haidian mingti quanxi quanjie

修订版

JTTD

北京市海淀区重点中学特级教师 编写

海淀名题

全析全解

高中代数

中国少年儿童出版社

修订版

北京市海淀区重点中学特级教师　编写

haidian mingti quanxi quanjie

海淀名题

全析全解

高中代数

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

海淀名题——全析全解:高中代数/《海淀名题——全析全解》编写组编.－北京:中国少年儿童出版社,1999.6
ISBN 7-5007-4884-1

Ⅰ.海…　Ⅱ.海…　Ⅲ.代数课-高中-解题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 27398 号

书名:海淀名题——全析全解 高中代数(修订版)
作者:本社编
中国少年儿童出版社　出版发行
责任编辑:尚万春
封面设计:徐　欣
社址:北京东四十二条 21 号
邮政编码:100708
印刷:廊坊人民印刷厂
经销:新华书店
787×1092　1/16　25.75 印张　888 千字
2000 年 2 月　第 2 版　　2000 年 2 月　第 3 次印刷
印数:15000 册
ISBN7－5007—4884—1/G·3676
定价:23.80 元
凡有印装问题,可向本社发行二科或印装厂家调换

海淀名题
全析全解

再版前言

ZAI BAN QIAN YAN

QUAN XI QUAN JIE

任何一门学科，都是将概念作为分析、判断、推理、综合的依据和出发点，揭示学科内容，形成体现这一学科特点的体系和结构。反复应用概念才能有效地建立新旧知识间的联系，理解、巩固掌握概念的本质属性特征。教学就是为了达到这一目的，实现学生由知识到能力的转化过程，要完成这一转化，首先要具备相应的知识量的积累，其次要把握学科的特点与规律，第三要有科学方法作为导引。那么，如何依据"教学大纲"与"考试说明"的要求，在教学的基础上进一步拓宽提高学生能力的渠道，使知识教学与能力培养落到实处，是我们重点研究的问题。为此，我们经过审慎思考、研究、组织了部分颇有经验和影响的一线教师精心编写了这套《海淀名题.·全析全解》丛书。

本书的特点是按本学科自身的知识体系与能力培养的要求，切实体现学生思维发展的层次性与渐近性，覆盖面广，选题典型，并配之以相应解析，在解题思路与方法上给予科学指导，从而形成了以基础知识为依托，以试题训练为载体，以思维指导为途径，以提高解题能力与应用能力为宗旨，适合学生备考、青年自学、教师教学选题需要的新体例。

该丛书选题均分为A、B两个层次，A层次选题为基础题、B层次选题为能力提高题。按照会考、中高考要求，选题具有典型性、代表性。同时吸收了学科教学研究的成果，较好地反映了一线教师指导中、高考以及学生有效学习的匠心独运，蕴含着现代基础教育的精华。

在社会主义市场经济的条件下，目前所出版的中学生复习资料、参考资料浩如烟海，名目繁多，我们在策划编写过程中，进行了认真的分析、比较研究，着力避免与其重复。依据"两纲"，结合教材，着眼学生未来发展需要，力求开拓新思路，提高选题指导的针对性与实效性，以期为读者带来更大的裨益。

编委会

海淀名题
全析全解

目　录
MU　LU

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、集　　合 ………………………… (5)
A 层次选题 ……………………… (5)
B 层次选题 ……………………… (11)
二、一元二次不等式 ……………… (17)
A 层次选题 ……………………… (17)
B 层次选题 ……………………… (20)
三、映射与函数 …………………… (22)
A 层次选题 ……………………… (22)
B 层次选题 ……………………… (27)
四、函数的性质、反函数 ………… (33)
A 层次选题 ……………………… (33)
B 层次选题 ……………………… (38)
五、指数与对数 …………………… (42)
A 层次选题 ……………………… (42)
B 层次选题 ……………………… (45)
六、幂函数、指数函数、对数函数 …
…………………………………… (47)
A 层次选题 ……………………… (47)
B 层次选题 ……………………… (54)

第二章　三角函数

一、任意角的三角函数 …………… (67)
A 层次选题 ……………………… (67)
B 层次选题 ……………………… (76)
二、三角函数的图象和性质 ……… (81)
A 层次选题 ……………………… (81)
B 层次选题 ……………………… (87)

第三章　两角和与差的三角函数、解斜三角形

一、两角和与差的三角函数 ……… (97)
A 层次选题 ……………………… (97)
B 层次选题 ……………………… (102)
二、倍角、半角的三角函数 ……… (107)
A 层次选题 ……………………… (107)
B 层次选题 ……………………… (117)
三、三角函数的积化和差与和差化积
…………………………………… (124)
A 层次选题 ……………………… (124)
B 层次选题 ……………………… (136)

四、解斜三角形及三角形中的三角函数 ……………… (148)
　A 层次选题 ……………… (148)
　B 层次选题 ……………… (158)

第四章　反三角函数和简单三角方程

一、反三角函数 ……………… (170)
　A 层次选题 ……………… (170)
　B 层次选题 ……………… (185)
二、三角方程 ……………… (198)
　A 层次选题 ……………… (198)
　B 层次选题 ……………… (203)

第五章　不等式

一、不等式的性质 ……………… (212)
　A 层次选题 ……………… (212)
　B 层次选题 ……………… (217)
二、不等式的证明 ……………… (222)
　A 层次选题 ……………… (222)
　B 层次选题 ……………… (238)
三、不等式的解法 ……………… (256)
　A 层次选题 ……………… (256)
　B 层次选题 ……………… (267)
四、不等式的应用 ……………… (276)

