数学物理中的直接方法

C·Г·米赫林著

高等教育出版社

数学物理中的直接方法

C. Г. 米赫林著
周　先　意　譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国立科学技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的米赫林（С. Г. Михлин）著“数学物理中的直接方法”（Прямые методы в математической физике）1950年版譯出。原書是“工程师的数理叢書”之一，可供高級工程技术人員及科学研究人員的参考，也可供高等学校的数学系和物理系的教学参考。

数学物理中的直接方法

С. Г. 米赫林著

周先意譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業营業許可証出字第054号）

商務印書館上海廠印刷　新华書店总經售

統一書号 13010·351 开本 850×1168 1/32 印張 12 9/16 插頁 5 字数 306,000 印数 1—3,200

1957年10月第1版　1957年10月上海第1次印刷　定价(10) ¥2.30

序

在数学物理中，把微分方程論及積分方程論的問題，化为代数方程組；以求近似解的方法，称为直接方法①。

直接方法廣泛应用在工程計算的实踐中；应用它們已經解决了幷正在解决着大量重要的实际問題。在理論研究上直接方法也有着同样重要的地位。数学物理基本問題的解的存在問題就正好是利用直接方法得以完滿解决的；我們只要指出，劉斯捷尔尼克(Л. А. Люстерник)的名著[1]，他在那里，在各种最一般的有关區域边界的假定下，解决了拉普拉斯方程的狄立克雷問題，还有朔波列夫(С. Л. Соболев)的若干重要的工作与許多其他人的工作，这些工作都是应用直接方法的范例。

数学物理的直接方法的丰富文献散見在各个雜誌上；蒐集成册的作品很少。这里可以列举的是希尔伯特(D. Hilbert)与古朗特(R. Cowrant)的名著[2]的第II卷第七章，在那里应用了極小化序列法(著名的呂茲法的推廣)，來証明基本边界問題及二階橢圓型方程的特征値問題的解的存在。雷本頌(Л. С. Лейбензон)的很有趣味的著作[1]是用变分方法來講彈性理論的，其中牽涉到很多近似解法。在專門的著作中更詳細地講到了格網法；在伯列依赫(Ф. Блейх)与米蘭(Е. Мелан)[1]，馬尔古斯(Г. Маркус)[1]，巴諾夫(Д. Ю. Панов)[1,2]，瓦尔瓦克(П. М. Варвак)[1]，等人的著作中，用不同的观点和不同的深度敍述了格網法。在康托洛

① 例如在朔波列夫的教程[4]中曾經有过这样的定义。(方括弧中的数字是指附在書后的文献索引中的号碼。)

維奇(Л. В. Канторович)与克雷洛夫(В. И. Крылов)的卓越著作[1]中有着直接方法的許多知識。

在本書中我們要講我們認为是最重要的四种直接方法:能量法及其有关的呂茲法、伽遼金法、最小二乘方法及有限差分法。我們所要解决的主要問題乃是近似解收斂于准确解的性質問題。每当我們去近似地确定含一个或多个自变数的函数而不是去近似地确定一个数时,就免不了要產生这种問題。如果問題是要确定某个数 a,而我們要求它的近似数值 a_n,那末,要估計近似数值就只要估計差 $|a_n-a|$。花費同样的劳动而能得到最小量 $|a_n-a|$ 的那种近似計算法,我們認为是最好的。当所要求的元素是函数时,問題就变得極其复雜了。例如,假設 $f_n(x)$ 是 $f(x)$ 的近似值。差 $|f_n(x)-f(x)|$ 在不同的点处取不同的值,所以就不可能用 $|f_n(x)-f(x)|$ 來估計近似的程度。在这种情况下,必須用一个由函数 $|f(x)-f_n(x)|$ 确定的量來作为衡量誤差的尺度。最簡單的便是把量 $\rho_n=\max|f(x)-f_n(x)|$ 当作估量誤差的尺度;如果当 $n\to\infty$ 时 $\rho_n\to 0$,那末近似解就一致地趨近于准确解。也可以把量

$$\delta_n=\left\{\int_a^b|f(x)-f_n(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(a 及 b 是 x 变化范圍的兩端)当作估量誤差的尺度;如果 $\delta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,那末 $f_n(x)$ 平均收斂于 $f(x)$。与一致收斂比較,平均收斂是"比較坏的"收斂:从一致收斂性可以推出平均收斂性,而逆命題則不成立。在很多情形下,必須要求近似解的導数在某种意义下近似于准确解的对应導数;那时可以把

$$\rho_n^{(m)}=\max|f(x)-f_n(x)|+\sum_{k=1}^{m}\max|f^{(k)}(x)-f_n^{(k)}(x)|$$

或

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$\delta_n^{(m)}=\left\{\int_a^b |f(x)-f_n(x)|^2dx+\sum_{k=1}^m\int_a^b |f^{(k)}(x)-f_n^{(k)}(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}};$$

