企业管理决策的最优选择

——线性规划法的应用

郑少国　编

中国商业出版社

企业管理决策的最优选择

——线性规划法的应用

郑少国　编

中国商业出版社出版
新华书店北京科技发行所发行　各地新华书店经售
阜城县印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开　6.25印张　140千字
1988年9月第1版　1988年9月　第1次印刷
印数1——8000册　定价：1.80元
ISBN 7-5044-0084-x/F·39

目　　录

第一章　线性规划问题的数学表现形式

第一节　几个典型实际问题的数学模型

在企业管理中，需要解决各种各样的实际问题，而同一问题会有几种不同的解决方法。为了求得最优的解决方法而列成的数学模型，即把问题本身的内在关系列成数学等式或不等式，不仅可以表达出某个问题的特性，而且还能表达与它同类问题的共性。下面我们分类列出几个典型实际问题的数学模型：

1. 人员的分配

有n项工作分配给n个人（每人一项），已知各人完成各项工作的效率（或费用、或时间）如表1～1：

表1-1

效率　工作 工人	Ⅰ	Ⅱ	…	N
1号	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
2号	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
⋮	…	…	…	…
n号	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}

问如何安排可使总的效率达到最大（或总费用、总时间达到

最少）？

解：设

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{（表示第i个工人分配担任第j项工作。）}\\ 0 & \text{（表示第i个工人不分配担任第j项工作）}\end{cases}$$

共数学模型为：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, & (i=1,2,\cdots,n.)\\ \text{（表示每个工人只担任一项工作.）} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, & (j=1,2,\cdots,n.)\\ \text{（表示每一项工作必须由一个工人担任.）} \\ x_{ij}=\begin{cases}1,\\0,\end{cases} & (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n.)\\ S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.\text{值最大}\end{cases}$$

例　有四项工作分配给四个人，各个人的工作效率如表1～2（表中数字越大，表示效率越高）：

表1-2

工人＼工作	A	B	C	D
甲	6	2	3	1
乙	7	4	3	2
丙	8	10	7	3
丁	7	7	6	4

规定每个工人只分配一项工作，每项工作必由一个工人担任，问如何合理分配工人，使得总效率达到最高？

解：设

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{(表示第‘i’个工人分配担任第j项工作.)}\\ 0. & \text{(表示第‘i’个工人不分配担任第j项工作.)}\end{cases}$$

其数学模型为：

$$\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1,\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1,\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1,\\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1,\\
\text{(每个工人只担任一项工作.)}\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1,\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1,\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1.\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1,\\
\text{(每项工作必由一个工人担任.)}\\
x_{ij}=\begin{cases}1,\\0,\end{cases}\quad (x_{ij}\text{只能等于1或0.})\\
S=6x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+x_{14}+7x_{21}+4x_{22}+3x_{23}\\
\qquad +2x_{24}+8x_{31}+10x_{32}+7x_{33}+3x_{34}+7x_{41}+7x_{42}\\
\qquad +5x_{43}+4x_{44}.\text{值最大.}
\end{cases}$$

2.设备的配置与使用

(1) 设备的合理配置

有n台设备要分给n个单位，每一个单位分一台设备，已知各台设备在各单位的工作效率如表1～3：

表1-3

设备 \ 效率 \ 单位	I	II	…	N
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
⋮	…	…	…	…
n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}

问如何对设备进行合理分配，使得总效率达到最大?

解：设：

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{（当分配第‘i’台设备到第‘j’个单位工作时。）}\\ 0 & \text{（当不分配第‘i’台设备到第‘j’个单位工作时。）}\end{cases}$$

其数学模型为：

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=1, & (i=1,2,\cdots,n.)\\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}=1, & (j=1,2,\cdots,n.)\\ x_{ij}=\begin{cases}1,\\0\end{cases} & \left(\begin{matrix}i\\j\end{matrix}=1,2,\cdots,n.\right)\\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\text{值最大}\end{cases}$$

例2 某矿山公司有甲、乙、丙、丁四台采矿机，需要分配给所属的四个矿区。每个矿区分配一台。这四台采矿机

的型号和技术性能各不相同，每个矿区的地质开采条件也不相同，所以各采矿机在不同矿区的效率也不相同，其工作效率的数值如表1～4：

表1-4（工效吨/台日）

工效 矿区 / 机器	1	2	3	4
甲	600	500	400	350
乙	200	150	120	140
丙	380	300	250	280
丁	80	50	80	100