第六章　数列、极限、数学归纳法

一、数列 ……………… (284)
　A 层次选题 ……………… (284)
　B 层次选题 ……………… (292)
二、数列极限 ……………… (298)
　A 层次选题 ……………… (298)
　B 层次选题 ……………… (303)
三、数学归纳法 ……………… (310)
　A 层次选题 ……………… (310)
　B 层次选题 ……………… (314)

第七章　复数

一、复数的概念及运算 ……………… (321)
　A 层次选题 ……………… (321)
　B 层次选题 ……………… (327)
二、复数的三角形式 ……………… (332)
　A 层次选题 ……………… (332)
　B 层次选题 ……………… (339)
三、复数与方程 ……………… (345)
　A 层次选题 ……………… (345)
　B 层次选题 ……………… (348)
四、复数的应用 ……………… (351)
　A 层次选题 ……………… (351)
　B 层次选题 ……………… (352)

第八章　排列、组合、二项式定理

一、排列数与组合数 ………… (356)
A 层次选题 ………………… (356)
B 层次选题 ………………… (361)
二、排列、组合应用题 ……… (367)
A 层次选题 ………………… (367)
B 层次选题 ………………… (375)
三、二项式定理 ……………… (384)
A 层次选题 ………………… (384)
B 层次选题 ………………… (396)

海淀名题
全析全解

第一章
幂函数、指数函数和对数函数

1. 集合及其基本概念

(1) 集合：集合是数学中不定义的原始概念，它表示一些指定对象的全体. 一组对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象就是这个集合的元素.

(2) 元素与集合的关系：对于一个元素 x 与某集合 A 之间的关系为 $x\in A$ 或 $x\notin A$.

(3) 集合中的元素的特征：集合中的元素具有确定性，互异性，无序性.

(4) 集合的表示法：①列举法. ②描述法.

(5) 集合的分类：①有限集. ②无限集. ③空集.

(6) 几种常用的数集：N—自然数集，Z—整数集，Q—有理数集，R—实数集.

2. 集合与集合的关系

(1) 子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作 A 包含于 B 或（B 包含 A）

真子集：如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）

集合的相等：对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说两个集合相等，记作 $A=B$，读作"A 等于 B".

(2) 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的交集，记作 $A\cap B$（读作"A 交 B"），即

$A\cap B=\{x|x\in A，且 x\in B\}$

$A\cap A=A$，　$A\cap\varnothing=\varnothing$，　$A\cap B=B\cap A$.

(3) 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的并集，记作 $A\cup B$（读作"A 并 B"），即

$A\cup B=\{x|x\in A，或 x\in B\}$

$A\cup A=A$，　$A\cup\varnothing=A$，　$A\cup B=B\cup A$.

(4) 全集：在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，用符号 I 表示；

补集：已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集，记作 $\overline{A}$（读作"A 补"），即

$\overline{A}=\{x|x\in I 且 x\notin A\}$

$A\cup\overline{A}=I$，　$A\cap\overline{A}=\varnothing$，　$\overline{\overline{A}}=A$

3. 一元二次不等式

(1) $|ax+b|<c$，$|ax+b|>c$　$(c>0)$ 型不等式

$|ax+b|<c$　$(c>0)$ 的解集是 $\{x|-c<ax+b<c\}$；$|ax+b|>c$　$(c>0)$ 的解集是 $\{x|ax+b>c$ 或 $ax+b<-c\}$.

(2) 一元二次不等式

①一般形式：$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$　$(a\neq0)$

②解集：$ax^2+bx+c>0$　$(a>0)$　　$ax^2+bx+c<0$　$(a>0)$

判别式	$\triangle>0$	$\triangle=0$	$\triangle<0$

图象

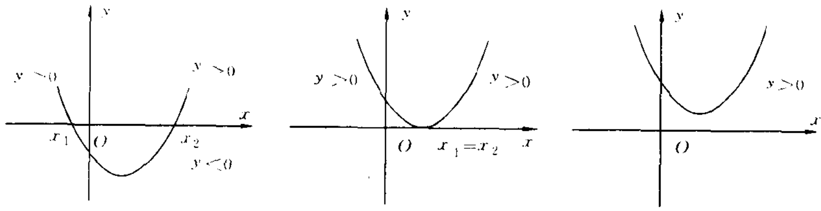

图 1—1

解集：

$ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$　　$ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x\neq-\frac{b}{2a}\}$　　$ax^2+bx-c>0$ 的解集为 R

$ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|x_1<x<x_2\}$　　$ax^2+bx+c<0$ 的解集是$\varnothing$　　$ax^2+bx+c<0$ 的解集为$\varnothing$

4. 映射与函数

（1）映射：设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 f：$A\to B$.

（2）函数：如果在某变化过程中有两个变量 x，y，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，x 叫做自变量，x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域，y 是 x 的函数记作 $y=f(x)$.

函数实际上就是集合 A 到集合 B 的映射，其中 A、B 都是非空的数的集合，函数的值域 C 满足 $C\subseteq B$.

5. 函数的性质

（1）单调性

增（减）函数：对于给定区间上的函数 $f(x)$：如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，（$f(x_1)>f(x_2)$），那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增（减）函数，这个区间叫 $f(x)$ 的单调区间.

（2）奇偶性

奇（偶）函数：对于函数 $f(x)$，如果对于函数定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$（$f(-x)=f(x)$），那么函数 $f(x)$ 就叫奇（偶）函数.

奇函数的图象关于原点成中心对称图形，偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形.

