宏观经济模型的数学方法

HONGGUAN JINGJI MOXING DE SHUXUE FANGFA

林 恩 武

福建人民出版社

宏观经济模型的数学方法

林　恩　武

福　建　人　民　出　版　社
一九八五年·福州

宏观经济模型的数学方法

林 恩 武

*

福建人民出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 8印张 2插页 165千字
1985年6月第1版
1985年6月第1次印刷
印数：1—8,790
书号：4173·58　　定价：1.45元

目　　录

第一部分

第二部分　线性生产模型

第三部分 供求均衡论

第四部分 生产函数及其应用

第一部分

第一章 绪论

任何经济现象都是质量和数量的统一，许多经济范畴如产量、收入、工资等等都具有数量表现的特征，因此经济科学的研究，在揭示经济范畴的社会内容的同时，需要运用数学工具说明经济现象、经济范畴间的数量联系和数量变化。

用数学方法研究经济问题，在资本主义发展的较早阶段，一些资产阶级经济学者就已开始尝试了。如十七世纪末十八世纪初，意大利的瓦塞和英国的布锐斯科，就使用了这一方法。1758年，法国重农学派的创始人魁奈，提出了被他称之为《经济表》的国民经济数量模型。在1776年出版的亚当·斯密的名著《国民财富的性质和原因的研究》中，已经在用严格的数学推理来论述经济现象了。十九世纪以来的经济学家，开始越来越多地应用数学的符号和思想方法来解释经济现象。虽然，这里面也不乏成功的例子。例如，数理学派的卓越代表华乃斯所提出的解释资本主义竞争经济的“一

般竞争均衡论”，推动了经济数学的发展。又如，列昂节夫的“部门平衡表”，奠定了线性生产模型的基础。但是资产阶级经济学者应用数学方法的理论前提是资产阶级政治经济学，他们用纯数学方法的研究，偷换社会经济的分析，结果，“‘物质消失了’，剩下的只是一些方程式。”①这就无法揭示经济范畴所体现的生产关系，无法揭示各经济范畴间的内在联系和生产关系的发展规律，这是在经济学研究中借鉴应用数学方法、技术时所必须注意的。

用适当的数学模型来描述经济发展规律的范例，是马克思在简单再生产和扩大再生产理论中所设计的数学模式②。马克思在研究资本主义生产方式的主要规律时，设想了用数学方式来研究的问题③。

在我国，过去我们批判了资产阶级经济学家在经济研究中应用数学方法的唯心主义观点和形而上学方法，这是对的。但在另一方面，把数学方法在经济学研究中的应用视为禁区，在很长一段时间内，极少有人从事这方面的研究，深怕被扣上“资产阶级学者”的帽子，形成了经济与数学长期分家的局面，给经济研究工作造成了不应有的损失。今后，随着我国四化建设的发展，社会主义经济数量方面的研究将越来越重要。随着技术的突飞猛进和电子计算机的发展，在社会主义经济研究和计划工作中使用现代电子计算机已经势在必行，但这只有在广泛运用数学方法的基础上才有可能，因

① Б·С·涅姆钦诺夫：《经济数学方法和模型》，中译本，商务印书馆1980年版，第15页。

② 《马克思恩格斯全集》第24卷，第3篇。

③ 《马克思恩格斯全集》第33卷，第87页。

为这种机器只加工翻译成数学语言的资料。电子计算机的使用，使得数学和经济的关系越来越密切，许多过去还是非常抽象的，在理论上很不完善的经济数学模型，现在都可以通过电子计算机进行计算、验证，并使之进一步完善起来。

新的形势要求经济科学成为精密的科学，经济学家要成为社会的工程师，现代的经济研究不应当以文献资料的加工为基础，而应当以现实生活的具体事实和数字为基础。经济学家应当善于设计管理社会生产的机制，善于调节这种机制的作用。因此经济科学的研究，在加强马克思主义政治经济学的理论研究的同时，在实际经济问题的研究中，必须重视数学工具的应用，加强和发展数量方面的研究。要用马克思主义的观点分析批判西方的各种数量经济模型，比较透彻地了解各个经济数学模型的经济意义，真正做到“洋为中用”。本书就是为了适应这一新形势的要求，考虑到我国计划经济的特点，为经济工作者和应用数学工作者提供适用于我国国情的宏观经济数学模型。对于经济工作者来说，从书中许多浅现的经济实例中，可以看到数学在经济学中广阔的活动天地，从而提高对学习经济数学的兴趣。对数学工作者来说，从书中所用到的现代数学工具及其严密的论证，看到现代数学在经济领域中应用的光明前景，改变过去认为经济不需要现代数学理论的偏见。

