复 变 函 数 论

周正中编

广 西 人 民 出 版 社

复 变 函 数 论

周正中 编

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行　　柳州市印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1／32　印张 10.625　字数 269,000

1982年11月第1版　1982年11月第1次印刷

印数 1—5,200 册

书号：7113·443　　定价：1.30元

目　录

第一章　复　数

复数是复变函数论的预备知识．为了读者学习方便起见，我们在这里先叙述有关复数的概念、复数的运算、复数的几何表示以及复数的模与辐角公式等方面的知识．

1.1　复数的概念

形如$A=a+ib$的数，称为**复数**．其中a和b是任意的实数，i适合于$i^2=-1$，称为虚数单位．实数a和b分别称为复数A的实部和虚部，分别记为：$a=\mathrm{Re}A$；$b=\mathrm{Im}A$．

两个复数相等是指它们具有相等的实部与相等的虚部．虚部为零的数：$A=a+i0$ 写作$A=a$ 且看作与实数a相同．特别是，把数$0+i0$看作与零相同．这样，实数便可看作复数的特殊情形．实部等于零的复数$A=0+ib$写作$A=ib$，称为纯虚数．

1.2　复数的四则运算

现在我们来定义复数的四则运算．由于实数是复数的特例，因此，规定复数四则运算（加、减、乘、除）的一个基本要求是：复数运算的法则施行于实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数四则运算能够满足实数四则运算的一般定

律.

复数的加（减）法按实部与实部相加（减），虚部与虚部相加（减），即复数$A_1=a_1+ib_1$，$A_2=a_2+ib_2$相加（减）的法则是

$$A_1\pm A_2=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2).$$

结果仍是复数. 我们称复数A_1+A_2是A_1与A_2的和，称复数A_1-A_2是A_1与A_2的差.

复数的加法遵守交换律与结合律，而且减法是加法的逆运算，这些都是容易验证的.

两个复数$A_1=a_1+ib_1$及$A_2=a_2+ib_2$相乘，可按多项式乘法法则来进行，只须将结果中的i^2换成-1，即

$$A_1A_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2).$$

结果仍是复数，我们称它为A_1与A_2的积.

也易验证，复数的乘法遵守交换律与结合律，且遵守乘法对于加法的分配律.

两个复数$A_1=a_1+ib_1$及$A_2=a_2+ib_2$相除（除数不是0）时，可先把它写成分式的形式，然后分子分母同乘以一个与分母的实部相等而虚部只相差一个符号的复数，再进行化简，即

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

结果仍是复数，我们称它为A_1与A_2的商. 这里除法是乘法的逆运算. 复数全体构成一个域（体）.

例 化简 $\dfrac{(2+3i)^2}{2+i}$.

解：
$$\frac{(2+3i)^2}{2+i}=\frac{4-9+12i}{2+i}=\frac{(-5+12i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{-10+12+29i}{4+1}=\frac{2+29i}{5}.$$

1.3 共轭复数

实部相等而虚部只相差一个符号的两个复数，叫做**共轭复数**.

设$A=a+ib$，记A的共轭复数为$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=a-ib.$$

显然，$\overline{A}$的共轭复数是A，即$\overline{\overline{A}}=A$。因此，$A$与$\overline{A}$互为共轭复数.

因为0的相反数仍旧是0，所以当一个复数的虚部为0时，即这个复数是实数时，它的共轭数就是它本身。于是得：当A为实数时，则$A=\overline{A}$。反之，当$A=\overline{A}$时，得$\mathrm{Im}A=-\mathrm{Im}A$。所以$\mathrm{Im}A=0$，从而得$A$为实数。综合起来，我们得：

A与$\overline{A}$相等的充要条件是A为实数.

设$A=a+ib$，$B=c+id$，则关于它们的共轭复数有下列性质：

1° $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$.

这是因为 $\overline{A+B}=\overline{a+c+i(b+d)}=a+c-i(b+d)$，

而 $\overline{A}+\overline{B}=a-ib+c-id=a+c-i(b+d)$，

所以 $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$.

