初中

数学解题思路

林炳华　主编

气象出版社

初中数学解题思路

林炳华　主编

气象出版社

(京)新登字 046 号

内容简介

本书按九年制义务教育新大纲编写，紧密配合现行初中数学课本，突出重点，注意方法和思路的分析，它的主要特点抓纲扣本，纲本结合。从教学实际出发，既有利于初中数学教师剖析教材，精心备课，提高教学水平；也有助于初中学生掌握知识，发展能力，提高学习效果。

本书共分六章：内容包括实数、代数式、方程和不等式、函数及其图象、解三角形、直线形和圆。还附有综合练兵题。每一节内容包括内容概要、范例分析、练习题、答案及提示四个部分。

本书适合于初中各年级师生使用，它也是社会青年的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学解题思路/林炳华主编. —北京：气象出版社，1996. 1

ISBN 7-5029-1944-9

Ⅰ. 初… Ⅱ. 林… Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ. G634. 6

初中数学解题思路

林炳华　主编

责任编辑：陈爱丽　终审：纪乃晋

封面设计：田春耕　责任技编：刘祥玉　责任校对：叶子葳

*　*　*

气象出版社出版

（北京市海淀区白石桥路 46 号　邮编：100081）

北京昌平兴华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　全国各地新华书店经销

开本：787×1092　1/32　印张：9. 5　字数：213 千字

1996 年 1 月第一版 1996 年 1 月第一次印刷

印数：1—20000　**定价：8. 80 元**

ISBN 7-5029-1944-9/G・0564

前　言

本书按九年义务教育新大纲编写。紧密配合初中各年级数学课本进行编写，内容源于课本，高于课本。

怎样才能掌握初中数学的解题思路和方法，这是大家所关心的问题。的确，要学好初中代数、平面几何和三角函数等，除了掌握好有关的概念、定理、公式外，还必须通过各种各类典型范例分析，才能进一步加深对数学基本知识的理解，培养分析问题的能力，开拓解题思路，寻求解题规律，掌握解题方法。

由于时间和水平所限，书中难免有不妥之处，望读者不吝赐教。

编者

1995 年 4 月于福州

《初中数学解题思路》
编委会名单

目　录

第一章　实数与代数式

§1.1　实数

一、内容概要

（一）实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{循环小数及有限小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

（二）实数的有关概念

1. 数轴：规定了原点、正方向和单位长度（称为数轴三要素）的直线叫做数轴。

2. 相反数：只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。零的相反数是零。

3. 倒数：1 除以一个不等于零的数的商，叫做这个数的倒数。零没有倒数。

4. 绝对值：表示一个数的点离开原点的距离，叫做这个数的绝对值。

5. 方根：如果一个数的 n 次方（n 是大于 1 的自然数）等于 a，则这个数叫做 a 的 n 次方根。

正数 a 的正平方根，叫做 a 的算术平方根，记作 $\sqrt{a}$。

6. 科学记数法：把一个数表示成带一位整数的数与10的幂相乘的形式，称为科学记数法。

7. 有效数字：把由四舍五入得到的近似数，从左边第一个不是零的数字起，到末位数字为止的所有数字，都叫做这个数的有效数字。

(三)实数大小的比较

在以从左到右的方向为正方向的数轴上，任意两点所表示的数，右边的总比左边的大。

(四)实数的基本运算

同级运算从左到右进行，混合运算应先乘方、开方，然后乘除，最后加减。如有括号先算小括号内的，然后中括号，最后大括号。

二、范例分析

例 1.（如图 1.1）数轴上的点 A、B、C、D 分别表示实数 a、b、c、d，其中 A 和 B 关于原点对称。

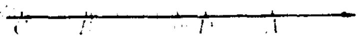


图 1.1

(1)化简：$(a+b)(c+d)$

(2)计算：$2|c-b|-|a+d|+\sqrt{(2b-a)^2}$

分析：(1)由 A 和 B 关于原点对称，可得 $a=-b$，即 $a+b=0$

(2)根据绝对值和根式的性质，$|c-b|=b-c$，$|a+d|=a+d$，$\sqrt{(2b-a)^2}=a-2b$。

解：(1)由题意得，$a+b=0$，$\therefore (a+b))(c+d)=0$

(2) $2|c-b|-|a+d|+\sqrt{(2b-a)^2}$

$=2(b-c)-(a+d)+a-2b=2b-2c-a-d+a-2b$

$=-2c-d$

例 2、比较下列各组数的大小(其中第 3 题用不等号将各数从大到小连接起来)

(1) $-\dfrac{7}{3\sqrt{2}}$和$-\dfrac{5}{3}$

(2) $|-3|-|-\sqrt{3}|$和$|\sqrt{3}-3|$

(3) $(-\pi)^{\circ}, 0, \sqrt[3]{27}, -1\dfrac{2}{3}, \text{tg}^2 30^{\circ}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