这兩个量中的任何一个当作估計誤差的尺度；$\rho_n^{(m)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ 表示，近似解及其到 m 階为止的導数都一致趨近于准确解及其对应的導数；同样，如果 $\delta_n^{(m)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，那末近似解及其到 m 階为止的導数都平均收斂于准确解及其对应的導数。也可以把別的量取作衡量誤差的尺度；不同的尺度所形成的近似解收斂于准确解的概念也就不同。

作出問題的近似解时，必須知道它近似于准确解到什么程度。由上所述，顯然这个問題还有着極其重要的一方面：近似解是在哪种意义下（一致，平均等等）近似于准确解的。

在本書中对于所考慮的每一个問題，我們都要尽可能回答上述的問題。必須指出，与十分流行的見解相反，收斂及收斂性質問題不只是具有理論上的价值：当实际应用近似解时这个問題就有着重要的意义。例如，假使已知近似解一致收斂于准确解，那末算出 $f_n(x)$ 以后，便可以求得 $f(x)$ 的任意精确的数值；但不能信憑函数 $f_n(x)$ 來作導数的近似計算。再者，如果 $f_n(x)$ 平均收斂于 $f(x)$，那末可以信憑近似解 $f_n(x)$ 來計算 $f(x)$ 在任何區間中的平均数値，但在个别的点上計算 $f(x)$ 的数値时，用 $f_n(x)$ 的值來代替 $f(x)$ 的值就不可靠了。

呂茲法、伽遼金法及最小二乘方法所得到的近似解（通常与其某些導数一起）都是平均收斂于准确解的。因此，必須以簡短而尽可能易懂的形式，來敍述希尔伯特空間的基本理論，沒有这个理論做基礎，我們認为是無从清晰地理解直接方法的精神实質的。我完全了解到，这个理論的研究可能因牽涉到新的概念而產生某种困难；但是，讀者在研究这个理論时所碰到的困难，我認为是完全上算的。第一章就講这个問題。第二、三、四章講能量法及呂茲

法。在第二章我們提出了变分問題，很多重要的数学物理問題都可以化为变分問題；在第三章对于这些問題中的大多数問題都确立了呂茲法的收斂性，而且还很簡單的研究了所提到的变分問題的另外一些解法［康托洛維奇的，屈萊弗茲(E. Treftz)的，还有其他人的］。

在第四章詳細研究了很多应用呂茲法的例子，这些例子联系到通常所碰到的一些数学物理問題；选擇例子时，为了使它們更有效果，我完全沒有考慮到要保証对于它們有格外好的收斂程序。我認为必須知道所研究的方法的強弱兩面；由于这个观点，我認为片面地选擇例題是不恰当的。

在第二至四章的几節中研究了一些数学物理的具体問題，这几節可以不相关連地閱讀。

其余的三章講其他的直接方法：在第五章講伽遼金法，在第六章講最小二乘方法，最后，在第七章講有限差分法。

伽遼金法所以傳播很廣，完全是由于它的高度优越性：簡單而普遍。但是，关于伽遼金法，由于不了解它的本質，曾經一再發生爭論。例如，有过这样的論文，其中怀疑伽遼金法是否会收斂，理由是在某些問題上按伽遼金法所作的第二次近似比第一次近似反而要坏些。在另一篇論文中有这种論断：当利用伽遼金法时可以不必預先满足自然边界条件。因此，我要尽我之所能，力求准确地鑑定伽遼金法的適用范圍及其基本特点。第五章的若干節要講完全連續运算子的理論，沒有这个理論便談不上伽遼金法的理論基礎，至少在現在还是非它不可。

最小二乘方法傳播不廣，然而它却具有若干优点。它比伽遼金法普遍，尤其比能量法普遍。在某些条件下，由最小二乘方法得到的近似解与所需要的導数一起，不但是平均收斂，而且是一致收斂。我認为很可以把这个方法应用在比現在更廣闊的范圍中。

在第三、五、六各章后面附有特别的三節 A、Б、В，其中列举了已經研究过的方法的最重要結果，并且簡短的提示了实际应用它們的方法。

在若干普通的書中很好地敍述了格網法，所以在有限差分法中我只指出关于格網法的一些文献；我要詳細地講所謂的“直接方法”，它虽然在理論上有着欠完善的地方，但在許多情形下仍然具有不可否認的勝似格網法的优点。