表1-4说明甲机器在1号矿区工作每日可采矿石600吨，在2号矿区工作每日可采矿石500吨。…要求把这些设备进行合理分配，使增加四台采矿机后增产矿石数量达到最大。

解：设 $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{（表示把i台采矿机分配给第j个矿区。）}\\ 0 & \text{（表示第i台采矿机不分配给第j个矿区。）}\end{cases}$

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1,\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1,\end{cases}$$

（每台机器只能分配给一个矿区.）

$$
\begin{cases}
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1, \\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1, \\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1, \\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1, \\
\text{(每个矿区必分到一台机器.)} \\
x_{ij}=\begin{cases}1, \\ 0\end{cases} \quad (i=1,2,3,4;\ \ j=1,2,3,4.) \\
S=600x_{11}+500x_{12}+400x_{13}+350x_{14}+\cdots \\
\qquad +100x_{44}.\text{值最大}
\end{cases}
$$

(2) 设备的合理使用

①有n种产品需要在m种机床上(或企业、车间) 生 产，每种机床为b_i台，每种机床加工各种产品的 生 产 效 率为c_{ij} (c_{ij}表示第i种机床生产第j种产品的效 率——件 数/单 位时数)，而这n种产品要求按λ_1: λ_2: ……λ_n的比例配套，问应如何安排机床的加工，使得在产品配套的条件下产品数为最多?

解：设x_{ij}表示用第i种机床生产第j种产品的台 数，则其数学模型为：

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=b_i, \quad (i=1,2,\cdots,m.) \\
\text{(每种机床安排生产各种产品台数总和应等于这种机床的总数.)} \\
\dfrac{\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}}{\lambda_2}=\cdots=\dfrac{\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}}{\lambda_n},
\end{cases}
$$

（各种产品数量应成比例.）

$x_{ij} \geqslant 0$.（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$.）

$S=\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}$. 值最大

②某车间用机床$A_1,A_2,\cdots,A_m$生产由$B_1,B_2,\cdots,B_n$这n个不同零件构成的机器，如果每台机器需要各种零件的数目成比例$\lambda_1:\lambda_2\cdots:\lambda_n$，机床$A_i$生产零件$B_j$的效率（每日生产零件数）为$c_{ij}$，问应如何分配机床负荷，才使生产的机器最多？

［解］：设x_{ij}为机床A_i生产零件B_j的时间（单位：日；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$.），则其数学模型为：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\quad (i=1,2,\cdots,m.)$$

（机床A_i生产各种零件时间总和应等于1.）

$$\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}:\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}:\cdots:\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}=\lambda_1:\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

即：$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}}{\lambda_2}=\cdots\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i1}x_{in}}{\lambda_n}=S,$$

（各机床一天生产各种零件总数，应成一定比例.）

$x_{ij} \geqslant 0$，（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$.）

（生产零件时间不能为负数.）

$$S=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}.\ \text{值最大}$$

当$\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n=1:1:\cdots:1$，即每架机器需要各种零件数目相同时，其数学模型为：

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \quad (i=1,2,\cdots,m.) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}=\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}=\cdots=\sum\limits_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}, \\ x_{ij}\geqslant 0, \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.) \\ S=\sum\limits_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}.\text{值最大} \end{cases}$$

③用机床（或企业、车间）$A_1,A_2,\cdots,A_m$加工$B_1,B_2,\cdots,B_n$种零件，在一个生产周期，各机床只能工作的机时，各种零件必须完成的加工数，各机床加工每个零件的时间（单位：机时/个），和加工每个零件的成本（单位：元/个）如表1～5，表1～6所示，问在这个生产周期，怎样安排各机床的生产任务，才能完成加工任务，并使总加工成本最低。（有时要求总收入或总利润为最多。）

表1-5

机　床	加工每个零件的时间 B_1	B_2	$\cdots$	B_n	在一周期能工作机时
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
必须加工零件数	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

表1-6

机　床	加工每个零件的成本 B_1	B_2	…	B_n
A_1	d_{11}	d_{12}	…	d_{1n}
A_2	d_{21}	d_{22}	…	d_{2n}
⋮	⋮	⋮	…	⋮
A_m	d_{m1}	d_{m2}	…	d_{mn}

解：设x_{ij}为机床A_i在下一生产周期加工零件B_j的个数$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则其数学模型为：

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\leqslant a_i,\ (i=1,2,\cdots,m.) \\ \text{(机床}A_i\text{加工各零件总机时不能超过}A_i\text{能工作机时.)} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}\geqslant b_j,\ (j=1,2,\cdots,n.) \\ \text{(各机床加工零件}B_j\text{的总数不能少于}B_j\text{需要数.)} \\ x_{ij}\geqslant 0,\ \text{整数},\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.) \\ \text{(加工零件个数不能为负数.)} \\ S=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} d_{ij}x_{ij}.\ \text{值最小}\end{cases}$$