分析:(1)分数的大小比较通常将各分数化为同分母分数。

(2)有绝对值符号的先去绝对值再进行比较大小。

(3)可在数轴上大致描出各数所对应的点,再根据数轴上表示的任意两个实数,右边的数总比左边的数大的方法进行比较。

解:(1) $\because \left|-\dfrac{7}{3\sqrt{2}}\right|=\dfrac{7\sqrt{2}}{6}, \left|-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{10}{6}$

又$\because 7\sqrt{2}<10 \therefore \dfrac{7\sqrt{2}}{6}<\dfrac{10}{6}$

$\therefore -\dfrac{7}{3\sqrt{2}}>-\dfrac{5}{3}$

(2) $\because |-3|-\left|-\sqrt{3}\right|=3-\sqrt{3}$

$|\sqrt{3}-3|=3-\sqrt{3}$

$\therefore |-3|-\left|-\sqrt{3}\right|=\left|\sqrt{3}-3\right|$

(3) $\because (-\pi)^{\circ}=1, \sqrt[3]{27}=3, \text{tg}^2 30^{\circ}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \sqrt[3]{27}>(-\pi)^{\circ}>tg^2 30^{\circ}>0>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}>-1\dfrac{2}{3}$

例 3、选择题

(1)如果 $a>0,b<0$，且 $a+b>0$，则(　　)

(A)$-a<a<b<-b$　　(B)$a<-b<b<-a$

(C)$-b<b<-a<a$　　(D)$-a<b<-b<a$

(2)在数轴上，到原点的距离等于 9 个单位长度的点，表示的是(　　)

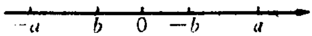
(A)9　(B)-9　(C)± 9　(D)$|\pm 9|$

(3)把代数式$(1-a)\sqrt{-\frac{1}{1-a}}$根号外的同式移入根号内，则原式等于(　　)

(A)$\sqrt{1-a}$　(B)$-\sqrt{1-a}$

(C)$\sqrt{a-1}$　(D)$-\sqrt{a-1}$

分析：(1)解法 I：由 $a>0,b<0,a+b>0$，得知 a 为正数，b 为负数，且 a 到原点的距离大于 b 到原点的距离。又由 $a,-a;b,-b$ 互为相反数是关于原点对称，所以 $a,-a;b,-b$ 四数在数轴上的大致位置为



即得 $-a<b<-b<a$，应选(D)

解法 II：根据已知条件选特殊值 $a=2,b=-1$ 则 $-a=-2,-b=1$ 易知 $-a<b<-b<a$ 故选(D)

(2)在数轴上表示一个数的点到原点的距离就是这个数的绝对值，那么到原点的距离等于 9 个单位的点表示的就是绝对值等于 9 的数，这样的数有两个，即 $+9$ 和 -9，而 $|\pm 9|=9$ 表示一数，故应选(C)。

(3)解法 I：要使二次根式$\sqrt{-\frac{1}{1-a}}$有意义，则$-\frac{1}{1-a}\geq 0$，即 $1-a<0$，那么$(1-a)\sqrt{-\frac{1}{1-a}}=-(a-1)\sqrt{\frac{1}{a-1}}=-$

$\sqrt{(a-1)^2 \cdot \frac{1}{a-1}} = -\sqrt{a-1}$，故应选(D)

解法Ⅱ：特殊值法，取能使根式有意义的数 $a=2$，则 $(1-a)\sqrt{-\frac{1}{1-a}} = (1-2) \cdot \sqrt{-\frac{1}{1-2}} = -1$，而(A)为 $\sqrt{-1}$，(B)为 $-\sqrt{-1}$，(C)为 1，(D)为 -1，故选(D)

小结：部分数学选择题通过对适合题意的特殊值，特殊位置或特殊情况的考察，采用特殊值法进行解题，往往既能提高解题速度，又能确保其正确性。

例四、 计算下列各题

(1) $\left(4\frac{3}{8}-1\frac{2}{7}\right)-\left(2\frac{1}{2}+2\frac{5}{7}\right)$

(2) $\dfrac{(-2)^3\times(-1)^{1994}-|-12|\div\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(-1)\div\left(-\frac{4}{5}\right)\times1\frac{1}{4}}$

(3) $(27.3)^2\times\left(-\frac{2}{5}\right)^2+(-22.7)^2\div\left(-\frac{25}{4}\right)$

解：(1)原式 $=\left(4\frac{3}{8}-2\frac{4}{8}\right)-\left(1\frac{2}{7}+2\frac{5}{7}\right)$

$=1\frac{7}{8}-4=-2\frac{1}{8}$

(2)原式 $=\dfrac{-8\times1-12\div\left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}}$