6. 反函数

（1）反函数：式子 $y=f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数，设它的定义域为 A，值域为 C，从式子 $y=f(x)$ 中解出 x，得到式子 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过式子 $x=\varphi(y)$，x 在 A 中都有唯一确定的值和它对应. 那么式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数. 这样的函数 $x=\varphi(y)$，叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

一般用 x 表示自变量，用 y 表示函数，为此我们常常对调函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x，y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$.

（2）函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

7. 幂函数

（1）分数指数幂与根式

①根式：式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫根指数，a 叫被开方数.

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$　当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

②分数指数幂

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a>0，m、n\in N，且 n>1)$；$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ $(a>0，m、n\in N，且 n>1)$

③指数运算法则：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$； $(a^m)^n=a^{mn}$； $(ab)^n=a^nb^n$.

(2) 幂函数

①定义：函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数（只讨论 α 是有理数 n 的情况）

②定义域：$y=x^n$ $(n\in Q)$ 的定义域是使 x^n 有意义的实数集合.

③图象与性质：$y=x^n$ 的图象

（Ⅰ）当 $n=0$ 或 1 时图象为直线型.（图 1—2）

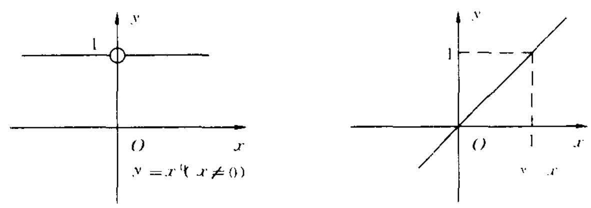

图 1—2

（Ⅱ）当 $n>0$ 且 $n\neq1$ 时，图象为抛物线型，当 $0<n<1$ 时，在第一象限内为凸向递增（图 1—3）

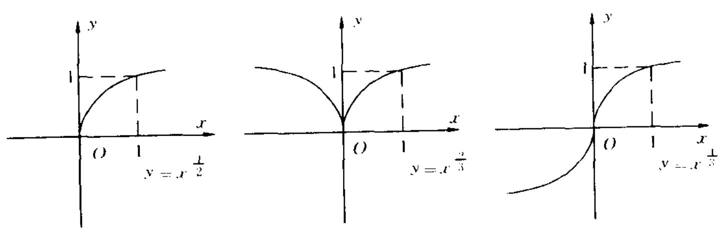

图 1—3

当 $n>1$ 时，在第一象限内为凹向递增（图 1—4）

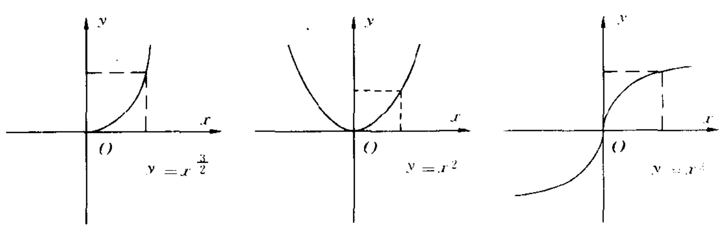

图 1—4

（Ⅲ）当 $n<0$ 时，图象为双曲线型，在第一象限内为凹向递减.（图 1—5）

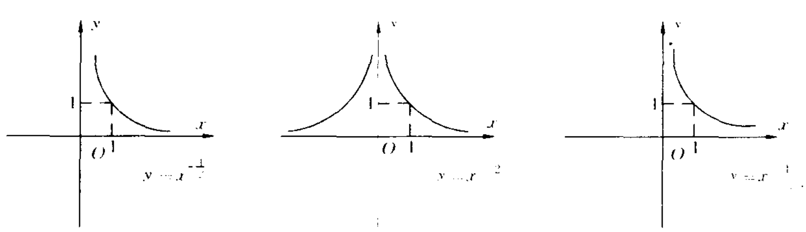

图 1—5

幂函数在第一象限内都有图象，在第四象限都没有图象，在第二、三象限的图象可根据幂函数的定义域，

奇偶性来确定.

（Ⅳ）性质：$y=x^n$ 当 $n>0$ 时，图象过点（0，0）和（1，1），在第一象限内是增函数.

$y=x^n$ 当 $n<0$ 时，图象过点（1，1），在第一象限内是减函数，并且图象向上与 y 轴无限地接近，向右与 x 轴无限地接近.

8. 指数函数

（1）定义：函数 $y=a^x$ 叫做指数函数，其中 a 是一个大于零且不等于 1 的常量.

（2）定义域：R

（3）值域：$(0,+\infty)$

（4）图象和性质

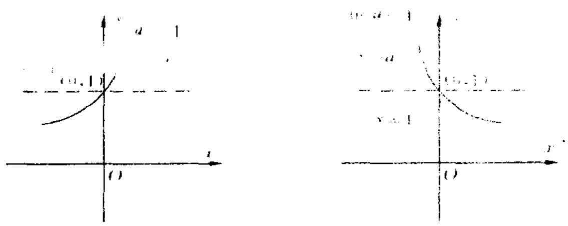

图 1-6

性质：

①图象在 x 轴上方，即 $y>0$.

②图象过点（0，1），即 $x=0$ 时 $y=1$.

③当 $a>1$ 时，若 $x>0$，则 $y>1$，若 $x<0$，则 $0<y<1$，当 $0<a<1$ 时，若 $x>0$，则 $0<y<1$，若 $x<0$，则 $y>1$.