本书介绍宏观经济模型，主要有生产的线性模型、供求均衡模型和生产函数模型。虽然这些模型多数产生于西方国家，但只有在实行计划经济的社会主义国家，只有在电子计算机投入实际使用的今天，它们才有真正的用武之地。目

前，对这些模型的实际应用，主要集中在生产的线性模型；其中尤以列昂节夫模型应用最广泛。在苏联，利用生产函数模型对部门一级的国民经济进行模拟的工作，也已经在深入开展。在我国，除开列昂节夫模型外，对其他模型还很生疏。我们衷心地希望，本书能为广泛地学习、运用宏观经济数学模型起一点促进作用。

第二章　近代数理经济基本数学知识

经济模型是以数学方程体系来表述经济现象各有关变量之间的相互依存的数量关系的，掌握它，必须具备必要的数学知识。凸多面体，非负矩阵，多值映射及其不动点原理，最优控制及庞特里金极值原理等近代数学理论，是现代数理经济的基本工具，也是阅读本书介绍的经济模型所需要的基本数学知识，因此专章介绍如下。

§1 集　　合

一、集合

凡具有某种特定性质$p(x)$的事物x的全体，称为**集合**，记作$E=\{x|p(x)\}$，其中x称为集合E的**元素**。例如把某个函数$f(x)$等于零的自变量x的全体组成的集合，记作$E=\{x|f(x)=0\}$。又如假定全社会一共有n种商品，矢量$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它表示这$n$种商品各取数量$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$而组成的$n$种商品的一个数量组合。当第$i$种商品对应的价格为$p_i$时，那么$P=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$就是价格矢量。当某个消费者拥有固定资金$K$时，他买得起的所有商品

矢量集合$\hat{X}(p)$的表示式是：

$$\hat{X}(p)=\{x|(x,\ p)\leqslant K\}$$

这里$(x,\ p)$表示矢量x与p的数量积。集合也常用大写字母S、T、X、M、U等表示。

没有包含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$。具有有限个元素的集合称为**有限集**，通常记作$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$，其中$x_i$是该集合的第$i$个$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$元素，$n$为该集合的元素个数。非有限集合称为**无限集**。

一个元素x_0属于集合X，记作$x_0\in X$；不属于集合X，记作$x_0\bar{\in}X$。

若$x_0\in X_1$必有$x_0\in X_2$，则称X_2包含X_1，记作$X_2\supseteq X_1$或$X_1\subseteq X_2$，并称X_1是X_2的**子集**。如果X_1不是X_2的子集，则记$X_1\nsubseteq X_2$。当$X_1\subseteq X_2$，但$X_2\nsubseteq X_1$时，说X_1是X_2的**真子集**，记为$X_1\subset X_2$。如果$X_1\subseteq X_2$，且$X_2\subseteq X_1$，则称两个集合X_1与X_2相等，记为$X_1=X_2$。显然，对任何集合X有$X\supseteq\varnothing$，$X\supseteq X$。若对三个集合X_1、X_2、X_3有关系，$X_3\supseteq X_2$，且$X_2\supseteq X_1$，则$X_3\supseteq X_1$。如果$X_3=X_2$，且$X_2=X_1$，则$X_3=X_1$。

二、集合的运算

和集（并集）　它是两个集合的元素所组成的集合，其数学表达式是：

$$X_1\cup X_2=\{x|x\in X_1\text{或}x\in X_2\}$$

和集的性质有：

(1) $X\cup X=X$

(2) $X\cup\varnothing=X$

(3) $X_1 \cup X_2 = X_2 \cup X_1$

(4) $(X_1 \cup X_2) \cup X_3 = X_1 \cup (X_2 \cup X_3)$

(5) 若$X_1 \subseteq X_2$，则$X_1 \cup X_3 \subseteq X_2 \cup X_3$

(6) 若$X_i \subseteq X$，$i=1, 2, \cdots$，则$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \subseteq X$

(7) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(X_i \cup Y_i) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i)$