除了收斂的性質問題以外，近似解收斂的快慢問題，或者說，估計近似解的誤差問題，占有非常重要的地位。可惜，在这对于直接方法說來是头等重要的地方，工作做得并不怎样多，据我看來，对于实际要求來說是远远不夠的；由于这个原因，在本書中我几乎沒有提到估計誤差的問題，可是在每个例子中我都尽力揭露近似解的“內在的”收斂性，卽每一个后面的近似解与其前一个近似解近似到什么程度。

讀者对本書缺点的任何指正我都是感謝的。

例子中所有的計算都是由車尔銀（К. Е. Чернин）与符拉基米洛夫（В. С. Владимиров）非常細心地用高度技巧所完成的。为此，我向他們表示眞摯的感謝。

斯米尔諾夫（В. И. Смирнов）院士讀过本書的原稿，对我提供了很多宝貴的意見。为了这些意見以及对我工作的关心，我向斯米尔諾夫院士致以深深的謝意。我也感謝拉得森斯卡婭（О. А. Ладыженская）及出版社編輯阿基洛夫（Г. П. Акилов）的很多宝貴的意見，前者还讀过本書原稿的前三章；为此，我眞摯地感謝他們。

C. 米赫林

列寧格勒 1950 年 5 月

目 錄

1467086

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 希尔伯特空間理論中的一些知識

本章是輔助性的。它的目的是給出希尔伯特函数空間的理論中的一些初等概念，对于清楚了解数学物理的直接方法的本質和应用范圍來說，这些概念都是必要的。在本章的开始，先簡短地敍述勒伯克積分概念及其基本性質。勒伯克積分这个工具在直接計算上未必有用；但由于勒伯克積分所特有的“普遍性”，在理論問題上这个積分就起着極其重要的作用。这是因为勒伯克積分实际上对于所有的有界函数都存在，而普通黎曼積分只有在对間断函数加以十分嚴格有时竟是难于驗明的条件时方才存在。再者，确定無界函数的勒伯克可積条件較之确定黎曼可積条件要容易得多。因此，利用勒伯克積分实际上就使我們不必去証明所考慮函数的可積性，这也就使得研究工作極其簡化了。在§2我們要詳細研究非常重要的平均收斂概念；在§§3—7要講希尔伯特空間理論的初步知識；同时，由于立刻需要应用，我們便只講所謂的希尔伯特函数空間。其他類型的希尔伯特空間要在第五章方才講到。

在第一章我們并不常常去証明我們的断言。希尔伯特空間理論的十分完全与詳細的敍述在下列著作中都可以找到：例如，在斯米尔諾夫（В. И. Смирнов）的教程[1]中；在普列斯涅尔（А. И. Плеснер）的論文[1]中；在普列斯涅尔与洛赫林（В. А. Рохлин）的論文[1]中。勒伯克積分理論在斯米尔諾夫的教程[1]中或者在瓦萊·普賽（Ш. Валле-Пуссен）的教程[1]中都有。关于勒伯克積分的一些知識包含在朔波列夫（С. Л. Соболев）的教程[4]中。

§1. 勒伯克積分概念

構造勒伯克積分时要以点集的測度概念为根据。为了明确起見，考慮閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的点集。如果点集填滿閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 中的一个开區間 $\alpha<x<\beta$，那末就可以取开區間的長 $\beta-\alpha$ 作为該点集的測度。現在，考慮填滿有限个或可数个①不相重叠的开區間的点集。这样的点集称为开集。从閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 減去一个开集后所得的余集称为閉集。当然，我們定义开集的測度为構成它的开區間的長之和，定义閉集的測度为閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 的長与所減去的开集的測度之差。現在來講一般的測度的定义，我們約定，如果集合 B 的所有点都屬于集合 A（簡單些說，如果 B 是 A 的一部分）时，那末說 A 包含 B。包含集合 A 的开集合的測度的下确界（下界）称为 A 的外測度，集合 A 的內測度是包含在 A 中的閉集的測度的上确界（上界）。可以証明（在直观上这是顯然的）点集的內測度不超过它的外測度。再者，如果集合的內測度等于外測度，那末它称为可測集合。可測集合的內外測度的公共值称为集合的勒伯克測度。集合 A 的測度我們用記号 μA 來表示。