2° $\overline{A\cdot B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$，

这是因为 $A\cdot B=(a+ib)(c+id)$

$$=ac-bd+i(bc+ad),$$

所以 $\overline{A\cdot B}=ac-bd-i(bc+ad)$.

又因 $\overline{A}\cdot\overline{B}=(a-ib)(c-id)=ac-bd-i(bc+ad)$，

所以 $\overline{A\cdot B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

3° 当$B\neq 0$时，$\overline{\left(\frac{A}{B}\right)}=\frac{\overline{A}}{\overline{B}}$，

令 $C=\frac{A}{B}$， 则 $A=B\cdot C$，由2°得

$$\overline{A}=\overline{B}\cdot\overline{C}，所以\overline{C}=\frac{\overline{A}}{\overline{B}}.$$

利用性质1°与2°，我们还可以得到方程求根的一个应用．若z_0是方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0 \qquad (1)$$

的一个根，则$\overline{z_0}$是方程

$$\bar{a}_0z^n+\bar{a}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{a}_{n-1}z+\bar{a}_n=0 \qquad (2)$$

的根．

特例，若a_0，a_1，$\cdots a_{n-1}$，a_n是实数，则z_0与$\overline{z_0}$都是方程（1）的根，这就是实系数代数方程（有理整方程）虚根成对定理．

1.4 复数的几何表示法

我们早就知道一对排定了顺序的实数（a，b），可以用平面直角坐标系里唯一的点$A(a, b)$来表示，反之，在平面直角坐标系里的每一个点$A(a, b)$，也都唯一地表示着一对排定了顺序的实数（a，b）．即平面直角坐标系的点和一对排定了顺序的实数之间，可以建立一一对应的关系．

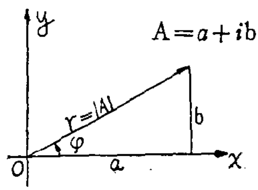

图 1.1

从复数$a+ib$的定义可以看出，复数也是由一对排定了顺序的实数a和b构成的，这里实部a和虚部b分别相当于点

$A(a, b)$的横坐标和纵坐标，所以，一个复数$A=a+ib$可以用平面直角坐标系的点$A(a, b)$来表示，这时作为复数$A=a+ib$的几何表示是以横坐标为a，纵坐标为b的点。

复数A还能用从原点指向点(a,b)的向量来表示（图1.1），这时复数$A=a+ib$解释为用横轴上的射影为a，纵轴上的射影为b的向量来表示。

今后，我们可以用几何的术语，即用平面上的点或向量来代替相应的复数的说法。表示复数的点（或向量）所在平面，叫做复平面。对应于数0的坐标原点简称原点。横轴称为实轴，纵轴称为虚轴。

在这里我们顺便指出复数不能定义大小关系，因为一般的复数可以用平面向量来表示，而向量本身不定义大小关系，所以复数也不能定义大小关系。因此，对于复数A，B之间只有$A=B$或$A\neq B$，不存在$A<B$或$A>B$的关系，当然这样的复数A，B至少有一个不是实数。

复数A除了用平面的点或向量表示外，还可以用三角表示法（这时要假定复数$A\neq 0$）。

根据直角坐标与极坐标之间的变换关系

$$a=r\cos\varphi; \qquad b=r\sin\varphi,$$

我们立刻可将复数$A=a+ib$表示为

$$A=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{1}$$

这叫做复数A的三角表示式，与之相对应，式子$a+ib$叫做A的代数式。

（1）式中的r叫做复数A的模或绝对值，它是点A到原点的距离，也就是从原点出发，终点在A的向量长度。在极坐标系中r就是点A的向径，记为$r=|A|$（图1.1），因此，

$$|A|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{A\overline{A}}, \qquad |A|^2=A\overline{A}.$$

