

复变函数论

周正中编

广西人民出版社

复变函数论

周正中 编

☆

广西人民出版社出版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行 柳州市印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 269,000

1982年11月第1版 1982年11月第1次印刷

印数 1—5,200 册

书号: 7113·443 定价: 1.30元

目 录

序 言

第一章 复数	1
1.1 复数的概念.....	1
1.2 复数的四则运算.....	1
1.3 共轭复数.....	3
1.4 复数的几何表示法.....	4
1.5 复数的模与辐角公式.....	7
1.6 复数的方根.....	9
1.7 复数的和、差的几何表示及其模的不等式.....	11
1.8 复数的模与辐角的公式的应用.....	12
1.9 无穷远点与复数球面.....	17
提要与习题.....	18
第二章 平面点集初步	24
2.1 点集概念.....	24
2.2 邻域、内点、外点、界点、聚点.....	24
2.3 区域.....	27
2.4 约当曲线.....	27
2.5 单连通区域与复连通区域.....	28
2.6 复盖定理、聚点原理.....	32
提要与习题.....	36
第三章 解析函数	40
3.1 复变函数的概念.....	40
3.2 函数极限与函数的连续性.....	42
3.3 解析函数的概念.....	48
3.4 微分法的基本公式.....	50

3.5	歌西——黎曼条件	52
	提要与习题	57
第四章	初等函数	63
4.1	指数函数	63
4.2	三角函数与双曲线函数	65
4.3	对数函数	69
4.4	反三角函数与反双曲线函数	75
4.5	一般幂函数	77
	提要与习题	83
第五章	复变函数积分	89
5.1	复变函数积分的概念	89
5.2	积分的存在定理及其计算公式	91
5.3	积分的基本性质	94
5.4	解析函数的基本定理	97
5.5	复连通区域的歌西积分定理	105
5.6	歌西积分公式	107
5.7	解析函数的高阶导数	111
5.8	歌西不等式	116
5.9	李乌威尔定理	117
5.10	代数基本定理	117
5.11	不定积分	119
5.12	莫瑞拉定理	121
	提要与习题	122
第六章	数值级数与函数项级数	130
6.1	序列	130
6.2	复数项级数	132
6.3	绝对收敛级数	133
6.4	函数项级数	138
6.5	幂级数	145

6.6	负整数次幂级数	152
	提要与习题	153
第七章	解析函数的台劳展开式及其应用	161
7.1	解析函数的台劳展开式	161
7.2	初等函数的台劳展开式	165
7.3	解析函数的零点的孤立性与唯一性定理	170
7.4	最大模原理	173
7.5	幂级数系数的歌西不等式	175
	提要与习题	176
第八章	解析函数的罗朗展开式与孤立奇点	181
8.1	罗朗级数	181
8.2	解析函数的罗朗展开式	182
8.3	孤立奇点的分类	189
8.4	可去奇点	190
8.5	极点	191
8.6	本性奇点	194
8.7	无穷远点是奇点的情形	196
8.8	整函数与亚纯函数	198
	提要与习题	201
第九章	留数理论及其应用	207
9.1	留数的概念与计算	207
9.2	无穷远点的留数概念及其计算	211
9.3	留数基本定理	212
9.4	解析函数的零点的个数与辐角原理	214
9.5	路西定理	217
9.6	代数基本定理的又一证明	219
9.7	利用留数理论计算定积分	219
	提要与习题	232
第十章	保形映照与线性变换	240

10.1	保角映照的一般概念——导数的几何意义	240
10.2	单叶解析函数的保形性	243
10.3	分式线性变换的保形性	247
10.4	线性变换保持交比的不变性	250
10.5	线性变换的分解	253
10.6	线性变换的保圆性	255
10.7	对称点的不变性	257
10.8	三个重要的线性变换	258
10.9	保形映照的黎曼存在定理	263
10.10	保形映照的边界对应定理	264
10.11	正整次幂函数与指数函数所构成的映照	268
	提要与习题	272
第十一章	解析开拓	278
11.1	解析开拓的概念	278
11.2	两个常用的解析开拓的方法	279
11.3	解析开拓的幂级数方法	281
11.4	函数不能作解析开拓的例	283
11.5	黎曼曲面	286
11.6	对称原理	288
11.7	完全解析函数的概念	291
11.8	上半平面到多角形的保形映照	292
	提要与习题	299
第十二章	调和函数	304
12.1	调和函数的定义和基本性质	304
12.2	中值公式	308
12.3	普阿松公式与狄里克莱问题	309
	提要与习题	315
附录	部分习题参考答案	318

