常微分方程离散变量方法

P. 亨利西 著

包雪松 徐洪义 吴新元 译

刘德贵 校

科 学 出 版 社

1 9 8 5

内 容 简 介

本书共分三部分：第一部分介绍一阶微分方程及高阶微分方程组的单步方法，并详细分析了这些方法的离散误差及舍入误差，特别是系统地阐述了舍入误差的概率理论。第二部分讨论一阶及二阶特殊微分方程的线性多步方法，并研究了它们的离散误差及舍入误差的传播。第三部分讨论一类二阶非线性边值问题的直接方法并对误差进行了估计。书中每章末附有习题和对该章内容所做的注释。

本书可供计算数学工作者、有关的工程技术人员及高等学校有关专业的教师、学生参考，亦可作为高等学校计算数学专业的教材。

Peter Henrici
DISCRETE VARIABLE METHODS IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
John Wiley & Sons, 1962

常微分方程离散变量方法
P. 亨利西 著
包雪松 徐洪义 吴新元 译
刘德贵 校

责任编辑 向安全 林 鹏

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年1月第 一 版　　开本：787×1092 1/32
1985年1月第一次印刷　　印张：15 3/8
印数：0001—8,000　　字数：352,000

统一书号：13031·2783
本社书号：3825·13—1

定价 3.60 元

译 者 的 话

P. 亨利西著《常微分方程离散变量方法》一书出版于1962年，我们当即译出作为计算数学专业高年级专业课的教材，教学效果较好，书中提出的某些问题曾作为学生的毕业论文予以完成．该书问世至今已近二十年，在此期间，国际上相继出版了不少常微分方程数值解法方面的著作，其中很多是优秀作品．就在这些优秀著作中，在重要理论的叙述和关键公式的推导方面，经常引用 Henrici 的这本书或者建议读者参看这本书．近年来，国内同行普遍认为将该书译成中文是有价值的，鼓励我们整理初稿，予以出版，以飨读者．

这里，我们特别感谢刘德贵同志，他对译稿进行了详尽的校阅；我们还对王长富同志的校对工作表示感谢．

译 者

1981.2.

序

本书既准备作为大学高年级的教科书，同时还介绍最新的重要理论结果．本书的基础部分着重于叙述基本概念以及有实质性意义的问题，而不是像手册那样列举专门技术的细节，这一点反映了我对讲授数值分析的看法．本书大部分较深的内容(特别是误差传播方面的材料)是新的．

我曾为数学工作者以及爱好数学的工程师和物理学家多次讲过题为“微分方程数值解法”的课程，本书来源于这一课程的讲稿．这一课程所包括的主要内容，大约为现在这本书的第一、二章和第五章的前半部分．对于这些内容，必须具备的预备知识是微分方程的初等教程、高等微积分的某些部分和一些关于计算机计算的知识(在洛杉矶加州大学，这些关于计算机计算的知识，通过选学一门一个学分的初等程序设计课程就可获得)．第三、四章和第七章需要一些矩阵和线性代数的知识．第五及第六章的某些部分需有初等复变函数理论方面的准备知识．

每章最后所附的习题主要是理论性的．显然，一个学生要想完全理解本书中介绍的算法，就必须将它们应用到具体的实际问题上去．然而，能够合理地要求一个学生所求解的问题的大小，在很大程度上取决于可供其使用的计算设备．由于这个原因，对于数值计算的问题除了某些例外都留给教师自行选择．

影响到我对问题的见解的形成的因素是多方面的，这里只能提及几个方面．关于多步法的几章，它们现在的表达形式

很多来源于 Dahlquist [1956,1959] 的两篇重要文章;关于数值稳定性的几节,基于 Rutishauser [1952]的工作;关于 Runge-Kutta 方法的几节,基于 Gill [1951] 的工作;关于采用的记号、计算的专门知识和过去的参考文献,则主要依据 Collatz [1960] 的工作。

P. 亨利西

1961 年 9 月

加利福尼亚,洛杉矶

目　　录

引言 …… 1
0.1. 定义. 问题的分类 …… 1
0.2. 求解微分方程的数值方法的必要性 …… 2
0.3. 离散变量方法 …… 4
注 …… 5

第I部分　初值问题的单步方法

第一章　一阶单个方程的 Euler 方法 …… 6
1.1. 引言 …… 6
1.2. 初值问题解的存在性 …… 12
1.3. Euler 方法的离散误差 …… 25
1.4. Euler 方法的舍入误差 …… 36
1.5. 随机变量 …… 44
1.6. 舍入误差的概率理论 …… 54
1.7. 求解的问题 …… 66
注 …… 70
第二章　一阶单个方程的一般单步方法 …… 72
2.1. 特殊单步方法 …… 73
2.2. 一般单步方法的离散误差 …… 80
2.3. 一般单步方法的舍入误差 …… 100
2.4. 求解的问题 …… 115
注 …… 123
第三章　一阶方程组的一般单步方法 …… 125
3.1. 理论上的介绍 …… 125