④当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

9. 对数函数

（1）对数

①定义：如果 a （$a>0$，$a\neq1$）的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，那么数 b 就叫做以 a 为底 N 的对数，记作：$\log_a N=b$，其中 a 叫做底数，N 叫做真数，式子 $\log_a N$ 叫做对数式.

②性质：

（Ⅰ）负数和零没有对数.

（Ⅱ）1 的对数是零.

（Ⅲ）底的对数等于 1.

③运算法则

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$　　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$\log_a N^n=n\log_a N$　　$\log_a \sqrt[n]{N}=\dfrac{1}{n}\log_a N$　　$(M,N>0,\ a>0,\ a\neq1)$

④换底公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

⑤常用对数与自然对数

以 10 为底的对数叫常用对数，记作 $\lg N$.

以 e（$e=2.71828\cdots$）为底的对数叫做自然对数，记作：$\ln N$

（2）对数函数

①定义：函数 $y=\log_a x$ 叫做对数函数.（$a>0$ 且 $a\neq0$）

②定义域：(0，$+\infty$)

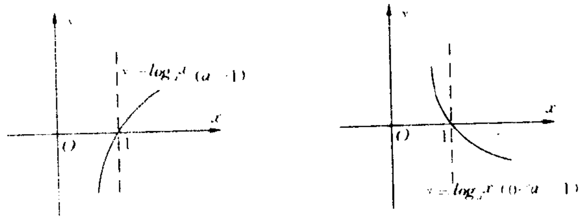

图 1—7

③值域：($-\infty$，$+\infty$)

④图象：

⑤性质：

（Ⅰ）图象在 y 轴右侧，即 $x>0$

（Ⅱ）图象过点（1，0），即 $x=1$ 时 $y=0$

（Ⅲ）当 $a>1$ 时，若 $x>1$，则 $y>0$；若 $0<x<1$，则 $y<0$.

当 $0<a<1$ 时，若 $x>1$ 则 $y<0$；若 $0<x<1$，则 $y>0$.

（Ⅳ）当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在（0，$+\infty$）上是增函数；

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在（0，$+\infty$）上是减函数.

指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称.

一、集　合

A 层次选题

一、选择题

1. 给出四个命题：①任何一个集合 A 必有两个子集；②任何一个集合 A，必有两个真子集；③若集合 A 和 B 的交集是空集，则 A、B 至少有一个是空集；④若集合 A 和 B 的交集是全集，则 A、B 都是全集. 其中错误命题的个数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

答：D.

解：因为 $\varnothing$ 没有两个子集，也没有真子集，①②错误. 若 $A\cap B=\varnothing$，A、B 可以不是空集. ③错误. 若 $A\cap B=I$，则必有 $A=B=I$.

2. 下列关系正确的是（　　）.

A. $\varnothing\cup\{0\}=\varnothing$　　B. $\varnothing\subset\{0\}$　　C. $\varnothing\cap\{0\}=\{0\}$　　D. $0\in\varnothing$.

答：B.

解：空集是任何非空集合的真子集.

3. 设全集 $I=$｛三角形｝，$M=$｛锐角三角形｝，$N=$｛钝角三角形｝，那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 是（　　）.

A. ｛锐角三角形｝　　B. ｛钝角三角形｝　　C. ｛直角三角形｝　　D. ｛三角形｝

答：C.

解：$\overline{M}=$｛钝角三角形或直角三角形｝，$\overline{N}=$｛锐角三角形或直角三角形｝　∴ $\overline{M}\cap\overline{N}=$｛直角三角形｝.

4. 已知集合 $A\subset\{2,3,7\}$ 且 A 中至少有一个奇数，则这样的集合共有（　　）.

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

答：C.

解：这样的集合有：$\{3\}$，$\{2,3\}$，$\{7\}$，$\{2,7\}$，$\{3,7\}$

5. 若集合 $A\cup B=I$（I 为全集），则下列关系式一定正确的是（　　）.

A. $B\subseteq\overline{A}$　B. $A\cap B=\varnothing$　C. $B\supseteq\overline{A}$　D. $\overline{A}\cap\overline{B}=I$

答：C.

解：按 A、B 的关系可分三种情形考虑：

(1) 若 $A=B$ 时，$A\cup B=A=I$，∴ $\overline{A}=\varnothing$，$\overline{A}\subseteq B$. (2) 若 $A\cap B=\varnothing$时，$\overline{A}=B$. (3) 若 $A\cap B\neq\varnothing$，则有 $B\supset\overline{A}$ 故 $B\supseteq\overline{A}$.

6. 设 $P=\{$平行四边形$\}$，$R=\{$矩形$\}$，$L=\{$菱形$\}$，$S=\{$正方形$\}$，那么（　　）.

A. $P\cap L=S$　B. $R\cup L=P$　C. $(R\cup S)\cup L\subset P$　D. $L\cup S=R$.

答：C.

解：矩形、菱形、正方形都是平行四边形，因此 {矩形、菱形、正方形} 是 {平行四边形} 的真子集.

7. 集合 $A=\{x|x\neq0,x\in R\}\cup\{y|y\neq3,y\in R\}$ 集合 $B=\{x|x<0$ 或 $0<x<3$ 或 $x>3,x\in R\}$，则 A、B 间的关系是（　　）.

A. $A=B$　　B. $A\subset B$　　C. $A\supset B$　　D. 无法判定

答：C.

解：$A=\{x|x\neq0,x\in R\}\cup\{y|y\neq3,y\in R\}=R$，　而 $B=\{x|x<0$ 或 $0<x<3$ 或 $x>3,x\in R\}=\{x|x\neq0$ 且 $x\neq3\}$ ∴$A\supset B$

8. 右图 1—8 中 I 表示全集，则图中的阴影部分表示的集合是（　　）.