（1）式中的φ称为复数A的辐角，它是向量$\overrightarrow{OA}$与横轴的

正向所成的角。

数 0 是唯一的以零为模，辐角没有定义的复数。

若φ是复数A的辐角，则$\varphi+2n\pi$（n是整数）也是A的辐角，所以A的辐角的值有无穷之多，记为$\mathrm{Arg}A=\varphi+2n\pi$，（$n=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，…）。

满足$-\pi<\varphi\leqslant\pi$的辐角叫做A的辐角的主值，记为

$$\varphi=\arg A。$$

于是 $\mathrm{Arg}A=\arg A+2n\pi$。（$n=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，…）

例1. 求复数$4(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$的模与辐角。

注意这里$4(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$还不是$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$的形式，所以不能直接看出它的辐角是什么，因此，还需要把它化为三角形式。

解：因为$\cos(-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}$，

$$\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3},$$

所以 $4(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})=4[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$

由此可知，这个复数的模是 4，辐角是$-\frac{\pi}{3}+2n\pi$（$n=0$，± 1，± 2，…）。

例2. 求复数$A=\frac{1-i}{1+i}$的实部、虚部、模与辐角。

解：因为 $A=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$，

所以，$\mathrm{Re}A=0$，$\mathrm{Im}A=-1$，$\arg A=-\frac{\pi}{2}$，

$\mathrm{Arg}\,A=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$，（$n=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，…）$|A|=1$。

注意：我们有时也把$\mathrm{Arg}Z$的任一个确定的值，都记作$\arg Z$，例如也可以取$0<\arg Z\leqslant 2\pi$。

1.5 复数的模与辐角公式

设 $A_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$;

$A_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

根据复数乘法法则，容易算出

$$A_1A_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)]$$
$$= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

所以 $|A_1A_2| = r_1r_2 = |A_1|\cdot|A_2|$, (1)

$\mathrm{Arg}(A_1A_2) = \mathrm{Arg}A_1 + \mathrm{Arg}A_2$. (2)

注意，公式（2）只有在辐角允许相差2π的整数倍的值的条件下才能成立．这个等式应理解为$\mathrm{Arg}(A_1A_2)$的任一值，一定有$\mathrm{Arg}A_1$及$\mathrm{Arg}A_2$的各一值与它对应，使得等式成立，反过来也是这样．如果在（2）式中我们规定2π的整数倍数的值不计在内，应有

$$\arg(A_1A_2) = \arg A_1 + \arg A_2$$

利用数学归纳法，我们可以推出n个复数A_1，A_2，…，A_n相乘的三角表示式的公式

$$A_1A_2\cdots A_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)],$$

其中$A_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)(k = 1, 2, \cdots, n)$．于是得$n$个复数$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的模与辐角公式

$$|A_1A_2\cdots A_n| = |A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_n|;$$

$$\mathrm{Arg}(A_1A_2\cdots A_n) = \mathrm{Arg}A_1 + \mathrm{Arg}A_2 + \cdots + \mathrm{Arg}A_n.$$

特例，当$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$时，得

$$|A^n| = |A|^n; \qquad \mathrm{Arg}A^n = n\mathrm{Arg}A.$$

由此，导出德摩弗(De Moivre)公式

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n[(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)].$$

例1． 计算$(\sqrt{3}-i)^6$。

解： 因为 $\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$，

所以 $(\sqrt{3}-i)^6=\left[2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right]^6$

$$=2^6[\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)]$$

$$=64(\cos\pi-i\sin\pi)=-64.$$

下面我们来导出两个复数的商的模与辐角公式。

设$A_2\neq0$，则$A_1=\frac{A_1}{A_2}\cdot A_2$，由模与辐角的乘积公式得

$$|A_1|=\left|\frac{A_1}{A_2}\right|\cdot|A_2|$$

与
$$\mathrm{Arg}A_1=\mathrm{Arg}\frac{A_1}{A_2}+\mathrm{Arg}A_2,$$

于是得
$$\left|\frac{A_1}{A_2}\right|=\frac{|A_1|}{|A_2|} \tag{3}$$

$$\mathrm{Arg}\frac{A_1}{A_2}=\mathrm{Arg}A_1-\mathrm{Arg}A_2 \tag{4}$$

例2． 求证

$$\frac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

证明：因为左端

$$=\frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right](\cos\theta+i\sin\theta)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right][\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]}$$

$$=\frac{2\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]}$$

$$=\sqrt{2}\ [\cos(\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\theta)+i\sin(\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\theta)]$$

$$=\sqrt{2}\ [\cos(2\theta-\frac{\pi}{12})+i\sin(2\theta-\frac{\pi}{12})]=\text{右端},$$

