算法，较一般算法计算效率高。只要实际应用问题属于这

样的特殊模型，我们就可采用相应的特殊算法。

三、在所列算法中，有一些为作者之研究成果，如有负边长的最短路径算法、铁路最短路径算法、中国邮路算法等。其它很多算法，作者也作了不少改进，如整数规划算法、动态规划算法、排队模拟算法等。所有程序都已在微机上运行通过。

四、为了增强程序的实用性，使程序能求解较大规模的问题，我们对所有算法的数据结构都作了细致的考虑。特别是网络流问题的网络结构，采用了模拟动态数据结构的形式，使内存空间得到了充分利用。此外，在 0-1 规划模型中，根据 0-1 变量只有两个值的特点，采用了位存储方式，不仅大大节约了空间，而且使这些变量的计算可运用基于位操作的逻辑运算，从而大大提高了计算效率。这些都是本书的特色。

五、本书除个别程序外，均采用 TURBO BASIC 语言编写。TURBO BASIC 语言是一种结构化程序设计语言，和其它结构化程序设计语言一样，可用来编写出结构清晰、易读易懂的模块式程序。也容易移植到其它语言中去或和其它语言混合编程。TURBO BASIC 的一个特点是 640KB 内存可全部使用，有利于开发有大量数据存取的程序。我们采用这一语言，主要是考虑 BASIC 语言普及程度极广，并且改进后的版本功能已相当齐全。个别难以用该语言实现的程序，采用了易懂的 TURBO PASCAL 语言编写。

六、本书每个程序原始数据的输入均采用在程序中设数据区，程序运行时从数据区读取的方式。数据区中的数据，一般都是应用举例中问题的数据，其含义很容易明白。采用这种数据读取方式，可使数据读入程序简单明了，并可节省篇幅。这种方式的缺点是每次应用程序解决一个问题时，都要

修改程序数据区。为避免这个修改，使程序一次编译后能长期使用，读者可采用从数据文件中读取数据的方式。可以参照数据区中存放数据的格式在文件中存放数据。

七、为了使程序易读，在算法的程序部分作了尽可能多的简明的中文注释，以指明模块功能、变量含义等。

虽然我们作了很多努力，希望把这本书写得更好一些，但囿于所知，漏误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

1996.4

目　　录

第一篇 线性规划

第一章 单纯形法

【数学模型】

$$\max/\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

满足 $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_1$

$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_2$

$\ldots$

$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_m$

$x_j \geqslant 0$，对一切 j

本章单纯形算法，将针对目标为求极小值且约束都转换为等式的线性规划问题。

【算法思路】

一、求最优解

1. 找出线性规划问题的初始基本可行解 x，列出初始单纯形表。单纯形表的特点是，解的变量对应的约束方程系数构成单位矩阵。

如有线性规划问题

$$\min \quad z = -40x_1 - 45x_2 - 24x_3$$

满足 $2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 100$

$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 120$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, 3$$

如果约束全部都是“$\leqslant$”型，那么松弛变量的约束系数恰构成单位矩阵，即松弛变量构成了基变量。如果表中没有单位矩阵，则可加入人工变量，以形成单位矩阵。但需保证在最优解中不包含任何人工变量。

其初始单纯形表为

	c_j		-40	-45	-24	0	0
c'	x'	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	100	2	3	1	1	0
0	x_5	120	3	3	2	0	1
	z_j		0	0	0	0	0
	c_j-z_j		-40	-45	-24	0	0

2. 判别 x 是否已达到最优。判断的准则是：如果还存在任一非基变量，将它引入基内，即令它取大于零的值，能使目标函数值有所改进，那么 x 就不是最优解。即对于求极小值问题，存在 x_j，有 $c_j-\sum\limits_{i=1}^{m} c_i' a_{i,j}<0$，则现行基本可行解 x 尚未达到最优。

式中 c_i' 为第 i 行基变量目标函数系数。

对于现行基本可行解，如果令非基变量 x_j 进入基，那末 $x_j=1$ 时第 i 行基变量的减少值就等于 $a_{i,j}$，所以检验数中第 j 项表示引入 $x_j=1$ 后目标函数的减少值。