A. $\overline{A\cap B}$　　B. $\overline{A\cup B}$

C. $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$　D. $(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{A})$

答：C.

解：A 中的阴影部分为 $A\cap\overline{B}$，B 中的阴影部分为 $B\cap\overline{A}$，整个阴影部分为 $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$.

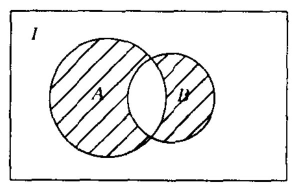

图 1—8

9. 设 S、T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于（　　）.

A. X　B. T　C. S　D. $\varnothing$

答：C.

解：因为 $X=S\cap T$，所以 $X\subseteq S$　$S\cup X=S$.

10. 若记非空集合 $M-N$ 为 $M-N=\{x|x\in M$ 且 $x\notin N\}$ 则 $M-(M-N)$ 总等于（　　）.

A. N　　B. M　　C. $M\cap N$　　D. $M\cup N$.

答：C.

解：$M-N=\{x|x\in M$ 且 $x\notin N\}$　$M-(M-N)=\{x|x\in M$ 且 $x\notin(M-N)\}$，$M-N=M\cap\overline{N}$ ∴ $M-(M-N)=M\cap N$.

11. 已知 $X=\{x|x=(2n+1)\pi,n\in Z\}$，$Y=\{y|y=(4k\pm1)\pi,k\in Z\}$，那么下列各式中正确的是（　　）.

A. $X\subset Y$　B. $X=Y$　C. $X\supset Y$　D. $X\cap Y=\varnothing$

答：B.

解：设 $y\in Y$，可设 $y=(4k\pm1)\pi$，$k\in Z$，因为 $4k\pm1$ 是奇数，所以 $y\in X$，即 $Y\subseteq X$，又设 $x\in X$，设 $x=(2n+1)\pi$，$n\in Z$，当 n 为偶数时，$n=2k$，$k\in Z$. $x=(4k+1)\pi$ 当 n 为奇数，即 $n=2k+1$，$k\in Z$，$x=(4k+3)\pi=[4(k+1)-1]\pi$ 从而可知 $x\in Y$，∴$X\subseteq Y$，故 $X=Y$.

12. 已知六个关系式：(1) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$；(2) $\varnothing\in\{\varnothing\}$；(3) $\{0\}\supset\varnothing$；(4) $0\notin\varnothing$；(5) $\varnothing\neq\{0\}$；(6) $\varnothing\neq\{\varnothing\}$. 它们中正确的个数是（　　）.

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 小于 4

答：A.

解：$\{\varnothing\}\neq\varnothing$ 而 $\varnothing\subset\{\varnothing\}$　$\varnothing\in\{\varnothing\}$ 同时成立. 又因为 $\varnothing\neq\{0\}$ 所以 $\{0\}\supset\varnothing$. $0\notin\varnothing$ 也成立.

13. 设集合 P、Q 与全集 I，下列命题：$P\cap Q=P$，$P\cup Q=Q$，$P\cap\overline{Q}=\varnothing$，$\overline{P}\cup Q=I$ 中与命题 $P\subseteq Q$ 等价的有（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

答：D.

解：由 $P\cap Q=P$，$P\cup Q=Q$ 可推出 $P\subseteq Q$，反之也成立. $P\cap\overline{Q}=\varnothing$，$\overline{P}\cup Q=I$ 可画出文氏图明显看出与 $P\subseteq Q$ 是等价的.

14. 设两个集合 $M=\{x|x=4k,\ k\in Z\}$，$P=\{x|x=12m+8n,\ m、n\in Z\}$，那么下列关系中正确的是（　　）.

A. $M\subset P$　　B. $M\supset P$　　C. $M=P$　　D. $M\cap P=\varnothing$

答：C.

解：设 $x_1\in P$，且 $x_1=12m_1+8n_1$，$m_1n_1\in Z$，则 $x_1=4(3m_1+2n_1)$　$\because 3m_1+2n_1\in Z$　$\therefore x_1\in M$，　$\therefore P\subseteq M$. 又设 $x_2\in M$ 且 $x_2=4k_1$，$k_1\in Z$. 当 $k_1=2n$　$(n\in Z)$　$x_2=4\times(2n)=8n+12\times 0$　$\therefore x_2\in P$. 当 $k_1=2n+1$　$(n\in Z)$　$x_2=4(2n+1)=8n+4=8(n-1)+12\times 0$，$\because$　$n-1\in Z$　$\therefore x_2\in P$

$\therefore M\subseteq P$　故　$M=P$

15. 已知集合 $A=\{x|x=\frac{1}{9}(2k+1),\ k\in Z\}$，$B=\{x|x=\frac{4}{9}k\pm\frac{1}{9},\ k\in Z\}$，则集合 A、B 之间的关系为（　　）.

A. $A\subset B$　　B. $B\supset A$　　C. $A=B$　　D. $A\neq B$

答：C.