第一章 复数

复数是复变函数论的预备知识。为了读者学习方便起见，我们在这里先叙述有关复数的概念、复数的运算、复数的几何表示以及复数的模与辐角公式等方面的知识。

1.1 复数的概念

形如 $A = a + ib$ 的数，称为复数。其中 a 和 b 是任意的实数， i 适合于 $i^2 = -1$ ，称为虚数单位。实数 a 和 b 分别称为复数 A 的实部和虚部，分别记为： $a = \operatorname{Re} A$ ； $b = \operatorname{Im} A$ 。

两个复数相等是指它们具有相等的实部与相等的虚部。虚部为零的数： $A = a + i0$ 写作 $A = a$ 且看作与实数 a 相同；特别是，把数 $0 + i0$ 看作与零相同。这样，实数便可看作复数的特殊情形。实部等于零的复数 $A = 0 + ib$ 写作 $A = ib$ ，称为纯虚数。

1.2 复数的四则运算

现在我们来定义复数的四则运算。由于实数是复数的特例，因此，规定复数四则运算（加、减、乘、除）的一个基本要求是：复数运算的法则施行于实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数四则运算能够满足实数四则运算的一般定

律。

复数的加(减)法按实部与实部相加(减),虚部与虚部相加(减),即复数 $A_1 = a_1 + ib_1$, $A_2 = a_2 + ib_2$ 相加(减)的法则是

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2).$$

结果仍是复数。我们称复数 $A_1 + A_2$ 是 A_1 与 A_2 的和,称复数 $A_1 - A_2$ 是 A_1 与 A_2 的差。

复数的加法遵守交换律与结合律,而且减法是加法的逆运算,这些都是容易验证的。

两个复数 $A_1 = a_1 + ib_1$ 及 $A_2 = a_2 + ib_2$ 相乘,可按多项式乘法法则来进行,只须将结果中的 i^2 换成 -1 ,即

$$A_1 A_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

结果仍是复数,我们称它为 A_1 与 A_2 的积。

也易验证,复数的乘法遵守交换律与结合律,且遵守乘法对于加法的分配律。

两个复数 $A_1 = a_1 + ib_1$ 及 $A_2 = a_2 + ib_2$ 相除(除数不是0)时,可先把它写成分式的形式,然后分子分母同乘以一个与分母的实部相等而虚部只相差一个符号的复数,再进行化简,即

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

结果仍是复数,我们称它为 A_1 与 A_2 的商。这里除法是乘法的逆运算。复数全体构成一个域(体)。

例 化简 $\frac{(2+3i)^2}{2+i}$.

解:
$$\begin{aligned} \frac{(2+3i)^2}{2+i} &= \frac{4-9+12i}{2+i} = \frac{(-5+12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{-10+12+29i}{4+1} = \frac{2+29i}{5}. \end{aligned}$$

1.3 共轭复数

实部相等而虚部只相差一个符号的两个复数，叫做共轭复数。

设 $A = a + ib$ ，记 A 的共轭复数为 \bar{A} ，即

$$\bar{A} = a - ib.$$

显然， \bar{A} 的共轭复数是 A ，即 $\overline{\bar{A}} = A$ 。因此， A 与 \bar{A} 互为共轭复数。

因为 0 的相反数仍旧是 0，所以当复数的虚部为 0 时，即这个复数是实数时，它的共轭数就是它本身。于是得：当 A 为实数时，则 $A = \bar{A}$ 。反之，当 $A = \bar{A}$ 时，得 $\text{Im} A = -\text{Im} A$ 。所以 $\text{Im} A = 0$ ，从而得 A 为实数。综合起来，我们得：