3.2. 方程组的特殊单步方法 …………………………………… 135
3.3. 单步方法的离散误差 ………………………………………… 143
3.4. 用单步方法积分方程组的舍入误差 ……………………… 161
3.5. 求解问题 ……………………………………………………… 186
注 ………………………………………………………………… 193
第四章 高阶方程组的单步方法………………………………… 194
4.1. 引言 …………………………………………………………… 194
4.2. 高阶方程组的数值方法………………………………………… 198
4.3. 离散误差 ……………………………………………………… 205
4.4 舍入误差传播 ………………………………………………… 211
4.5. 求解的问题 …………………………………………………… 215
注 ………………………………………………………………… 219

第II部分 初值问题的多步方法

第五章 一阶方程的多步方法………………………………… 221
5.1. 特殊的多步方法 ……………………………………………… 221
5.2. 线性多步方法的一般讨论 …………………………………… 248
5.3. 线性多步方法的离散误差 …………………………………… 282
5.4. 多步方法积分的舍入误差 …………………………………… 315
5.5. 问题及附注 …………………………………………………… 338
注 ………………………………………………………………… 346
第六章 二阶特殊方程的线性多步方法………………………… 350
6.1. 线性多步方法的局部研究 …………………………………… 351
6.2. 离散误差 ……………………………………………………… 378
6.3. 舍入误差的传播 ……………………………………………… 386
6.4. 差分方程的求和形式 ………………………………………… 398
6.5. 问题及附注 …………………………………………………… 412
注 ………………………………………………………………… 417

第III部分 边值问题

第七章 一类二阶非线性边值问题的直接方法………… 421
7.1. 求解的方法 ………………………………………… 421
7.2. 差分方程解的存在性 ……………………………… 433
7.3. M类边值问题的离散误差 ……………………… 453
7.4. 舍入误差的影响 …………………………………… 458
7.5. 问题和补充附注 …………………………………… 465
注 ………………………………………………………… 471
参考文献………………………………………………… 473

引　言

0.1. 定义. 问题的分类

令 $-\infty < a \leqslant \infty$. 我们用 $[a,b]$ 表示满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有的实数 x 的集合. 如果 $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$, 我们用 (a,b) 表示满足 $a < x < b$ 的所有 x 的集合. 符号 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 按照类似方式来使用. 令 p 是一个整数且 $p \geqslant 1$, 又令 $a < b$ 且 $F(x, y_0, y_1, \cdots, y_p)$ 是定义在 $x \in [a, b]$ 和 $(y_0, y_1, \cdots, y_p) \in D$ 中的实函数, 其中 D 是实 $(p+1)$-维 Euclid 空间的一个区域. 方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(p)}) = 0 \tag{0-1}$$

称为 p 阶微分方程. 若函数 $y(x)$ 有定义且在 $[a, b]$ 的一个子区间 I 上 p 次可微, 当 $x \in I$时, 点$(y(x), y'(x), \cdots, y^{(p)}(x))$ 在D中, 并使得

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(p)}(x)) = 0, \quad x \in I \tag{0-2}$$

成立, 则称 $y(x)$ 为微分方程的一个解. 从简单的例子便可知道, 一个给定的微分方程, 可以有许多解. 例如, 若 $p = 1$, 而且 $F(x, y_0, y_1) = y_0 - y_1$, 则每一个函数 $y(x) = Ce^x$ ($C=$常数)为一个解. 为了确定给定的微分方程的一个解, 通常需要说明它的某些附加性质, 例如在指定的点上给出函数值或它的导数值. 结果是: 一个 p 阶方程一般恰好需要 p 个定解条件. 一个重要的特殊情况是以条件

$$\begin{aligned} y(a) &= \eta_0, \\ y'(a) &= \eta_1, \end{aligned} \tag{0-3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(p-1)}(a)=\eta_{p-1}$$

所表示的，其中 $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{p-1}$ 为已知常数. 确定 $y(x)$ 使它满足 (0-2) 和 (0-3) 的问题称为初值问题. 边值问题是这样的问题，函数 $y(x)$ 以及(或)它的某些导数在几个不同的点上取指定的值.