可測性是集合的非常普遍的性質，幷不象初看起來那样特殊。到現在为止，所有实际建造起來的集合都是可測的。固然，只要用到所謂选取原理，就能夠証明非可測集合的存在，但是选取原理幷未給出实际建造集合的可能性。以后，凡是談到点集，我們將假定它們都是可測的。

集合的測度具有長度所固有的許多性質，測度概念是長度概

---

① 如果無窮点集的所有元素都可以用正整数來編号，那末它称为可数点集。可数点集的例子是：正整数的集合本身，它的任何無限部分（例如，偶数集合，整数平方的集合等），及正負整数的集合。可以証明所有有理数的集合也是可数的。填滿一个綫段、或填滿一个平面上的或空間中的區域的点集可以作为非可数点集的例子。

念的推廣。例如，如果兩个集合不相交（就是說沒有公共点），那末它們的和集①的測度等于它們的測度之和；兩个相交的集合的和集的測度等于它們的測度之和減去它們的公共部分的測度，等等。

測度概念可以自然而然地推廣到平面上或三維空間中的点集上去。这里，測度概念当然是面積概念或体積概念的推廣。測度概念也不难推廣到多維空間的点集上去。

測度为 0 的集合是存在的。顯然，这种集合可以包含在測度为任意小的开集中。不难証明有限点集与可数点集就是这种点集。測度为 0 的非可数集合也是存在的。通常，如果一个性質只在測度为 0 的集合上可能不成立，那末說它几乎处处成立。

現在回到積分概念上來。按照柯西黎曼的定义，定積分是積分和的極限

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \tag{1}$$

（其中用到的記号的意义給在圖 1 上），此处 λ 是最長的區間 (x_{k-1}, x_k) 的長度。如果在基本綫段 $a\leqslant x\leqslant b$ 上选取足夠小的分割，再拋棄公式 (1) 右边的極限記号，那末我們就得到近似的等式

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}), \tag{2}$$

这个近似等式的几何意义是这样的：由曲綫 $y=f(x)$ 上的弧，横坐标軸上的綫段 (x_{k-1}, x_k) 以及在点 x_{k-1}, x_k 处所引的曲綫的縱坐标所圍成的窄条的面積，用底为綫段 (x_{k-1}, x_k)，高为在 (x_{k-1}, x_k) 中任意点 ξ_k 处所引的曲綫的縱坐标的矩形的面積來代替。如果曲綫 $y=f(x)$ 的縱坐标变化不太快，那末近似等式 (2) 的誤差也不大；同时，点 ξ_k 的任意选取对誤差的影响也不会很大。

① 包含第一第二兩个集合的所有元素的第三个集合称为第一第二兩个集合的和集；如果某个元素同时屬于兩个集合，那末在和集中它只計算一次。

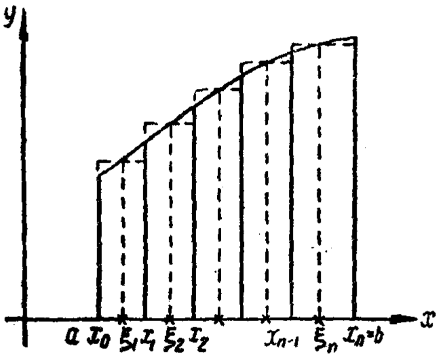

圖 1.

但是，如果曲綫 $y=f(x)$ 振动很快（圖2），即使它仍旧是連續的，那末式(2)就变成不可靠的了。顯然，如果分别选取其縱坐标为最大的、最小的或中等的点作为点 ξ_k，就会得到完全不同的結果。此时，按照另一种方式來計算面積較为適当。在

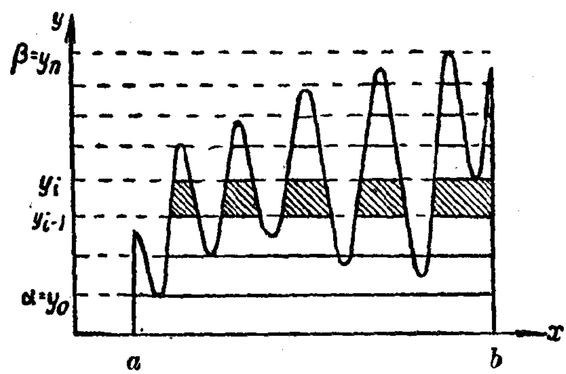

圖 2.