A 与 \bar{A} 相等的充要条件是 A 为实数。

设 $A = a + ib$ ， $B = c + id$ ，则关于它们的共轭复数有下列性质：

$$1^\circ \quad \overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}.$$

这是因为 $\overline{A+B} = \overline{a+c+i(b+d)} = a+c-i(b+d)$ ，

而 $\bar{A} + \bar{B} = a-ib+c-id = a+c-i(b+d)$ ，

所以 $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$ 。

$$2^\circ \quad \overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B},$$

这是因为 $A \cdot B = (a+ib)(c+id)$
 $= ac - bd + i(bc+ad)$ ，

所以 $\overline{A \cdot B} = ac - bd - i(bc+ad)$ 。

又因 $\bar{A} \cdot \bar{B} = (a-ib)(c-id) = ac - bd - i(bc+ad)$ ，

所以 $\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ 。

$$3^\circ \text{ 当 } B \neq 0 \text{ 时, } \left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}},$$

令 $C = \frac{A}{B}$, 则 $A = B \cdot C$, 由 2° 得

$$\overline{A} = \overline{B} \cdot \overline{C}, \text{ 所以 } \overline{C} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}.$$

利用性质 1° 与 2° , 我们还可以得到方程求根的一个应用. 若 z_0 是方程

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (1)$$

的一个根, 则 $\overline{z_0}$ 是方程

$$\overline{a_0} z^n + \overline{a_1} z^{n-1} + \cdots + \overline{a_{n-1}} z + \overline{a_n} = 0 \quad (2)$$

的根.

特例, 若 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 是实数, 则 z_0 与 $\overline{z_0}$ 都是方程 (1) 的根, 这就是实系数代数方程 (有理整方程) 虚根成对定理.

1.4 复数的几何表示法

我们早就知道一对排定了顺序的实数 (a, b) , 可以用平面直角坐标系里唯一的点 $A(a, b)$ 来表示, 反之, 在平面直角坐标系里的每一个点 $A(a, b)$, 也都唯一地表示着一对排定了顺序的实数 (a, b) . 即平面直角坐标系的点和一对排定了顺序的实数之间, 可以建立一一对应的关系.

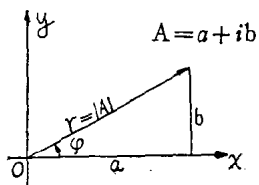


图 1.1

从复数 $a + ib$ 的定义可以看出, 复数也是由一对排定了顺序的实数 a 和 b 构成的, 这里实部 a 和虚部 b 分别相当于点

$A(a, b)$ 的横坐标和纵坐标, 所以, 一个复数 $A = a + ib$ 可以用平面直角坐标系的点 $A(a, b)$ 来表示, 这时作为复数 $A = a + ib$ 的几何表示是以横坐标为 a , 纵坐标为 b 的点.

复数 A 还能用从原点指向点 (a, b) 的向量来表示 (图 1.1), 这时复数 $A = a + ib$ 解释为用横轴上的射影为 a , 纵轴上的射影为 b 的向量来表示.

今后, 我们可以用几何的术语, 即用平面上的点或向量来代替相应的复数的说法. 表示复数的点 (或向量) 所在平面, 叫做复平面. 对应于数 0 的坐标原点简称原点. 横轴称为实轴, 纵轴称为虚轴.

在这里我们顺便指出复数不能定义大小关系, 因为一般的复数可以用平面向量来表示, 而向量本身不定义大小关系, 所以复数也不能定义大小关系. 因此, 对于复数 A, B 之间只有 $A = B$ 或 $A \neq B$, 不存在 $A < B$ 或 $A > B$ 的关系, 当然这样的复数 A, B 至少有一个不是实数.

复数 A 除了用平面的点或向量表示外, 还可以用三角表示法 (这时要假定复数 $A \neq 0$).

根据直角坐标与极坐标之间的变换关系

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi,$$

我们立刻可将复数 $A = a + ib$ 表示为

$$A = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1)$$

这叫做复数 A 的三角表示式, 与之相对应, 式子 $a + ib$ 叫做 A 的代数式.

