前　言

一．本书是在我院机、电类型各专业使用的数学讲义的基础上，按照1977年10月在北京召开的高等学校工科基础课教材座谈会的精神和同年11月在西安召开的高等学校工科数学教材编写会议所制定的编写大纲，经过修改、补充而成。

二．全书的内容共分两部分，即傅里叶变换和拉普拉斯变换，在引入概念和安排内容时，我们注意到它们之间的内在联系．

三．积分变换有广泛的应用，除了用来求解一些微分方程外，对傅里叶变换还介绍了频谱的概念，对拉普拉斯变换介绍了传递函数的概念．书中有*号的内容可根据需要和可能决定取舍．

四．本书在各章节之后均配有相当数量的习题，可供读者练习，书末附有习题答案．

五．本书附有傅里叶变换表和拉普拉斯变换表，可供查用．

六．本书由浙江大学主审，主审人为该校周茂清教授．参加审稿的单位有北京航空学院，河北工学院，吉林工业大学，山东工学院，湖南大学，天津大学，西安冶金建筑学院，上海机械学院，上海交通大学，南京航空学院，西安交通大学，重庆大学．审稿的同志对本书提出了宝贵的意见，我们表示衷心的感谢．

七．这次参加本书编写小组的有陶永德，高金衡，王元明，张元林(张元林执笔)．

由于我们政治水平和业务水平不高，加上成书时间短促，书中一定有很多错误和缺点．希望读者批评指教．

编　者

1978年10月

目 录

第一章　傅里叶变换

§1.1　傅氏积分

在学习傅里叶(Fourier)级数的时候，我们已经知道，一个以T为周期的函数$f_T(t)$，如果在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上满足狄利克雷(Dirichlet)条件(简称狄氏条件，即函数在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上：1°连续或只有有限个第一类间断点；2°只有有限个极值点)，那么，在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上就可以展成傅氏级数，在$f_T(t)$的连续点处，级数和的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \tag{1.1}$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)dt,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t dt \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t dt \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

为了今后应用上的方便，下面把傅氏级数的三角形式转换为复指数形式．利用欧拉(Euler)公式

$$\cos\varphi=\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = -j\frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2},$$

此时，(1.1)式可写为

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-jn\omega t}\right].$$

如果令

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)dt,$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t dt - j\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)[\cos n\omega t - j\sin n\omega t]dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega t}dt \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{jn\omega t}dt \quad (n=1, 2, 3\cdots),$$

而它们可合写成一个式子

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega t}dt.$$

若令

$$\omega_n = n\omega, \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

则(1.1)式可写为

$$f_T(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{j\omega_n t}+c_{-n}e^{-j\omega_n t}\right]$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{j\omega_n t},$$

这就是傅氏级数的复指数形式．或者写为

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}. \tag{1.2}$$

下面我们来讨论非周期函数的展开问题．任何一个非周期函数$f(t)$都可以看成是由某个周期函数$f_T(t)$当$T\to+\infty$时转化而来的．为了说明这一点，我们作周期为T的函数$f_T(t)$，使其在$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$之内等于$f(t)$，而在$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$之外按周期$T$延拓出去，如图 1-1 所示．很明显，$T$越大，$f_T(t)$与$f(t)$相等的范围也

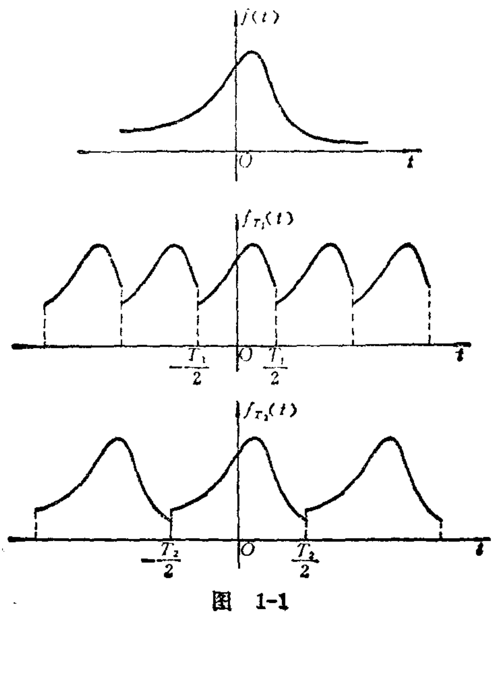

图 1-1

越大，这表明当 $T\to+\infty$ 时，周期函数 $f_T(t)$便可转化为 $f(t)$，即有

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=f(t).$$

这样，在(1.2)式中令 $T\to+\infty$ 时，结果就可以看成是 $f(t)$的展开式，即

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}.$$

当 n 取一切整数时，ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上，如图 1-2 所示，若两个相邻点的距离以 $\Delta\omega$ 表示，即