縱坐标軸上取函数的最小值 α 及最大值 β①。插入分点 $y_0=\alpha, y_1, y_2, \cdots, y_n=\beta$，把縱坐标軸上的綫段 $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 分成小綫段。通过各个分点引平行于横坐标軸的直綫。我們想知道的面積就划分为好象扁短矩形的一些圖形；这些"矩形"都在直綫 $y=y_{i-1}$，$y=y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 間的横条區域中。我們要計算在这种横条區域中"矩形"面積之和，此时假定"矩形"的底边是它們在横条區域的頂边 $y=y_i$ 上的边。所指的面積之和近似地等于高 y_i-y_{i-1} 与底边長之和的乘積。顯然，在底边的每点处縱坐标 $f(x) \geqslant y_i$。因此，

① 准确些說，函数值的下界及上界。

"矩形"底边之和可以表現为使 $f(x)\geqslant y_i$ 的那些 x 值的集合，而底边長之和可以表現为这个集合的測度①。記所指的測度为 μ_i，則横条區域 $y_{i-1}<y\leqslant y_i$ 中的那些部分圖形（在圖 2 上有陰影的部分）的面積近似地等于 $\mu_i(y_i-y_{i-1})$，因此全部圖形的面積近似地等于 $\mu_0 y_0+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(y_i-y_{i-1})$。將區間 (y_{i-1},y_i) 縮小，使它們中最長的長度趨近于 0。此时，如果上述的和趨近于某个極限，那末这个極限就称为函数 $f(x)$ 在閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的勒伯克積分。把这个結構推廣到不必是連續函数的情形，我們就得到如下的勒伯克積分的定义：

極限

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\{\mu_0 y_0+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(y_i-y_{i-1})\right\};\ \lambda=\max(y_i-y_{i-1})$$

称为有界函数 $f(x)$ 在閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的勒伯克積分，此处 μ_i 是使 $f(x)\geqslant y_i$ 的 x 值的集合的測度，而 $\alpha=y_0$ 及 $\beta=y_n$ 是函数 $f(x)$ 的下界及上界。

完全類似地可以定义兩个及多个自变数函数的勒伯克積分。

可以証明有界函数的勒伯克積分恆存在。当然，我們要假定，对于任何常数 A，使 $f(x)\geqslant A$ 的 x 值的集合都是可測的，否則，勒伯克積分的定义就失去了意义。到現在为止，对于能夠实际建造起來的所有函数，所說的集合都是可測的。如果在普通黎曼意义下函数 $f(x)$ 的定積分存在，那末可以証明它与勒伯克積分相等。因此不必用特別的記号來表示勒伯克積分，而我們就利用

$$\int_a^b f(x)dx,\qquad \iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

等普通的記号。

① 当然，我們假定，对于任意的数值 y_i，这个集合都是可測的。

現在我們來定义無界函数的勒伯克積分。首先假定函数 $f(x)$ 是非負的。記任意正数为 N，導入新函数 $f_N(x)$(参考圖 3)：

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & 当\ f(x)\leqslant N\ 时, \\ N, & 当\ f(x)>N\ 时。\end{cases}$$

顯然 $0\leqslant f_N(x)\leqslant N$，所以函数 $f_N(x)$ 有界，因此它的勒伯克積分

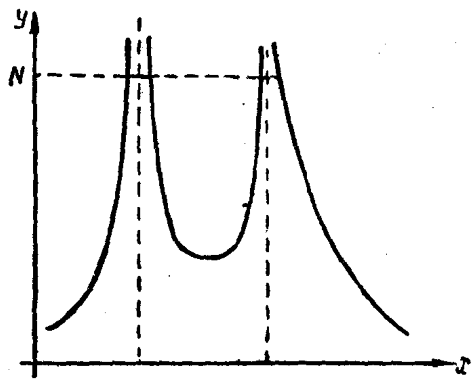

圖 3.

$$\int_a^b f_N(x)\,dx \tag{3}$$

存在。这个積分随着 N 的增加而增加(至少是不減少)，所以当 N 無限增加时它趨近于确定的(有限的或無限的)極限。当 $N\to\infty$ 时，如果積分(3)有有限的極限，那末这个極限称为非負的無界函数 $f(x)$ 的勒伯克積分。因此，按照定义，如果 $f(x)\geqslant 0$ 且無界，那末

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_a^b f_N(x)\,dx。$$

使得在从 a 到 b 这一范圍中有勒伯克積分存在的非負無界函数，称为閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的可定和函数。類似的可以定义 $m\,(m\geqslant 2)$ 維區域中的可定和函数。

現在假設 $f(x)$ 可以取任何符号，那末它可以表为兩个非負函数之差。其实，如果置

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\{|f(x)|+f(x)\},$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\{|f(x)|-f(x)\},$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com