高等学校试用教材

工程数学

线性代数

上海交通大学数学教研室编

人民教育出版社

本书原由上海交通大学数学教研室编写，并请清华大学栾汝书同志审查和校订。现根据1978年2月西安教材会议的决定，作了修改和补充。由孙增光、刘景德、杨绮玉等同志参加编写工作，仍请栾汝书同志主审校订。可作为工业院校"工程数学：线性代数"试用教材。

高等学校试用教材

工 程 数 学

线 性 代 数

上海交通大学数学教研室编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 3 10/16 字数 86,000

1978年10月第1版 1979年2月第1次印刷

印数 1—120,000

书号 13012·0207 定价 0.28 元

目　　录

线 性 代 数

在本书中，我们主要介绍线性变换、矩阵及二次型的一些基本概念. 这些概念在实用上及理论上都有重要的价值，特别是矩阵理论在解线性方程组时很有用处，在实际问题中常常要碰到.

第一节　行列式及其性质

在工程上有很多问题归结到解一个线性方程组的问题. 本节讨论方程组，由此引出二阶及三阶行列式，然后推广到高阶行列式.

一、二阶行列式　给定二个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1}$$

求这方程组的解.

先以 b_2 乘第一个方程，以 b_1 乘第二个方程，然后两式相减，便消去了 y，即得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \tag{2}$$

以 a_2 乘第一个方程，以 a_1 乘第二个方程，然后两式相减，即得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{3}$$

上述两式中 x 或 y 的系数 $a_1b_2-a_2b_1$ 叫做二阶行列式，用下记号来表示：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

容易看出(2)式右边是把D中的a_1，a_2依次换成c_1, c_2. 同样(3)式右边是把D中的b_1，b_2换成c_1，c_2. 于是(2)，(3)两式的右边依次为两个二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

若$D\neq 0$,则由(2)，(3)可得

$$x=\frac{D_1}{D}, \quad y=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

把(4)的x, y值代入方程组(1)就可以验证它是适合(1)的. 它是方程组(1)的唯一的一组解.

例1 解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x+4y=1, \\ x+3y=2. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-1\times 4=2,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3.$$

所以 $$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{2}, \quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

二、三阶行列式 给定三个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3. \end{cases} \tag{5}$$

像前面方法一样，先从第一、第二两方程中消去z，再从第一、第三两方程消去z，最后从所得的两个方程中消去y，就得到

$$(a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)x$$
$$=(k_1b_2c_3-k_1b_3c_2+k_2b_3c_1-k_2b_1c_3+k_3b_1c_2-k_3b_2c_1) \tag{6}$$

我们把 x 的系数叫做三阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

容易看出，(6)式右边刚好是 D 中的 a_1, a_2, a_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 而得到的结果，所以右边是

$$D_1=\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

这样(6)式就可以写成

$$Dx=D_1,$$

同理可以得到

$$Dy=D_2,$$

$$Dz=D_3,$$

这里 D_2 是 D 中的 b_1, b_2, b_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 所得到的行列式. D_3 是 D 中的 c_1, c_2, c_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 所得到的行列式.

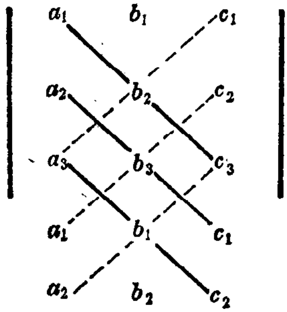
若 $D\neq 0$, 则可得到

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D},\quad z=\frac{D_3}{D}. \tag{7}$$

把(7)代入方程组(5)就可以验证它们是适合(5)的，所以是线性方程组(5)的唯一的一组解. 这就是**克莱姆法则**.

三阶行列式的展开 如果研究行列式 D 的构造，我们会发现展开行列式的规则.

在行列式 D 下，另写第一行，第二行，则成



取在实线上的三元素作乘积,冠以(+)号,则得三项

$$+a_1b_2c_3,\quad +a_2b_3c_1,\quad +a_3b_1c_2.$$

又取在虚线上的三元素作乘积,冠以(−)号,则得另三项

$$-a_3b_2c_1,\ -a_1b_3c_2,\ -a_2b_1c_3.$$

行列式D的展开式为

$$D=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

此法便于记忆,可以依此法计算三阶(仅限于三阶)行列式.