(1) 式中的 r 叫做复数 A 的模或绝对值, 它是点 A 到原点的距离, 也就是从原点出发, 终点在 A 的向量长度. 在极坐标系中 r 就是点 A 的向径, 记为 $r = |A|$ (图 1.1), 因此,

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{A\bar{A}}, \quad |A|^2 = A\bar{A}.$$

(1) 式中的 φ 称为复数 A 的辐角, 它是向量 \overrightarrow{OA} 与横轴的

正向所成的角。

数 0 是唯一的以零为模，辐角没有定义的复数。

若 φ 是复数 A 的辐角，则 $\varphi + 2n\pi$ (n 是整数) 也是 A 的辐角，所以 A 的辐角的值有无穷之多，记为 $\text{Arg} A = \varphi + 2n\pi$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

满足 $-\pi < \varphi \leq \pi$ 的辐角叫做 A 的辐角的主值，记为

$$\varphi = \arg A.$$

于是 $\text{Arg} A = \arg A + 2n\pi$. ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

例 1. 求复数 $4(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$ 的模与辐角。

注意这里 $4(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$ 还不是 $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ 的形式，所以不能直接看出它的辐角是什么，因此，还需要把它化为三角形式。

解： 因为 $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3}$,

$$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3},$$

所以 $4(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 4[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]$

由此可知，这个复数的模是 4，辐角是 $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

例 2. 求复数 $A = \frac{1-i}{1+i}$ 的实部、虚部、模与辐角。

解： 因为 $A = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$,

所以， $\text{Re} A = 0$, $\text{Im} A = -1$, $\arg A = -\frac{\pi}{2}$,

$\text{Arg} A = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) $|A| = 1$.

注意：我们有时也把 $\text{Arg} Z$ 的任一个确定的值，都记作 $\arg Z$ ，例如也可以取 $0 < \arg Z \leq 2\pi$ 。

1.5 复数的模与辐角公式

设 $A_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$;

$A_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

根据复数乘法法则, 容易算出

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \\ &\quad + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

所以 $|A_1 A_2| = r_1 r_2 = |A_1| \cdot |A_2|$, (1)

$\text{Arg}(A_1 A_2) = \text{Arg} A_1 + \text{Arg} A_2$. (2)

注意, 公式(2)只有在辐角允许相差 2π 的整数倍的值的条件下才能成立. 这个等式应理解为 $\text{Arg}(A_1 A_2)$ 的任一值, 一定有 $\text{Arg} A_1$ 及 $\text{Arg} A_2$ 的各一值与它对应, 使得等式成立, 反过来也是这样. 如果在(2)式中我们规定 2π 的整数倍数的值不计在内, 应有

$$\arg(A_1 A_2) = \arg A_1 + \arg A_2$$

利用数学归纳法, 我们可以推出 n 个复数 A_1, A_2, \dots, A_n 相乘的三角表示式的公式

$$A_1 A_2 \cdots A_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)],$$

其中 $A_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). 于是得 n 个复数 A_1, A_2, \dots, A_n 的模与辐角公式

$$|A_1 A_2 \cdots A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|;$$

$$\text{Arg}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \text{Arg} A_1 + \text{Arg} A_2 + \cdots + \text{Arg} A_n.$$

特例, 当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ 时, 得

$$|A^n| = |A|^n; \quad \text{Arg} A^n = n \text{Arg} A.$$

由此，导出德摩弗(De Moivre)公式

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n [(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)].$$

例1. 计算 $(\sqrt{3} - i)^6$.

解: 因为 $\sqrt{3} - i = 2 [\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})]$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } (\sqrt{3} - i)^6 &= [2 (\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6})]^6 \\ &= 2^6 [\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)] \\ &= 64(\cos\pi - i\sin\pi) = -64. \end{aligned}$$

下面我们来导出两个复数的商的模与辐角公式.

设 $A_2 \neq 0$, 则 $A_1 = \frac{A_1}{A_2} \cdot A_2$, 由模与辐角的乘积公式得

$$|A_1| = \left| \frac{A_1}{A_2} \right| \cdot |A_2|$$

与 $\text{Arg} A_1 = \text{Arg} \frac{A_1}{A_2} + \text{Arg} A_2$,

$$\text{于是得} \quad \left| \frac{A_1}{A_2} \right| = \frac{|A_1|}{|A_2|} \quad (3)$$

$$\text{Arg} \frac{A_1}{A_2} = \text{Arg} A_1 - \text{Arg} A_2 \quad (4)$$

例2. 求证

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \sqrt{3}i)(\cos\theta + i\sin\theta)}{(1 - i)(\cos\theta - i\sin\theta)} &= \sqrt{2} \left[\cos(2\theta - \frac{\pi}{12}) \right. \\ &\quad \left. + i\sin(2\theta - \frac{\pi}{12}) \right]. \end{aligned}$$