图 1-2

$$\Delta\omega=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T}, \text{ 或 } T=\frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

当 $T\to+\infty$ 时，有 $\Delta\omega\to0$，所以上式又可以写为

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega\to0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}d\tau\right]e^{j\omega_n t}\Delta\omega. \qquad (1.3)$$

当 t 固定时，$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}$ 是参数 ω 的函数，记为 $\Phi_T(\omega)$，即

$$\Phi_T(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}.$$

利用 $\Phi_T(\omega)$ 可将(1.3)式写成

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega\to0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega.$$

很明显，当 $\Delta\omega\to0$ 即 $T\to+\infty$ 时，$\Phi_T(\omega)\to\Phi(\omega)$，

其中 $$\Phi(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}.$$

从而 $f(t)$ 可以看作是 $\Phi(\omega)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分．即

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega.\end{aligned}$$

这就是 $f(t)$ 的展开式，称为函数 $f(t)$ 的**傅里叶积分公式**(简称傅氏积分公式)．应该指出，上式只是由(1.3)式的右端从形式上推出来的，是不严格的．至于一个非周期函数 $f(t)$ 在什么条件下，可以用傅氏积分公式来表示，有下面的定理．

傅氏积分定理 若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足下列条件：1°$f(t)$ 在任一有限区间上满足狄氏条件；2°$f(t)$ 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积(即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛)，则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \text{①} \qquad (1.4)$$

成立，而左端的 $f(t)$ 在它的间断点 t 处，应以 $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ 来代替．这个定理的证明要用到较多的基础理论，这里从略．

(1.4)式是 $f(t)$ 的傅氏积分公式的复指数形式，利用欧拉公式，可将它转化为三角形式．因为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau\right]d\omega\end{aligned}$$

---

① 式中的广义积分都是在主值意义下的．所谓主值意义是指

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}f(x)dx.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right.$$

$$\left.+j\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega,$$

考虑到积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$ 是 ω 的奇函数，就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega=0,$$

从而

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega, \tag{1.5}$$

又考虑到积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

是 ω 的偶函数，(1.5)又可写为

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega. \tag{1.6}$$

这便是 $f(t)$ 的傅氏积分公式的三角形式．稍加改变，还可以得到其他形式，这些都放在习题里了．

习 题 一

1．试证：若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，则有

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t d\omega+\int_{0}^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t d\omega,$$

其中

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau;$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau.$$

2．试证：若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，当 $f(t)$ 为奇函数时，则有

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t d\omega,$$

其中

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau;$$

当 $f(t)$ 为偶函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

其中

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

3. 在题 2 中，设 $f(t)=\begin{cases}1, & 当|t|\leqslant 1;\\ 0, & 当|t|>1.\end{cases}$ 试算出 $a(\omega)$ 并推证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1;\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

§1.2 傅氏变换

1. 傅氏变换的概念

我们已经知道，若函数 $f(t)$ 满足傅氏积分定理中的条件，则在 $f(t)$ 的连续点处，便有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \tag{1.7}$$

成立.

从(1.7)式出发，设

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{1.8}$$

则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{1.9}$$

从上面两式可以看出，$f(t)$ 和 $G(\omega)$ 通过积分可以相互表达. (1.8) 式叫做 $f(t)$ 的**傅氏变换式**，可记为

$$G(\omega)=F[f(t)].$$

$G(\omega)$叫做 $f(t)$的**象函数**. (1.9)式叫做$G(\omega)$的**傅氏逆变换式**,可记为

$$f(t)=F^{-1}[G(\omega)].$$

$f(t)$叫做 $G(\omega)$的**象原函数**.