3. 如果 x 未达到最优，则可用一非基变量换出一个基变量，得到一个新的基本可行解 x，并通过初等变换使单纯形表中的新的基变量的系数构成单位矩阵，然后再做新的一轮判别计算。计算将这样继续下去，直至达到最优。

4. 保证最优解中不包含人工变量的方法有两种：大 M 法和两阶段法。本程序采用的是两阶段法。第一阶段，构造

出一个新的目标函数来求解。对于求极小值问题，新目标函数仅包含人工变量，并令系数为1。如果原问题有最优解，这个阶段的最优解目标值为零，且不含人工变量，如不为零则原问题不可行。如果第一阶段得到不含人工变量最优解，则立即转入第二阶段，恢复原目标函数，开始新的迭代计算。

5. 既然 $x_j=1$ 时，第 i 行基变量的减少值为 $a_{i,j}$，因此，在迭代过程中，如果存在 x_j，有 $a_{i,j}\leqslant 0$，$i=1, 2, \ldots, m$，那末要将 x_j 引入基中，现行解中任何一个基变量的值都不会变为零，即不会退出现行基。此时，原问题的解无界，即无最优解。

二、灵敏度分析

在求解一个线性规划问题时，方程系数和常数项（a，b，c）当然是作为常数看待的。但实际上这些数据并不完全是确知的，建模者采用的是估计值。那么这时结果可靠吗？此外，如果我们在花了很大力气求解一个问题之后，有关数据发生了变化，是不是需要再计算一次呢？在这些情况下，就要求确定这些数据在什么范围变化时，问题的最优解保持不变（指最优解的基变量构成保持不变），从而不必为每一种可能的数据变动，都去进行一次从头至尾的迭代计算。程序给出了 b 和 c 的这种变动上、下界。

1. b 的灵敏度分析

当某个 b_i 发生变化时，将影响基变量的取值（增大或减小）。为保持基变量的构成，这种变化应以不致使任何一个基变量退出基为度。据此，可推导出以下计算公式：

如果 x_{n+i} 为松弛变量，则 b_i 的增加值

$$\Delta b_i \geqslant \max_k \frac{-b'_k}{a'_{k,n+i}}, \quad a'_{k,n+i}>0$$

$$\Delta b_i \leqslant \min_k \frac{-b_k'}{a_{k,n+i}'}, \quad a_{k,n+i}'<0$$

式中的 b_k'，$a_{k,n+i}'$均指最优单纯形表中的数据，n 为实在变量数（不包括松弛和负松弛变量）。

如果 x_{n+i}为负松弛变量，则 b_i的增加值

$$b_i \geqslant \max_k \frac{b_k'}{a_{k,n+i}'}, \quad a_{k,n+i}'<0$$

$$\Delta b_i \leqslant \min_k \frac{b_k'}{a_{k,n+i}'} \quad a_{k,n+i}'>0$$

对于等式约束，如将它分解为≥和≤两个约束，亦可求出其右端值的 b_i变动范围。

2. c 的灵敏度分析

目标方程的某个系数 c_j发生变化时，对现行基变量的影响可分两种情况讨论：

a. c_j对应的基变量是非基变量。

此时，对于求极大值的线性规划问题，c_j减少，不会引起基的变动；c_j增加，则检验数 c_j-z_j可能变为正数而使 x_j进入基。据此，应有

$$-\infty \leqslant \Delta c_j \leqslant -(c_j-z_j)$$

b. c_j对应的变量是基变量。

当基变量的 c_j发生变化时，检验数行的每一个值都将发生变化。因此 c_j的变动，应不致使任何一个非基变量的 c_j-z_j值变为正值（求极大问题），才能保持最优解的基不变。据此可以推出如下计算对应第 k 行基变量 $X_{k'}$的目标方程系数增量 $\Delta c_k'$的公式：