证明: 因为左端

$$\begin{aligned} &= \frac{2[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})](\cos\theta + i\sin\theta)}{\sqrt{2} [\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})] [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]} \\ &= \frac{2 [\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\theta - \frac{\pi}{3})]}{\sqrt{2} [\cos(-\frac{\pi}{4} - \theta) + i\sin(-\frac{\pi}{4} - \theta)]} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \theta\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \theta\right) \right]$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{12}\right) \right] = \text{右端,}$$

所以, 等式成立.

1.6 复数的方根

设 n 是自然数, $A \neq 0$, 我们定义复数 A 的 n 次方根 $\sqrt[n]{A}$ 为一个自乘 n 次后等于 A 的复数. 设此复数为 z , 则 z 满足方程

$$z^n = A \quad (1)$$

为解此方程, 我们令

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

代入 (1) 得

$$\rho^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

因为, 两个复数相等时, 它们的模数必须相等, 而辐角可以相差 2π 的整数倍, 所以

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + 2k\pi \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

由此可知 $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} & (\text{因为 } \rho \text{ 是模数, 所以只取算术根}) \\ \theta = \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi) \end{cases}$

因为 $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ 都是以 2π 为周期的周期函数, 故得 A 的 n 次方根的值

$$z_k = \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

就几何方面说, 这 n 个根是以原点 O 为心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

当 $n=1$ 时特别重要, 若令

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

则 1 的 n 次方根为

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

注意: 在实数范围内和在复数范围内, 记号 $\sqrt[n]{\quad}$ 的意义有所不同. 例如, 在实数范围内, $\sqrt{1}$ 只表示 1 的算术根 1, 在复数范围内 $\sqrt{1}$ 就表示 1 的两个平方根 ± 1 . 又如, 在实数范围内, $\sqrt[3]{-1}$ 只表示实数 -1 , 但在复数范围内, $\sqrt[3]{-1}$ 就表示 -1 的三个立方根 $-1, -\omega, -\omega^2$. 在复数范围内 $\sqrt{-1}$ 表示 -1 的平方根为 i 与 $-i$.

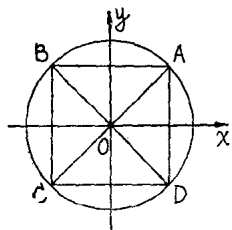


图 1.2

例. 解方程 $z^4 + 1 = 0$. 且证明在复平面内表示这个方程的根的四点是一个正方形的顶点.

$$\text{解: } \because z^4 + 1 = 0$$

$$\therefore z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi}$$

$$= \cos \frac{2k\pi + \pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{4}.$$

$$(k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\text{因此, } z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),$$

$$* \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

$$z_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

在复平面内作出表示上述四个根的点 A 、 B 、 C 、 D ，并连结 AB 、 BC 、 CD 、 DA (如图1.2)。

$$\begin{aligned} \therefore |z_k| &= \sqrt{\left(\cos \frac{2k\pi + \pi}{4}\right)^2 + \left(\sin \frac{2k\pi + \pi}{4}\right)^2} \\ &= 1. \quad (k=0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

$$\therefore OA = OB = OC = OD.$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{且 } \angle AOC = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi, \quad \angle BOD = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \pi,$$

$\therefore AC$ 与 BD 互相垂直平分。

故得 $ABCD$ 为正方形。

1.7 复数的和、差的几何表示及其模的不等式

利用复数与向量的对应关系，对复数的加法和减法，即复数的和、差的意义，不难作出几何解释。

因为复数可以用平面上的向量来表示，所以我们可以利用向量相加、相减而得到复数的和、差的几何表示。

以 \vec{OA}_1 、 \vec{OA}_2 为边的平行四边形，由向量相加的公式，得知这个平行四边形的对角线 (如图1.3) 就是 $A_1 + A_2$ 。

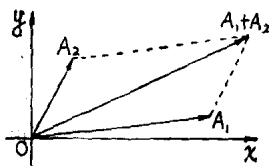


图 1.3

由于 $A_1 - A_2 = A_1 + (-A_2)$ ，我们只要按照平行四边形法