(1.8)式右端的积分运算,叫做取 $f(t)$的傅氏变换,同样,(1.9)式右端的积分运算,叫做取 $G(\omega)$的傅氏逆变换. 可以说象函数$G(\omega)$和象原函数 $f(t)$构成了一个傅氏变换对.

例 1 求函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅氏变换及其积分表达式,其中 $\beta>0$. 这个 $f(t)$叫做指数衰减函数,是无线电技术中常碰到的一个函数.

根据(1.8)式,有

$$G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-(\beta+j\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

这便是指数衰减函数的傅氏变换. 下面我们来求指数衰减函数的积分表达式.

根据(1.9)式,并利用奇偶函数的积分性质,可得

$$f(t)=F^{-1}[G(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega.$$

由此我们顺便得到一个含参量广义积分的结果:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0;\\ \pi e^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

例 2 求函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅氏变换及其积分表达式. 这个函数 $u(t)$ 叫做单位函数，也是无线电技术中常碰到的一个函数. 很明显，单位函数不满足傅氏积分定理的绝对可积条件，因为积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-j\omega t}dt$$

不收敛，这就说明单位函数 $u(t)$ 按(1.8)式定义的傅氏变换不存在，但我们可以按下面的办法推广傅氏变换的定义.

将单位函数 $u(t)$ 看成为

$$u(t)=\lim_{\beta\to 0}u(t)e^{-\beta t}\quad(\beta>0),$$

而 $u(t)$ 的傅氏变换也看成为函数 $u(t)e^{-\beta t}$ 的傅氏变换在 $\beta\to 0$ 时的极限，由例 1 可知

$$F[u(t)e^{-\beta t}]=\frac{1}{\beta+j\omega},$$

所以

$$F[u(t)]=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{1}{j\omega}.$$

我们便定义单位函数的傅氏变换

$$G(\omega)=\frac{1}{j\omega}.$$

这样定义的傅氏变换应理解为是在广义意义下的傅氏变换. 所谓广义是相对于古典意义而言的，在广义意义下的傅氏变换是允许交换积分运算和求极限运算的次序，即

$$F[u(t)]=F\left[\lim_{\beta\to 0} u(t)e^{-\beta t}\right]$$
$$=\lim_{\beta\to 0} F[u(t)e^{-\beta t}].$$

在古典的傅氏变换意义下，上面的交换是不允许的，只有当函数满足一定的条件，才可进行这样的交换，而这些条件大大地限制了傅氏变换在工程技术上的应用．另一方面按广义意义下傅氏变换所推出的一系列结果又与工程实际吻合，所以近代的傅氏变换的理论都是建立在广义意义下．本书是工科院校的基础课教材，重点还是讨论古典意义下的傅氏变换，但有些内容已涉及到广义意义的傅氏变换，因此在后面各节中凡是交换积分运算和极限运算次序的地方，都认为是允许的．

现在我们用上面这个结果来求单位函数的积分表达式．

设 $G_\beta(\omega)=\dfrac{1}{\beta+j\omega}$，则它的傅氏逆变换为

$$u(t)e^{-\beta t}=F^{-1}[G_\beta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta+j\omega}e^{j\omega t}d\omega,$$

所以

$$u(t)=\lim_{\beta\to 0} u(t)e^{-\beta t}=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta+j\omega}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}\sin\omega t d\omega.$$

对于第一个积分式，令 $\omega=\beta z$，$d\omega=\beta dz$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta^2}{\beta^2(1+z^2)}\cos\beta z t dz,$$

则单位函数的积分表达式为

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta^2}{\beta^2(1+z^2)}\cos\beta z t dz$$

$$+\frac{1}{2\pi}\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}\sin\omega t d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+z^2}dz+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega.$$

当 $t=1$ 时，亦可顺便得到一个广义积分的结果：

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}.$$

这个积分称为狄利克雷积分.

2. 单位脉冲函数及其傅氏变换

在无线电技术中，除了用到指数衰减函数和单位函数以外，还会常常碰到单位脉冲函数. 因为有许多物理现象具有脉冲性质，如在电学中，要研究线性电路受具有脉冲性质的电势作用后所产生的电流；在力学中，要研究机械系统受冲击力作用后的运动情况等. 研究此类问题就会产生我们要介绍的脉冲函数.