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{aligned} D&=1\times2\times2+2\times1\times3+3\times2\times1\\ &\quad-3\times2\times3-1\times1\times1-2\times2\times2\\ &=4+6+6-18-1-8=-11. \end{aligned}$$

例 3 解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-5y+3z=2, \\ x-y+z=-1. \end{cases}$$

解
$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-10-1-12+5+6+4=-8.$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6.$$

所以方程组的解为

$$x=\frac{-11}{8},\quad y=\frac{-9}{8},\quad z=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4}.$$

求线性方程组(5)的解，主要是算 D, D_1, D_2, D_3. 为了便于计算行列式，我们需要研究三阶行列式的一些性质. 在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

中，a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 叫做行列式的元素. 横排叫行，纵排叫列. a_1, b_1, c_1 是第一行，a_2, b_2, c_2 是第二行，a_3, b_3, c_3 是第三行. a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 依次是第一、第二、第三列.

如果把行列式 D 的行列互换，而不改变各行各列的顺序，得到行列式

$$D'=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

D' 叫做 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

性质 3　把一行列式的某行(列)的所有元素乘上某数 k 等于用 k 乘行列式. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 4　行列式中有一行(或一列)元素全是 0，则行列式的值为 0.

性质 5　如果行列式的某行(列)的各元素是二项之和，那么这个行列式等于两个行列式的和. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_1 & b_2+d_2 & c_2+d_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的任一行(列)的元素乘以同一数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

为了以后说理之便，我们用记号 a_{ij} 来代表行列式的元素. a_{ij} 是行列式中在 i 行 j 列的元素. 利用新记号可以把二阶、三阶行

列式写成下面的形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

用这种记号研究行列式是很方便的.

在三阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的行和列的元素，余下的元素构成一个二阶行列式，它与 $(-1)^{i+j}$ 的乘积叫做 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中的 a_{23} 的代数余子式是

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 7　行列式 D 中，任一行(列)中各元素与其代数余子式的乘积的和等于行列式的值. 任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积的和等于 0. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ D, & i = j. \end{cases} \quad i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3.$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ D, & i = j. \end{cases} \quad i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3.$$

以上七个性质，请读者验证.

在性质 7 中

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i=1,\ 2,\ 3.$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}, \quad j=1,\ 2,\ 3.$$

依次叫做行列式D按第 i 行的展开式及按第 j 列的展开式．例如

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

按第二行展开

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

故 $$D=-4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=27.$$

三、高阶行列式　对于任意正整数n，我们来定义n阶行列式．设有n^2个数，排列成n行n列(横的称行，纵的称列)如下

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{matrix}$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数．今在每一行中选出一数，并且要求这样选出的n个数都在不同的列上．作这n个数的乘积，然后按一定的规则乘以 $+1$ 或 -1，将所有这样得到的乘积求代数和，这个和数称为按上述次序排成n行n列的这n^2个数相对应的n阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(\pm1)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

上面等式右端所写出的一项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 是由第一行第 i_1 列

的数 a_{1i_1}，第二行第 i_2 列的数 a_{2i_2}，…第 n 行第 i_n 列的数 a_{ni_n} 所得到的乘积．由于要求这 n 个数在每一列中也恰有一个，这样 $i_1 i_2\cdots i_n$ 就是 1, 2, …, n 的一个排列．上面和式是对所有不同排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 求和的，所以和式中共有 $n!$ 项．

现在来确定每一项前的正负号．

首先介绍排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数的意义．在排列中一个数字 i 的左边比 i 大的数字的个数称为该数字 i 的逆序数．排列中所有数字的逆序数的和称为该排列的逆序数．例如当 $n=5$ 时，排列 32514 中 1 的逆序数为 3, 2 的逆序数为 1, 4 的逆序数为 1, 3 与 5 的逆序数都为 0; 因此排列 32514 的逆序数为 $3+1+1=5$．一个排列的逆序数也就是在排列中将数字分别向左调动以调到自然排列 $123\cdots n$ 所需要调动的总次数．

现在规定，在行列式定义中，若项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则规定在该项前符号为正；若排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数为奇数，则规定在该项前的符号为负．也就是说若 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 I 则该项前的符号为 $(-1)^I$．

读者可以自己验证，我们已学过的二阶及三阶行列式都符合上面的定义．为了要证明行列式的性质，先讲二个定理．

定理 1　一排列中的任两个数调换，它的逆序数变更奇偶性．

证　(1) 设排列为 $PabQ$，P 表 a 前的 p 个数，Q 表 b 后的 q 个数，a, b 表相连二数．a, b 调换为 $PbaQ$，P, Q 中各数位置不变．经过调换，a, b 与 P, Q 间的逆序数不变，若 a, b 是自然顺序，经调换，逆序增 1．若 a, b 有一逆序，经调换为 b, a，逆序数减 1．所以调换 a, b 就要改变 $PabQ$ 逆序数的奇偶性．

(2) 设 $PaQbR$，Q 表 a, b 二数之间的 q 个数，R 表 b 后的 r 个数．若把 $PaQbR$ 调换成 $PQabR$，要作 q 次调换．再把 $PQabR$ 调换成 $PbQaR$，要作 $q+1$ 次调换，前后共作调换 $2q+1$ 次．所以

a, b 换位改变了逆序数的奇偶性.