当 $p=1$ 时是最简单的初值问题. 通常假设 (0-1) 已就最高阶导数解出，于是一阶初值问题形如

$$y'=f(x,y),\ y(a)=\eta, \tag{0-4}$$

其中 η 为一常数. 为了避免较烦的讨论，我们将总假设函数 $f(x,y)$是对 $x\in[a,b]$ 以及对所有有限的 y 都有定义. 在第一章、第二章及第六章里将研究这类初值问题，第三章考虑一阶方程组的初值问题，第四章和第六章考虑阶 >1 的方程的初值问题，第七章则为处理二阶方程的边值问题.

0.2. 求解微分方程的数值方法的必要性

例如 (0-4) 这样一个初值问题，它的解在数学上的存在性，对于 $f(x,y)$ 来说，可以在非常一般的条件下得到证明. 第一章给出了基本存在定理的概述，而在第三章叙述方程组的情形. 然而在微分方程的许多应用中，所要求的不仅是解在数学上的存在性——这一点常常可以从非数学的考虑得到证明——而且是解在自变量的指定范围内取值时它的(近似)数值. 关于这方面的情况是很少令人满意的. 对某些实际上是重要的但却是十分特殊的微分方程类，它的解可用封闭形式给出，即以初等函数诸如多项式、指数函数、对数函数以及这些函数的不定积分的有限组合给出. 另一方面，许多其它的微分方程，并不能按照这种方式来求解，即使外形看来是简单的微分方程，例如

$$y' = x^2 + y^2 \text{ 或 } y'' = 6y^2 + x.$$

已经证明它们的解不能以初等函数来表示．的确，虽然有相当一类具有显式解的微分方程(见 Kamke [1943])，但可以肯定地说，大多数微分方程不能求得其显式解．必须重视的是，即使在显式解存在的情形下，寻找它的数值解的问题也不一定是轻而易举的．从某种程度上来说，对简单的初值问题 $y' = y, y(0) = 1$ 也是如此．为了求得解的数值，人们必须计算或者查表，可能还要对 e^x 进行插值．另一个例子，方程 $y' = 1 - 2xy$ 的解为$y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$．为了确定 $y(x)$ 的数值，人们必须计算一个积分，而它又不能用初等函数来表示，并且也没有合适的表可查．面对显式解的明显的局限性，数学家在用解析方法处理微分方程问题的早期，就开始使用具有更广泛适应性的近似方法．级数展开方法与 Picard-Lindeöf 迭代法是两个具有历史意义的例子．

微分方程的级数解的研究曾吸引了一些第一流的数学家，从而导致特殊解析函数理论的重要发展．目前，微分方程在什么情况下可以有简单的级数解，已经了如指掌．它们也不过形成了十分有限的一类．例如，虽然微分方程

$$y'' + \frac{A}{x}y' + \left(\frac{B}{x^2} + C + Dx^2\right)y = 0$$

($A, B, C, D =$ 常数)可以漂亮地用某种超越几何级数来解出，若将项 Dx^2 换成 Dx^3，则不存在这样简单的解．即使令级数解存在，对自变量的很多数值来说，它都可能收敛得很慢．在非线性微分方程的情形下，除了开头少数几项而外，要决定所有的系数，通常都是困难的．对于具有跳跃间断的方程来说，情况则更坏一些．

逐次逼近法是(偏和常)微分方程理论研究中的一个重要

工具，然而它作为解的数值计算的有效方法，其价值经常都是夸大其词的. 作者没有见过一个微分方程可用逐次逼近法求其数值解而却不能以某些其它方法更方便地求解的例子.

0.3. 离散变量方法

本书将处理基于离散化原理的求常微分方程近似解的那些方法.这些方法的共同特点是，并不试图在自变量的整个连续区间上去逼近精确解 $y(x)$，只是在离散点 x_0, x_1, x_2, $\cdots$ 的一个集合上来考虑近似值. 通常点 x_n 不一定都是等距的. 如果它们是等距的，我们就把它写成 $x_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 量 h 称为步长大小，步长宽度或简称方法的步长. 一般来说，求解微分方程的离散变量法是由一个算法组成的，这个算法使每个网格点 x_n 对应一个数 y_n，而 y_n 被认为是在 x_n 点精确解 $y(x_n)$ 的近似值. 我们将考虑的主要问题之一是被称为离散误差 $e_n = y_n - y(x_n)$ 的这个量的大小，特别是它可作为步长 h 的一个函数.