解：设 $x_1\in A$，且 $x_1=\frac{1}{9}(2k_1+1)$，$k_1\in Z$，当 $k_1=2n$，$n\in Z$ 时 $x_1=\frac{1}{9}(4n+1)=\frac{4}{9}n+\frac{1}{9}$，$x_1\in B$，当 $k_1=2n-1$，$n\in Z$ 时　$x_1=\frac{1}{9}(4n-2+1)=\frac{4}{9}n-\frac{1}{9}$，　$\therefore x_1\in B$，　$\therefore A\subseteq B$. 又设 $x_2\in B$ 且 $x_2=\frac{4}{9}k_2\pm\frac{1}{9}=\frac{1}{9}(4k_2\pm 1)$，而 $4k_2\pm 1$ 表示奇数，$2n+1$ $(n\in Z)$ 也表示奇数　$\therefore x_2=\frac{1}{9}(2n+1)$　$(n\in Z)$　$\therefore x_2\in A$　$\therefore B\subseteq A$.　故 $A=B$.

16. 设两个集合 $S=\{x|x=12m+8n,\ m、n\in Z\}$，$p=\{x|x=20p+16q,\ p、q\in Z\}$，则下列关系正确的是（　　）.

A. $S\subset P$　　B. $S\supset P$　　C. $S=P$　　D. 以上都不对

答：C.

解：由 $x_1=20p+16q=12p+8p+16q=12p+8(p+2q)$　$\because p、q\in Z$，　$\therefore p+2q\in Z$. 所以集合 P 中的元素必是集合 S 的元素，　故 $P\subseteq S$，反之　$x_2=12m+8n=12m+8(m+2q)=20m+16q$　$(m、q\in Z)$ 此即说明 $x_2\in P$　$\therefore S\subseteq P$，　故 $S=P$.

17. 设 $P\cup Q=\{a,b\}$，求 P、Q，此题解答共有（　　）.

A. 9 组　　B. 8 组　　C. 7 组　　D. 5 组

答：A.

解：共有 $P=\varnothing$，$Q=\{a,b\}$、$P=\{a,b\}$，$Q=\varnothing$、$P=\{a\}$，$Q=\{b\}$、$P=\{a\}$，$Q=\{a,b\}$、$P=\{b\}$，$Q=\{a\}$、$P=\{b\}$，$Q=\{a,b\}$、$P=\{a,b\}$，$Q=\{a\}$、$P=\{a,b\}$，$Q=\{b\}$、$P=\{a,b\}$，$Q=\{a,b\}$ 九组.

18. 如果全集 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$ 且 $A\cap\overline{B}=\{1,2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,5\}$，$A\cap B=\{6\}$，则 A 等于（　　）.

A. {1，2}　　B. {1，2，6}　　C. {1，2，3}　　D. {1，2，4}

答：B.

解：画出文氏图填空即可求出 $A=\{1, 2, 6\}$

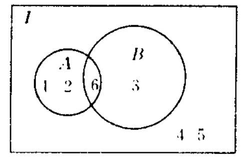

图 1－9

19. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-1=0\}$，$B=\{x \mid ax-1=0, a\in R\}$，如 $A\cup B=A$，则 a 的值为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. －1　　D. 0，－1，1

答：D.

解：$A=\{-1, 1\}$ 因为 $A\cup B=A$　$\therefore B$ 可为 $\varnothing$，$\{-1\}$，$\{1\}$ 三种情况，当 $a=0$ 时 $B=\varnothing$；当 $a=1$ 时 $B=\{1\}$；当 $a=-1$ 时 $B=\{-1\}$. 所以 a 的值为 0，－1，1.

20. 已知集合 $M=\{m \mid m\in N$ 且 $8-m\in N\}$，则集合 M 的元素的个数为（　　）.

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

答：C.

解：满足 $m\in N$，$8-m\in N$，的 m 值可取 1、2、3、4、5、6、7，所以 M 中有 7 个元素.

21. 设全集 I 为自然数集 N，$E=\{2n \mid n\in N\}$，$F=\{4n \mid n\in N\}$，那么 N 可表示成（　　）.

A. $E\cap F$　　B. $\overline{E}\cup F$　　C. $E\cup\overline{F}$　　D. $\overline{E}\cup\overline{F}$

答：C.

解：$E=\{2n \mid n\in N\}=\{$偶数$\}$，$F=\{4n \mid n\in N\}=\{4$ 的倍数$\}$，$F\subset E$，所以 $E\cup\overline{F}=I=N$.

22. 设集合 $A=\{x \mid x=a^2+1, a\in N\}$，$B=\{y \mid y=b^2-4b+5, b\in N\}$，则下述关系中正确的是（　　）.

A. $A=B$　　B. $A\supset B$　　C. $A\subset B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

答：C.

解：设 $x\in A$，$x=a^2+1$，$y=b^2-4b+5=(b-2)^2+1$　$\therefore x\in B$，但 $y=1$ 时　$y\in B$　$y\notin A$，　$\therefore A\subset B$.

23. 50 名学生做物理、化学两种实验，已知物理实验做得正确的有 40 人，化学实验做得正确的有 31 人，两种实验都做错的有 4 人，那么两种实验都做对的人数是（　　）.

A. 21　　B. 23　　C. 24　　D. 25

答：D.

解：设两种实验都做对的有 x 人，则 $40+31-x+4=50$，$x=25$.

二、填空题

24. 设 $M=\{(x, y) \mid mx+ny=4\}$ 且 $\{(2, 1), (-2, 5)\}\subset M$，则 $m=$________，$n=$________.

答：$m=\frac{4}{3}$，$n=\frac{4}{3}$.

解：$\{(2, 1), (-2, 5)\}\subset M$　$(2, 1)$ 和 $(-2, 5)$ 为方程 $mx+ny=4$ 的两组解，将 $x=2$，$y=1$ 和 $x=-2$，$y=5$ 代入方程得到方程组 $\begin{cases}2m+n=4\\-2m+5n=4\end{cases}$　解得 $m=n=\frac{4}{3}$.