定理 2 n 阶行列式的项也可写如

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}.$$

其中 S 是第一下标 α', β', $\cdots$, λ' 的逆序数, T 是第二下标排列 α, β, $\cdots$, λ 的逆序数.

证 该项的任意二元素互换,两下标也同时改变.

α', β', $\cdots$, λ' 的逆序数从奇变为偶,或从偶变为奇.

α, β, $\cdots$, λ 的逆序数从奇变为偶,或从偶变为奇.

但 $S+T$ 在二元素互换后却不改变奇偶性. 如把第一下标按自然顺序 1, 2, $\cdots$, n 排列, (它的逆序数为 0)而第二下标 $\alpha\beta\cdots\lambda$ 随之变换为 $i_1i_2\cdots i_n$ 则有

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}=(-1)^{I}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

因 $S+T$ 与 $0+I$ 同为奇数或同为偶数. 故有

$$\sum(-1)^{I}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=\sum(-1)^{S+T}a_{\alpha'\alpha}a_{\beta'\beta}\cdots a_{\lambda'\lambda}.$$

对三阶行列式的七个性质对 n 阶行列式也是正确的. 下面是行列式性质 1、2 的证明.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

转置后为

$$A'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $\qquad b_{\lambda\mu}=a_{\mu\lambda}$, $\lambda=1, 2, \cdots, n$, $\mu=1, 2, \cdots, n$.

A 中任取一项设为

$$(-1)^{I+J}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

A' 中相当项为

$$(-1)^{J+I}b_{j_1i_1}b_{j_2i_2}\cdots b_{j_ni_n}.$$

其中 I 是 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的逆序数，J 是 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数．因为

$$b_{j_1i_1}=a_{i_1j_1},\ \cdots,\ b_{j_ni_n}=a_{i_nj_n}.$$

所以它们的绝对值相等．$(-1)^{I+J}=(-1)^{J+I}$．因此 A 中任一项，A' 中必有一项与之相等．反过来也是一样，故 $A=A'$．

性质 2　交换行列式的任意两行或两列，行列式仅改变符号．

证

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1p} \cdots a_{1q} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2p} \cdots a_{2q} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{np} \cdots a_{nq} \cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换 p, q 两列得行列式

$$A_1=\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1q} \cdots a_{1p} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2q} \cdots a_{2p} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nq} \cdots a_{np} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A 中任取一项

$$(-1)^{I+T}a_{\alpha i}\cdots a_{\beta p}\cdots a_{\gamma q}\cdots{}_{\lambda n},$$

其中　I 是 $\alpha\cdots\beta\cdots\gamma\cdots\lambda$ 的逆序数．

T 是 $i\cdots p\cdots q\cdots n$ 的逆序数．

A_1 中必有一相当项

$$(-1)^{I+T'}a_{\alpha i}\cdots a_{\beta q}\cdots a_{\gamma p}\cdots a_{\lambda n}.$$

其中　I 是 $\alpha\cdots\beta\cdots\gamma\cdots\lambda$ 的逆序数，I 没有变．

T' 是 $i\cdots q\cdots p\cdots n$ 的逆序数，与 T 相差为一奇数(定理 1)．

所以 A 中任取一项，A_1 中必有一项与它绝对值相同而符号相反，故 $A=-A_1$.

性质 3, 4, 5, 6, 7 在 n 阶行列式也是正确的，文字上的叙述与证明请读者自作.

在一般情况下，利用这些性质来计算 n 阶行列式，比直接用定义计算要简便得多.

例如计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

把第三列加到第四列上去，然后把第三列的 -2 倍加到第一列上去，就得到

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

给定含有 n 个未知数线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的系数行列式记作 D.

方程两边依次乘以 $A_{11}, A_{21}, \cdots, A_{n1}$ 然后相加得 x_1 的系数

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=D,$$

而 $x_2, \cdots, x_n$ 的系数都等于零(行列式的性质 7)，故

$$Dx_1=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}.$$

同理

$$Dx_2=b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$Dx_n=b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn}.$$

上面 n 个方程的右边依次为

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

如把这 n 个行列式记作 $D_1, D_2, \cdots, D_n$, 并设 $D\neq0$，则所给方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, \cdots, x_n=\frac{D_n}{D}.$$

这就是**克莱姆法则**.

例 4 解方程组

$$\begin{cases} x-y+z+2t=1, \\ x+y-2z+t=1, \\ x+y+t=2, \\ x+z-t=1. \end{cases}$$

解 先求下面几个行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$