3.下料与配料

(1) 合理下料

合理下料问题是许多工业部门，特别是机械制造、缝纫、制鞋等部门经常遇到的问题。它要求在长度一定的条形材料上，或面积、形状一定的板料上，切割若干具有一定形

状、尺寸的毛坯。通常材料不可能完全被利用，总会有一部分残余。如何最大限度地减少残料，使得切割规定数量的毛坯所用的原材料最少，是需要研究解决的问题。

如用某原材料（条材或板材）下零件$A_1, A_2, \cdots, A_m$的毛坯，根据过去经验在一件原材料上有$B_1, B_2, \cdots, B_n$种不同的下料方式，每种下料方式可得各种毛坯个数及每种零件需要量如表1～7所示，问应怎样安排下料方式，能满足需要而用料最少？

表1-7

各方式下的零件个数 下料方式 / 零件名称	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	零件需要量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{n1}	c_{n2}	$\cdots$	c_{nn}	a_m

解：设用B_j种方式下料的原材料数为x_j，则这一问题的数学模型为：

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i, \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ \text{(所下的}A_i\text{零件总数不能少于}a_i\text{)} \\ x_j \geqslant 0, \text{ 整数}, \quad (j=1,2,\cdots,n.) \\ \text{(各种方式下料的原材料数不能是负数、分数.)} \\ S = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j.\text{值最小} \end{cases}$$

例3 一种圆钢长度为5.5米，要制造100台机床 而 每一台需要圆钢的长度与这种长度的根数如表1～8：

表1-8

	规格（米）	每台机床所需根数
甲	3.1	1
乙	2.1	2
丙	1.2	4

问制造100台机床最少要用多少根5.5米的圆钢？

解：根据所要求的规格，对圆钢可有以下 五 种 截 法下料．而每种截法所得的根数与余料如表1～9：

表1-9

下料方式	规格			余料（米）
	3.1（米）	2.1（米）	1.2（米）	
1	1	1	0	0.3
2	1	0	2	0
3	0	2	1	0.1
4	0	1	2	1
5	0	0	4	0.7

设各种下料方式所用的根数分 别 为：x_1，x_2，x_3，x_4，x_5（根），则其数学模型为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 100, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \geqslant 200, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geqslant 400, \\ x_j \geqslant 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, 5. \\ S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 .\text{值最小} \end{cases}$$

下料问题还有另一种情况：在原材料供应紧张时往往所给的原材料是定量的（设其数量为a），需切割出数量最多的配套毛坯（设要求各规格的毛坯的配套比例为：$k_1:k_2:\cdots:k_m$），则其数学模型为：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j = a, \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j}{k_1} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j}{k_2} = \cdots = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_m x_j}{k_m}, \\ x_j \geqslant 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n.) \\ S = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j}{k_1} \quad \text{值最大} \end{cases}$$

（2）合理配料

用n种原料$B_1, B_2, \cdots, B_n$，制成含有m种成分：$A_1, A_2, \cdots, A_m$的产品，其所含各成分需要量分别不低于$a_1, a_2, \cdots, a_m$，各种原料的单价，以及各种原料所含成分的数量如表1-10所示，问应如何配料，才使产品成本最低？

解：设取原料B_j为x_j单位（$j = 1, 2, \cdots, n.$），这一问题的数学模型为：

表1-10

单位原料所含成分的数量 原料 / 产品所含成分名称	B_1 B_2 … B_n	产品所含成分需要量
A_1	c_{11} c_{12} … c_{1n}	a_1
A_2	c_{21} c_{22} … c_{2n}	a_2
⋮	⋮ ⋮ … ⋮	⋮
A_m	c_{m1} c_{m2} … c_{mn}	a_m
原料单价	b_1 b_2 … b_n	

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i, \quad (i=1,2,\cdots,m.)$$

(所有各种原料所含成分A_i的总数应不少于产品对A_i需要量a_i.)

$x_j \geqslant 0$, $(j=1,2,\cdots,n.)$

(所取原料不能为负数.)

$S=\sum_{j=1}^{n} b_jx_j$。值最小

例4 设某人由于健康的需要，每日需要服A，B两种维生素。其中，A维生素最少服9个单位，B维生素最少服19个单位。现有六种营养物每克含A,B维生素的单位数与六种营养物每克的单价列表1～11：
问这六种营养物每日需服多少克，才能摄取足量的A，B维生素，而所花的费用最少？

解：设六种营养物分别各服 x_1，x_2，x_3，$\cdots x_6$克，则其