25. 已知 $A=\{x \mid x=\frac{n}{2^m}, m\in N, n\in N\}$，若 $a\in A$，$b\in A$，则 $a+b$ ______ A，$a\cdot b$ ______ A.

答：$\in$，$\in$.

解：设 $a=\frac{n_1}{2^{m_1}}$，$b=\frac{n_2}{2^{m_2}}$，m_1. m_2. n_1. $n_2\in N$　$(m_2>m_1)$　$a+b=\frac{n_1}{2^{m_1}}+\frac{n_2}{2^{m_2}}=\frac{n_1(m_2-m_1)+n_2}{2^{m_2}}$　$\because m_2>m_1$　$m_2-m_1\in N$，　$\therefore n_1(m_2-m_1)+n_2\in N$，　$\therefore a+b\in A$，$a\cdot b=\frac{n_1}{2^{m_1}}\cdot\frac{n_2}{2^{m_2}}=\frac{n_1n_2}{2^{m_1+m_2}}$　$\because m_1+m_2\in N$，$n_1n_2\in N$　$\therefore a\cdot b\in A$.

26. 已知集合 $M=\{x \mid x^2-5x-6\leqslant 0, x\in Z\}$，$C=\{$质数$\}$，$I=Z$，那 $M\cap\overline{C}=$____________.

答：$\{-1, 0, 1, 4, 6\}$.

解：$M=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 只能被 1 和本身整除的正整数叫质数，所以 M 中不是质数的

有-1，0，1，4，6，即$M\cap\overline{C}=\{-1,0,1,4,6\}$.

27. 设$A=\{x|x^2-px+15=0\}$，$B=\{x|x^2+qx+r=0\}$，若$A\cap B=\{3\}$，$A\cup B=\{2,3,5\}$，则p=________，q=________，r=________.

答：$p=8$，　$q=-5$，　$r=6$.

解：$A\cap B=\{3\}$　$3\in A$　将$x=3$代入$x^2-px+15=0$，得$p=8$，$x=3$代入$x^2+qx+r=0$，得$3q+r=-9$　(1) 由$A\cup B=\{2,3,5\}$知$5\in A$　$\therefore 2\in B$. 将$x=2$代入$x^2+qx+r=0$，得$2q+r=-4$　(2) 由 (1) (2) 解得$q=-5$，$r=6$.

28. 若$A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则A为________________.

答：$\varnothing$、$\{0\}$、$\{2\}$、$\{4\}$、$\{0,2\}$、$\{0,4\}$、$\{2,4\}$、$\{0,2,4\}$.

解：因为$A\subseteq B$，且$A\subseteq C$，所以$A\subseteq B\cap C$，而$B\cap C=\{0,2,4\}$，其子集共有$2^3=8$个.

29. 设$A=\{x|f(x)=0\}$，$B=\{x|g(x)=0\}$，$C=\{x|h(x)=0\}$，则方程组$\begin{cases}f(x)=0\\g(x)h(x)=0\end{cases}$的解集是________.

答：$A\cap(B\cup C)$.

解：$\because g(x)h(x)=0$的解集为$g(x)=0$或$h(x)=0$的解集即　$B\cup C$　$\therefore$方程组$\begin{cases}f(x)=0\\g(x)h(x)=0\end{cases}$的解集为$A\cap(B\cup C)$.

30. 设$A=\{x|x=2k,k\in Z\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in Z\}$，$C=\{x|x=4k+1,k\in Z\}$又若$a\in A$，$b\in B$，则$a+b\in$______（填A、B、C之一）.

答：B.

解：$A=\{x|x=2k,k\in Z\}=\{$偶数$\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in Z\}=\{$奇数$\}$，　$\because a\in A$，a为偶数，$b\in B$，b为奇数，　$\therefore a+b$为奇数　故　$a+b\in B$.

31. 设$A=\{x|4x+p<0\}$，$B=\{x|x<-1$或$x>2\}$，若使$A\subseteq B$，则p的取值范围是______.

答：$p\geqslant 4$.

解：$A=\{x|4x+p<0\}=\{x|x<-\frac{p}{4}\}$，要使$A\subseteq B$，必须$-\frac{p}{4}\leqslant -1$，即$p\geqslant 4$.

32. 已知集合$M=\{m|\frac{m-4}{2}\in Z\}$，$N=\{n|\frac{n+3}{2}\in Z\}$，那么$M\cap N$=________.

答：$\varnothing$.

解：要使$\frac{m-4}{2}\in Z$，m必为偶数，所以$M=\{$偶数$\}$，要使$\frac{n+3}{2}\in Z$，n必为奇数，所以$N=\{$奇数$\}$ 故　$M\cap N=\varnothing$.

33. 设$A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|x>a\}$，$A\cap B=\varnothing$，则$a\in$________.

答：$\{a|a\geqslant 3\}$.

解：$A=\{x|-2<x<3\}$，要$A\cap B=\varnothing$，必须$a\geqslant 3$.

34. 已知$A=\{x|x<60,\frac{x}{12}\in N\}$，则$A$共有______个子集.

答：16.

解：$A=\{x|x<60,\frac{x}{12}\in N\}=\{12,24,36,48\}$　A的子集共有$2^4=16$个，(n个元素的集合共有子集2^n个，其中含有$\varnothing$)

35. 若$(\{1\}\cup M)\subseteq\{1,2,3\}$则集合$M$的个数为______.

答：8个.