在原来电流为零的电路中，某一瞬时(设为 $t=0$)进入一单位电量的脉冲，现在要确定电路上的电流 $i(t)$. 以 $q(t)$表示上述电路中的电荷函数，则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0;\\ 1, & t=0.\end{cases}$$

由于电流强度是电荷函数对时间的变化率，即

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t},$$

所以，当 $t\neq 0$ 时，$i(t)=0$；当 $t=0$ 时，

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty.$$

这就说明，在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够用来表示上述电路的电流强度. 为了确定这种电路上的电流强度，必须引进一个新的函数，这个函数称为**狄拉克**(Dirac)**函数**，简记成 δ-函数.

δ-函数是一个广义函数，它没有普通意义下的"函数值"，所以它不能用通常意义下"值的对应关系"来定义. 工程上通常将它定义为一个函数序列的极限，例如，将 δ-函数定义为

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon;\\ 0, & t>\varepsilon,\end{cases}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限，即

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t).$$

$\delta_\varepsilon(t)$ 的图形如图 1-3 所示. 对任何 $\varepsilon>0$，显然有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)dt=\int_0^\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}dt=1,$$

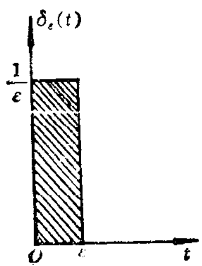

图 1-3

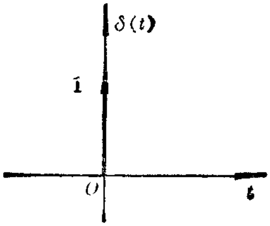

图 1-4

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1.$$

工程上，常将 δ-函数称为**单位脉冲函数**. 有些工程书上，将 δ-函数用一个长度等于 1 的有向线段来表示(图 1-4)，这个线段的长度表示 δ-函数的积分，叫做 δ-函数的强度.

δ-函数有一个重要的性质：若 $f(t)$为连续函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0). \tag{1.10}$$

事实上，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)]dt$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta_\varepsilon(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon f(t)\frac{1}{\varepsilon}dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)dt,$$

由于 $f(t)$是连续函数，由积分中值定理，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(t)dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}f(\theta\varepsilon),\qquad 其中\ 0<\theta<1。$$

所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0).$$

更一般地还成立着$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$.

这一性质表明，虽然 δ-函数是一种广义函数，但它和任何连续函数的乘积在$(-\infty,+\infty)$内的积分都有很明确的意义，这就使得 δ-函数在近代物理和工程技术中有着较广泛的应用。

根据 δ-函数的这一重要性质，我们可以很方便地求出它的傅氏变换：

$$G(\omega)=F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t}\Big|_{t=0}=1,$$

可见，单位脉冲函数 $\delta(t)$ 与常数 1 构成了一个傅氏变换对.

3. 非周期函数的频谱

傅氏变换和频谱概念有着非常密切的关系，随着无线电技术、声学、振动学的蓬勃发展，频谱理论也相应地得到了发展，它的应用也越来越广泛. 我们这里只能简单地介绍一下频谱的基本概念，至于它的进一步理论和应用，留待有关专业课程再作详细的讨论.

在傅氏级数的理论中，我们已经知道，对于以 T 为周期的非正弦函数 $f(t)$，它的第 n 次谐波$\left(\omega_n=n\omega=\dfrac{2n\pi}{T}\right)$

$$a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t=A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

的振幅为

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

而在复指数形式中，第 n 次谐波为

$$c_n e^{j\omega_n t}+c_{-n}e^{-j\omega_n t},$$

其中

$$c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},\qquad c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2},$$

并且

$$|c_n|=|c_{-n}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

所以，以 T 为周期的非正弦函数 $f(t)$ 的第 n 次谐波的振幅为

$$A_n=2|c_n|,(n=0,1,2,\cdots)$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况. 所谓频谱图，通常是指频率和振幅的关系图，所以 A_n 称为 $f(t)$ 的振幅频谱（简称为频谱）. 由于$n=0,1,2,\cdots$，所以频谱 A_n 的图形是不连续的，称之