交集（通集） 它是两个集合共同的元素所组成的集合，其数学表达式是：

$$X_1 \cap X_2 = \{x | x \in X_1 且 x \in X_2\}$$

交集的性质有：

(1) $X \cap X = X$

(2) $X \cap \varnothing = \varnothing$

(3) $X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_1$

(4) $(X_1 \cap X_2) \cap X_3 = X_1 \cap (X_2 \cap X_3)$

(5) 若$X_1 \subset X_2$，则$X_1 \cap X_3 \subseteq X_2 \cap X_3$

(6) $(X_1 \cap X_2) \cup X_3 = (X_1 \cup X_3) \cap (X_2 \cup X_3)$

(7) $(X_1 \cup X_2) \cap X_3 = (X_1 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3)$

(8) $X_1 \cap X_2 \subseteq X_1 \subseteq X_1 \cup X_2$

(9) 若 $X_i \supseteq X$，$i=1, 2, \cdots$，则$\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \supseteq X$

(10) $X \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(X \cap X_i)$

差集、余集（补集） 它是属于一个集合而不属于另一个集合的元素所组成的集合，其数学表达式是

$$X_1 \backslash X_2 = \{x | x \in X_1 但 x \in X_2\}$$

称为X_1与X_2之差。若$X_2 \subseteq X_1$，则称$X_1 \backslash X_2$为X_2关于X_1的**余集**（补集），也记作CX_1X_2。

差集的性质：

(1) 若$X_2 \supseteq X_1$，则$X_1 \setminus X_2 = \varnothing$

(2) $(X_3 \setminus X_1) \setminus X_2 = X_3 \setminus (X_1 \cup X_2)$

(3) $(X_1 \setminus X_2) \cup X_2 = X_1$的充分必要条件是$X_2 \subseteq X_1$时成立。

(4) $(X_1 \setminus X_2) \cap X_3 = (X_1 \cap X_3) \setminus (X_2 \cap X_3)$

(5) 若$X_1 \subseteq X_3$，$X_2 \subseteq X_3$，则$X_1 \setminus X_2 = X_1 \cap C_{X_3} X_2$

(6) $X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus X_i)$

(7) $X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus X_i)$

直积 它是以集合的元素组合为元素所组成的集合，其数学表达式是：

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

它称为X与Y的**直积集合**。这里要注意，(x, y)仅代表集合$X \times Y$的一个元素。

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i, \ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

称为X_1，X_2，$\cdots$，X_n的**直积**。

当$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = R$，$R$为实数全体组成的集合，那么记

$$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in R, \ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

如果在集合R^n上定义两元素的距离（用符号ρ表示）：

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

其中$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，是集合$R^n$中的任意两元素。显然，$\rho(x, y)$有如下性质：

(1) $\rho(x, y) \geqslant 0$，$x=y$ 时的充分必要条件是$\rho(x, y)=0$

(2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$

(3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z)+\rho(z, y)$

我们把定义了距离ρ的集合R^n叫做**n维欧几里德空间**（以后，如果没有特别说明，我们都把R^n当作n维欧几里德空间，简称**欧氏空间**）。由于R^n中的任意一点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$对应一个n维矢量，所以我们也可把R^n看作一个n维**矢量空间**。该空间任何一个矢量$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的**欧几里德范数**，定义为

$$\|x\|=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}$$

以后如果没有特别申明，符号$\|\cdot\|$都是代表欧几里德范数。

三、对R^n中的点集而言的概念

邻域、内点、极限点

点x_0的$\delta(>0)$**邻域**，记为$N(x_0, \delta)$，它表示所有与x_0的距离小于δ的点的全体组成的集合，即

$$N(x_0, \delta)=\{x \mid \rho(x, x_0)<\delta\}$$

对于集合X和点x_0，如果存在一个$\delta>0$，使$N(x_0, \delta) \subseteq X$，则称$x_0$为集合$X$的**内点**。

若集合X中存在点列$\{x_n\}$，$n=1, 2, \cdots$，使$x_n \neq x_0$对任意的$n=1, 2, \cdots$成立，并且当$n \neq m$时，$x_n \neq x_m$，$\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0)=0$，则称$x_0$为$X$的**极限点**。

导集、闭集、开集、有界集

集合X的所有极限点所组成的集合称为X的**导集**，记为

X'。显然，若$X_1\subseteq X_2$，则$X_1'\subseteq X_2'$，$(X_1\cup X_2)'=X_1'\cup X_2'$。

若$X'\subseteq X$，则称X为**闭集**，$X\cup X'$称为X的**闭包**，记作$\overline{X}$。显然，X'，$\overline{X}$都是闭集，一切有限集都是闭集。当X_i，$i=1, 2, \cdots$为闭集时，那么$\bigcup_{i=1}^{n} X_i$，$\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$都是闭集，并且$X$为闭集的充分必要条件是$R^n\setminus X$是开集。