与早期提到的一些方法相反，离散变量方法具有几乎是普遍可应用的优点. 例如，就初值问题 (0-4) 而言，对大多数离散变量方法的可应用性的唯一要求是对给定的 x 及 y 能计算出 $f(x,y)$ 的一个好的近似值[1]. 确实，为了保持离散误差充分小，可能需要对函数 $f(x, y)$ 进行多次的计算. 一度曾限制了离散变量方法的应用，今天就无需考虑这一点了. 当大量的数值计算，特别当计算具有多次重复性质时，可以在自动数字计算机上有效并可靠地得到完成.

在解初值问题的离散变量的方法中，我们可以将单步方法和多步方法加以区分. 在一个单步方法中，如果只知道

---

1) 例如，在某些情形下，所给出的函数 $f(x, y)$ 为经验的或是一个数值表，这一点就不是一个可有可无的要求了.

y_n 就可以得到 y_{n+1}，而无需知道或存储任何前面的值 y_{n-1}，y_{n-2}，$\cdots$. 对于多步法来说，在计算 y_{n+1} 时需要知道的不仅是 y_n，还要知道前面的一些值 y_{n-1}，y_{n-2}，$\cdots$. 如果为了计算 y_{n+1}，而要求知道 $y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n+1-k}$ 值，则是 k 步方法.

在单步方法中，出发点没有特殊的作用. 事实上，每一个网格点可以看作一个新的出发点，这就易于改变步长. 多步方法要求一个特殊的初始处理，由于在点 x_0，$x_1, \cdots, x_{k-1}$ 上对计算来说缺少必须具备的某些出发值 y_{n-j}，同时在步长改变的点上也需要一个特殊的计算，所有这些便增加了所需机器代码的长度和复杂性. 另一方面，多步方法可能较单步方法更为精确. 这二类方法的进一步的相对优越性将在以后讨论. 由于在这二种情形中基础理论的不同，故有必要分别处理这二类方法. 第一章至第四章中考虑单步方法，第五章至第七章中考虑多步方法.

注

§0.2. 在大多数微分方程书中都论述了级数展开法和逐次逼近法，例如 Levy 和 Baggott [1934]，Milne [1953]，Warga [1953]，Cernysenko [1958]，Franklin [1952] 都曾讨论了它们在数值解方面的应用.

第I部分　初值问题的单步方法

第一章　一阶单个方程的 Euler 方法

对于初值问题的近似解，Euler 方法（见 Euler [1913]，p. 422；Euler [1914]，p. 271）不仅在所有单步法中而且在所有方法中都是最简单的．对于实际的数值问题，并不推荐 Euler 方法，因为它的精确度是十分有限的．尽管如此，我们还将详细研究 Euler 方法，因为它能很明显的显示出对更为复杂的方法也具有的一些特性．特别，这里介绍的离散误差和舍入误差的基本现象易于研究，因为这个方法分析简便．全章都假设 h 为定步长．

1.1. 引言

1.1-1. Euler 方法的定义．　在 Euler 方法中，值 y_n 是按照如下公式：

$$y_0 = y(a) = \eta, \tag{1-1a}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1-1b}$$

递推计算出来的．　这些公式本身就给出一个明显的几何解释．我们把微分方程 $y' = f(x, y)$ 看成在 (x, y) 平面的带形 $a \leqslant x \leqslant b$ 内确定方向场的一个方程．于是求解微分方程的问题在几何上相当于确定这样一条曲线，它通过给定初始点

(x_0, y_0)，并且在其上每一点的斜率与由方向场所规定的斜率一致．由(1-1)确定的点(x_n, y_n)可作为折线的顶点，折线通过准确的初始点且具有这样的性质，每段都具有在它的左端点的方向场规定的方向．

公式(1-1)还可以有几个解析解释．

(i) 如果我们用向前差商在点(x_n, y_n)处逼近微分方程中的导数，则得到

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{n}=f(x_n, y_n),$$

解出y_n便得(1-1b)．

(ii) 在积分限x和$x+k$之间积分恒等式

$$y'(t)=f(t, y(t)),$$

得到
$$y(x+k)-y(x)=\int_x^{x+k} f(t, y(t))dt.$$

特别，如果$x=x_n$和$k=h$，则

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt.$$

用数值积分的粗糙公式（积分区间的长度乘被积函数在左端点上的值）来近似这个积分，并且把$y(x_n)$恒同于y_n，我们仍得(1-1)．

(iii) 假设在点x_n附近能够把解用 Taylor 级数展开：

$$y(x_n+h)=y(x_n)+hf(x_n, y(x_n))+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+\cdots.$$