解：M是$\{1,2,3\}$的子集，M的个数是$2^3=8$.

36. 集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集共有______个，它们中含有三个元素的子集有______个.

答：16个、4个

解：$\{a,b,c,d\}$ 的所有子集有 $2^4=16$ 个，含有 3 个元素的子集有 $C_4^3=4$ 个.

37. 如图 1—10，I 是全集，A、B 是两个子集，阴影部分表示的集合是________.

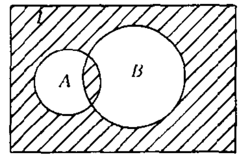

图 1—10

答：$(A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})$.

解：A、B 两个集合外部为 $\overline{A}\cup\overline{B}$，$A$、$B$ 的公共部分为 $A\cap B$.

38. 设 $I=R$，$A=\{x|x=-t^2,\ t\in R\}$，$B=\{x|x=3+|t|,\ t\in R\}$，则 $\overline{A}\cap\overline{B}$ =________.

答：$\{x|0<x<3\}$

解：$A=\{x|x=-t^2,\ t\in R\}=\{x|x\leqslant 0\}$，$B=\{x|x=3+|t|,\ t\in R\}=\{x|x\geqslant 3\}$，$\overline{A}=\{x|x>0\}$ $\overline{B}=\{x|x<3\}$， $\therefore \overline{A}\cap\overline{B}=\{x|0<x<3\}$

39. 已知 $A=\{(x,y)|\dfrac{1-y}{x+1}=3\}$，$B=\{(x,y)|y=kx+3\}$，并且 $A\cap B=\varnothing$，则 k 的值是________.

答：-3 或 2.

解：$A=\{(x,y)|y=-3x-2,\ x\neq -1\}$，$B=\{(x,y)|y=kx+3\}$ 要 $A\cap B=\varnothing$ 即方程组 $\begin{cases}y=kx+3\\y=-3x-2\end{cases}$ 无解，二直线平行，所以 $k=-3$，又因为 $y=-3x-2$ 中 $x\neq -1$，所以直线不过 $(-1,1)$ 点，将 $x=-1$，$y=1$ 代入 $y=kx+3$，得 $k=2$.

三、解答题

40. 已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，其中 $a\neq 0$，且 $M=N$，求 q 和 d 的值.

解： $\because M=N$，就有 $\begin{cases}a+d=aq\\a+2d=aq^2\end{cases}$ (1) 或 $\begin{cases}a+d=aq^2\\a+2d=aq\end{cases}$ (2)

由 (1) 解得 $q=1$，$d=0$，此时每个集合三个元素相等应舍去. 由 (2) 解得 $q=-\dfrac{1}{2}$，$d=-\dfrac{3}{4}a$.

41. 已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

解： $\because A\cap B=\{-3\}$，而 $a^2+1\geqslant 1$ $\therefore a^2+1\neq -3$，就有 $a-3=-3$ 或 $2a-1=-3$ 解得 $a=0$ 或 $a=-1$，代入检验，当 $a=0$ 时 $A=\{0,1,-3\}$ $B=\{-3,-1,1\}$，$A\cap B=\{-3,1\}$ 与题设矛盾，$a=0$ (舍去) 当 $a=-1$ 时 $A=\{1,0,-3\}$， $B=\{-4,-3,2\}$， $A\cap B=\{-3\}$， $\therefore a=-1$.

42. 设 $f(x)=x^2+ax+b$，$A=\{x|f(x)=x\}=\{a\}$，求 a、b 的值.

解：由 $f(x)=x$，$x^2+ax+b=x$，即 $x^2+(a-1)x+b=0$ $\because A=\{a\}$ $\therefore$ 方程 $x^2+(a-1)x+b=0$ 有相等二实根 a. 将 a 代入方程得 $a^2+a(a-1)+b=0$，① $\Delta=0$ 即 $(a-1)^2-4b=0$ ② 解①②组成的方程组 解得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{1}{9}$.

43. 已知 $A=\{x|x\leqslant -3$ 或 $x>2\}$，$B=\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant a,\ a>-2\}$，求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

解：当 $-2<a\leqslant 2$ 时，$A\cap B=\{x|x\leqslant -3$ 或 $x>2\}$ $A\cup B=\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant a\}$ 当 $a>2$ 时，$A\cap B=\{x|x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant a\}$，$A\cup B=\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$.

44. 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

解：$B=\{3,2\}$，$C=\{-4,2\}$ $\because A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$ $\therefore 2\notin A$，$3\in A$，将 $x=3$ 代入 A 的方程，得 $a^2-3a-10=0$，解得 $a=5$ 或 $a=-2$，代回 A 的方程检验：当 $a=-2$ 时，$x^2+2x-15=0$ 解得 $x=-5$，$x=3$，满足题设条件，当 $a=5$ 时 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=3$，$x=2$. 此时 $A=B=\{3,2\}$ 与题设 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾，$a=5$ (舍去) $\therefore a=2$.

45. $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0\}$ 且 $A\cap R^+=\varnothing$，求实数 p 的范围.

解：$\because A\cap R^+=\varnothing$ $\therefore$ 方程无实根或无正根，即 $(p+2)^2-4<0$ 或 $\begin{cases}(p+2)^2-4\geqslant 0\\-(P+2)<0\end{cases}$ 解得 $-4<p<0$ 或 $\begin{cases}P\geqslant 0 \text{ 或 } P\leqslant -4\\P>-2\end{cases}$ 所以 $-4<p<0$ 或 $P\geqslant 0$ 即 $P>-4$.