若X的每一点都是它的内点，则称X为**开集**。显然，若X_i为开集，那么$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$，$\bigcap_{i=1}^{n} X_i$都是开集，并且$X$是开集的充分必要条件是$R^n\setminus X$是闭集。

对集合E，记$d(E)=\sup\limits_{x, y\in E}\rho(x, y)$为集合$E$的**直径**，当$d(E)<\infty$时，称集合$E$为**有界集**。

§2 凸多面体及其分离定理

一、凸多面体

对于R^n中的各种集合，凸多面体是重要的一类，它是研究生产线性模型的重要数学概念。

下面我们从最简单的几何图形——直线与线段开始，逐步引入这个概念。

直线与线段 通过R^n中任意两点x_1与x_2的**直线**，定义为集合

$$X=\{x\mid x=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1, \ \lambda\in R\}$$

而集合

$$X=\{x\mid x=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1, \ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$$

称为连接x_1和x_2的**线段**。

超平面与半空间 令$c=(c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n)$为给定的常矢量，$b$为给定的标量，则集合$X=\{x|cx=b\}$叫做$R^n$的**超平面**。这里$cx=(c, x)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i$，它表示矢量$c$与$x$的内积。$R^n$中的任意一个超平面$cx=b$，把$R^n$分为互不相交的三部分：

$$X_1=\{x|cx<b\}, \quad X_2=\{x|cx=b\}$$

$$X_3=\{x|cx>b\}$$

其中，X_1和X_3称为**半开空间**，与此类似，$X_4=\{x|cx\leqslant b\}$和$X_5=\{x|cx\geqslant b\}$叫做**半闭空间**。

凸集合 如果对集合$X\subseteq R^n$中的任意两点x_1和x_2，连接这两点的线段都属于这个集合，则把该集合X叫做**凸集合**。

端点 对于点$x\in R^n$，当它不能够用凸集合X中的两个点x_1，x_2表示为$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$时，我们称点x是凸集X的**端点**。换句话说，如果x是凸集X的端点，那么，满足等式$x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$，$0<\lambda<1$的点$x_1$，$x_2$在$X$中不存在。

凸集的基本性质：两个凸集的交集还是凸集。

【证明】设X_1、X_2为两个凸集合，$X_3=X_1\cap X_2$，任取x_1，$x_2\in X_3$，从而x_1，$x_2\in X_1$，且x_1，$x_2\in X_2$，因此对$0\leqslant\lambda\leqslant 1$的$\lambda$有

$$\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\in X_1 \text{且} \lambda x_2+(1-\lambda)x_1\in X_2$$

所以得$\lambda x_2+(1-\lambda)x_1\in X_3$，即$X_3$是凸集合。

不难看出，超平面和半空间都是凸集合，并且超平面、半闭空间及它们的有限个交集都是闭的凸集。这称为**凸多面**

体状集合。

凸组合 所谓R^n的点 x_1，x_2，…，x_m 的**凸组合**，就是以下式定义的点x：

$$x=\sum_{i=1}^{m}\mu_i x_i,\ \mu_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ 且\sum_{i=1}^{m}\mu_i=1$$

显然，由有限个点 x_1，x_2，…，x_m 的所有凸组合所组成的点集合

$$X=\{x\mid x=\sum_{i=1}^{m}\mu_i x_i,\ \mu_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i=1\}\qquad(2\cdot1)$$

是凸集合。

凸体 包含R^n中的任一子集A的所有凸集的交集，叫A的**展开凸体**。它有如下性质：R^n中包含有限个点 x_1、x_2，…，x_m的展开凸体，就是由x_1，x_2，…，x_m的所有凸组合所组成的凸集。

【证明】令凸集X为（2·1）式所示，由于X含有x_1，x_2，…，x_m，所以，若记Y为x_1，x_2，…，x_m的展开凸体，那么由定义$X\supseteq Y$，用数学归纳法求证任何包含x_1,x_2,…,x_m的凸集一定包含x_1，x_2，…，x_m 的所有凸组合，证明$X\subseteq Y$。

以后，我们把有限个点x_1，x_2，…，x_m的展开凸体，叫做由这些点所展开的**凸多面体**。显然，对于这样的凸多面体，只有这些点 x_1，x_2，…，x_m 才有成为端点的资格。当