公式(1-1)是截去这个级数在h的线性项以后的结果．

上述每一个解释均指出，在以后各章中要讨论的 Euler 方法一类推广途径．有趣的是，用(i)(数值微分)所表示的推广，似乎是最直接的，但已经证明是三种推广中成效最少的．

1.1-2. 计算上的研究． Euler 方法的价值并非因为它作为一个计算过程，而是为了便于与以后所要讨论的更为复杂

的方法相比较．在图 1.1 中，我们用通常的表示法给出数字计算机上使用 Euler 方法求解初值问题(0-4)的框图．

由于同样的原因，我们在表 1.1 中列出用步长 $h=0.1$ 时 Euler 方法对初值问题

$$y'=x-y^2,\ y(0)=0 \tag{1-2}$$

进行数值积分时的前几个值．在 §2.1-2 和 §5.1-2 中要用更精确的方法来处理这个同样的问题．箭头表示计算数值的顺序．

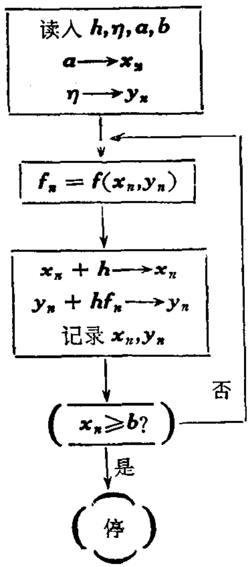

图 1.1 Euler 方法的框图

表 1.1 Euler 方法的数值例证

x_n	y_n	$f(x_n,y_n)$
0	0	0
0.1	0	0.10000
0.2	0.01000	0.19990
0.3	0.02999	0.29910
0.4	0.05990	

在求解微分方程的任何一个数值方法中，数值工作大部分用于对自变元的不同值计算出函数 $f(x,y)$ 的值．因此，通常每积分一步计算函数 $f(x,y)$ 值的次数便成为衡量任何一个方法所要求的计算工作量的标准．我们将称这个次数为置换的特定的数．对于 Euler 方法，这个次数显然为 1．

1.1-3. 一个解析例子．如果 $f(x,y)$ 是十分简单的函数，便有可能对 y_n 求解递推关系式(1-1)，并且可求出 y_n 作为 n 及 h 的函数的显式表达式．这样一个显式解很少有实际意

义，因为它通常只在微分方程本身用封闭形式可求解的情形下才能求出来．但是，在研究所考察的方法的理论性质时，它是有帮助的．

我们来求初值问题 $y'=y$，$y(0)=1$ 解的 Euler 近似显式形式．在这里有 $f(x,y)=y$，因此 (1-1b) 化成

$$y_{n+1}=y_n+hy_n=(1+h)y_n,\ n=0,1,2,\cdots.$$

由于 $y_0=1$，我们求得 $y_1=1+h$，$y_2=(1+h)y_1=(1+h)^2$，一般地，

$$y_n=(1+h)^n,\quad n=1,2,\cdots.$$

因为 $n=x/h$，从而在点 $x_n=x$ 近似解的值由公式

$$y_n=(1+h)^{x/h}=[(1+h)^{1/h}]^x$$

给出．根据微积分中 [Taylor [1955], 74 页] 众所周知的定理，当 $h\to 0$ 时，它趋向于 e^x．于是我们已经证明，在所考虑的特例中，当减小网格的大小时，便能任意好地逼近初值问题的精确解．

1.1-4. *数值方法的误差．* 求解微分方程的数值的逐步方法的误差应归结于两个来源．第一个来源是由于用固定步长 h 的方法提供的数 y_n，即使计算到无穷多位小数，它与真解对应的值 $y(x_n)$ 是极少一致的．这个差异必须预料到，因为一个数值算法事实上必定是有限次运算，即使是很简单的微分方程(例如 $y'=y$) 的解都是超越函数，因此不能用有限个有理运算来计算．差

$$e_n=y_n-y(x_n)$$

称为离散误差，通常也称为截断误差，这里 y_n 表示由算法给出的准确数值．

误差的第二个来源是由于在大多数情形下，数 y_n 不能计算到无限精确，因为任何计算工具都具有有限的精确度．我们记 $\tilde{y}_n$ 为代替 y_n 的真实计算的值．差