所以，等式成立。

1.6 复数的方根

设 n 是自然数，$A\neq 0$，我们定义复数 A 的 n 次方根 $\sqrt[n]{A}$ 为一个自乘 n 次后等于 A 的复数。设此复数为 z，则 z 满足方程

$$z^n=A \qquad (1)$$

为解此方程，我们令

$$A=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

代入（1）得

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

因为，两个复数相等时，它们的模数必须相等，而辐角可以相差 2π 的整数倍，所以

$$\begin{cases}\rho^n=r\\ n\theta=\varphi+2k\pi\end{cases}\qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

由此可知 $\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r} & \text{（因为}\rho\text{是模数，所以只取算术根）}\\ \theta=\dfrac{1}{n}(\varphi+2k\pi)\end{cases}$

因为 $\sin\varphi$，$\cos\varphi$ 都是以 2π 为周期的周期函数，故得 A 的 n 次方根的值为

$$z_k=\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

就几何方面说，这 n 个根是以原点 O 为心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点。

当$A=1$时特别重要，若令

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

则1的n次方根为

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-1}.$$

注意：在实数范围内和在复数范围内，记号$\sqrt[n]{\ }$的意义有所不同。例如，在实数范围内，$\sqrt{1}$只表示1的算术根1，在复数范围内$\sqrt{1}$就表示1的两个平方根± 1。又如，在实数范围内，$\sqrt[3]{-1}$只表示实数-1，但在复数范围内，$\sqrt[3]{-1}$就表示-1的三个立方根-1，$-\omega$，$-\omega^2$*.在复数范围内$\sqrt{-1}$表示-1的平方根为i与$-i$。

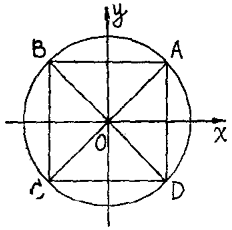

图 1.2

例. 解方程$z^4+1=0$。且证明在复平面内表示这个方程的根的四个点是一个正方形的顶点.

解：$\because\quad z^4+1=0$

$$\therefore\quad z=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}$$

$$=\cos\frac{2k\pi+\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{4}.$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

因此，$z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

---

* $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

$$z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

在复平面内作出表示上述四个根的点 A、B、C、D，并连结AB，BC，CD，DA（如图1.2）.

$$\because\quad |z_k|=\sqrt{\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)^2}$$

$$=1. \qquad (k=0,1,2,3)$$

$$\therefore\quad OA=OB=OC=OD.$$

$$\because\quad \angle AOB=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

且 $\angle AOC=\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=\pi$，$\angle BOD=\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{4}=\pi$，

$\therefore$ AC与BD互相垂直平分.

故得$ABCD$为正方形.

1.7 复数的和、差的几何表示及其模的不等式

利用复数与向量的对应关系，对复数的加法和减法，即复数的和、差的意义，不难作出几何解释.

因为复数可以用平面上的向量来表示，所以我们可以利用向量相加、相减而得到复数的和、差的几何表示.

以$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$为边的平行四边形，由向量相加的公式，得知这个平行四边形的对角线（如图1.3）就是A_1+A_2.

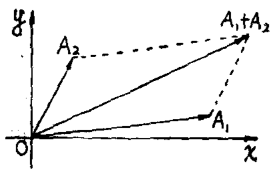

图 1.3

由于$A_1-A_2=A_1+(-A_2)$，我们只要按照平行四边形法