$$\Delta c_k' \geqslant \max \frac{c_j-z_j}{a_{k,j}'}, \quad a_{k,j}'>0，对非基变量 x_j$$

$$\Delta c_k' \leqslant \min \frac{c_j - z_j}{a_{k,j}'}。a_{k,j}' < 0，对非基变量 x_j$$

最后，还需指出一点，如在容许范围内变化，不仅基变量构成不会变化，且基变量的值也不会变化，因为基变量值的计算和目标函数无关。

【编程要点】

1. 理论已证明，如果将目标函数作为一个约束方程

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$$

加入单纯形表中，并和其他约束同样进行每次迭代计算的初等变换，那么每张表的这一行恰等于检验数 $c_j - z_j$。这比用公式计算检验数减少了很多计算量。

2. 由于计算机实数表示无法绝对精确，实数判断式 $a=0$，$a \geqslant 0$，$a \leqslant 0$ 等有可能出错。如 a 的值为 0.000001，本可以视为 0，但比较表达式 $a=0$ 并不成立。

为此，程序中这样处理：令 $E=0.0001$，

比较式 $a=0$，改用　　ABS（a）$<E$，

　　$a \geqslant 0$，改用　　　$a \geqslant -E$，

　　$a \leqslant 0$，改用　　　$a \leqslant E$。

【应用举例】

程序中的例题是

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{满足} \quad & 2x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 13 \\ & x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

运行程序，将显示：

目标值＝　　26.0000

x（1）＝1.00　　x（2）＝5.00

如果需要做灵敏度分析，则将显示：

约束	原约束 b 值	最小 b 值	最大 b 值
1	7.0000	6.5000	8.6667
2	13.0000	10.5000	14.0000

变量	原目标 c 值	最小 c 值	最大 c 值
1	6.0000	——	8.0000
2	4.0000	3.0000	——

为了节省存储空间，可将单纯形表中基变量对应的约束方程系数（单位矩阵）删去，即只保留非基变量的系数。但因为在每次迭代中单位矩阵对应的基变量是变动的，需设法追踪这个变动。请读者自己对给出的程序做出修改，以实现这个处理。

【程序】

```
'OR1.BAS 线性规划程序'
'变量说明:M—— 约束条件数,'N—— 实际变量数,
'MaxMin $ 目标类型,'A(,) —— 目标及约束系数增广矩阵,
'Index( I ) 第 I 行基变量下标,'X() —— 解值。
'...........................................................
SCREEN 12 : CLS : DEFINT I-T
DIM A(80,160),X(80),Index(80),B(80),C(80),D(80)
GOSUB ReadData  '读入数据
M1=M+1 : NM1=N+M+1 : NM=N+M : E=0.0001
GOSUB MkMatrix'构成增广矩阵 A
'检查 A 有无单位矩阵
```

```
ManVar$="NO" : TestRow=0 : MaxRow=M  '假定无人工变量
FOR I=1 TO M
  NI=N+I : Index(I)=NI
  IF A(I,NI)<>1 THEN  '需人工变量
    Index(I)=NM1
    '检验数 -Z 放入 M+1 行
    FOR J=1 TO NM : A(M1,J)-A(M1,J)-A(I,J) : NEXT J
    ManVar$="YES" : TestRow=M1 : MaxRow=M1
  END IF
NEXT I
'迭代计算
DO
  GOSUB FindT     '找进入变量列 T
  IF A(TestRow,T) >= -E THEN       '已达最优
    IF ManVar$="NO" THEN      '无人工变量
      GOSUB OutResult          '输出结果
      EXIT LOOP
    END IF
    '有人工变量
    FOR I=0 TO M
      IF Index(I)=NM1 AND A(I,NM1)>E THEN  'I 行为人工
        PRINT "不可行" : K$=INPUT$(1) : STOP  '变量,正值
      END IF
    NEXT I
    ManVar$="NO" : TestRow=0 : MaxRow=M  '转入第二阶段
  ELSE  '未达最优
    GOSUB FindS  '找离去变量行 S
    IF S=0 THEN'无离去变量
```