$=\dfrac{-8+48}{\frac{25}{16}}$

$=40\times\frac{16}{25}$

$$=25\frac{3}{5}$$

(3)原式$=(27.3)^2\times\frac{4}{25}-(22.7)^2\times\frac{4}{25}$

$$=[(27.3)^2-(22.7)^2]\times\frac{4}{25}$$

$$=(27.3-22.7)(27.3+22.7)\times\frac{4}{25}$$

$$=4.6\times50\times\frac{4}{25}=36.8$$

解后语:灵活运用运算定律及乘法公式可使运算简捷。

三、练习题

1. 选择题

(1)绝对值小于 2 的整数有(　　)

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

(2)若$\frac{a-1}{2}$是自然数,则 a 一定是(　　)

(A)偶数　　(B)奇数

(C)大于 1 的偶数　　(D)大于 1 的奇数

(3)a 与 b 互为相反数,且 $a=-2^2$,则 a^2-b 的值为

(A)12　　(B)-12　　(C)20　　(D)-20

(4)当 $a>0$ 时,化简 $\sqrt{-am^3}$的结果是(　　)

(A)$-m\sqrt{am}$　　(B)$m\sqrt{-am}$

(C)$-m\sqrt{-am}$　　(D)$m\sqrt{am}$

(5)用四舍五入法得到的近似数为 3.60,它所表示的数的范围是

(A)$3.55<3.60<3.65$　　(B)$3.55\leqslant3.60<3.65$

(C)$3.595<3.60<3.605$　　(D)$3.595\leqslant3.60<3.605$

2. 填空题

(1)如果 a,b 互为相反数,则 $a+b=$__________,如

果 a,b 互为倒数，则 $ab=$__________

(2)绝对值最小的数与最大的负整数的平方和为__________

(3)若 a,b 是实数，且 $|a|+|b-1|=0$，则 $(a-b)^{1994}=$__________

(4)4 是__________的绝对值，是__________的相反数，是__________的平方，是__________的算术平方根.

(5)实数 a,b,c 在数轴上的对应点如图 1.2 所示，且 $|a|=|c|$，则 $|a|-|a+b|+|c-b|+|a+c|$ 的值为__________

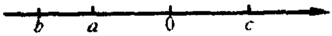


图 1.2

(6)若 a、b、c 都是有理数，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1$，则 $\frac{abc}{|abc|}=$__________

(7)a、b 互为相反数，c、d 互为倒数，m 的绝对值是 3，则 $m^2+2cd-\frac{a+b}{3m}=$__________

(8)要查表求一个正数的平方根，查表时将此数的小数点向右移动两位，查得的平方根的小数点应相应地向__________移动__________位。

(9)由四舍五入得到的近似数 1.0100 的有效数字的个数是__________

(10)用四舍五入法，按保留三个有效数字的要求，0.07602 的近似值是__________

(11)用科学记数法表示$-6480000=$__________

(12)计算器的按键顺序为$\boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{8}\ \boxed{\%}$，则其结果为__________

3. 比较下列各对数的大小

(1)$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$；$\sqrt{5}-\sqrt{3}$，$\sqrt{2}$；

(2)$-\pi$，-3.14，$-\sqrt{10}$，$(-\pi)^{\circ}$

4. 计算题

(1)$(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12})\times(-1\frac{1}{7})$；

(2)$2\sin45^{\circ}-(\sqrt{2}+1)^{-1}+(\sqrt{2})^{\circ}$；

(3)$(0.25)^{-\frac{1}{2}}+(-\frac{3}{5})^{\circ}+(\frac{1}{2})^{-3}$；

(4)$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\times[-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})]+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$；

(5)$[(-3)^{3}-(-5)^{3}]\div[(-3)-(-5)]$；

(6)$\left|\frac{1}{102}-\frac{1}{101}\right|+\left|\frac{1}{103}-\frac{1}{102}\right|-\left|\frac{1}{103}-\frac{1}{101}\right|$；

(7)$(-1)^{1994}+(-3)^{2}\times\left|-\frac{2}{9}\right|-4^{3}\div(-2)^{4}$；

(8)$\left|-\frac{1}{6}\right|\times(-6)+(\pi-3.14)^{\circ}-(2-\sqrt{3})^{-1}+[(-\sqrt{3})^{2}]^{\frac{1}{2}}$.

5. 证明题

如果两个实数互为倒数，那么它们的和的倒数与它们的倒数的和也互为倒数。

四、答案或提示

1. (1)C (2)D (3)A (4)C (5)D

2. (1)0,1;(2)1 因为绝对值最小的数为 0,最大的负整数为 -1,所以 $0^2+(-1)^2=1$;(3)1;(4)±4,-4,±2,16;(5)C 因为 $a<0$,$a+b<0$,$c-b>0$,$a+c=0$,所以原式 $=-a-[-(a+b)]+(c-b)+0=c$;(6)-1;(7)11 因为 $|m|=3$,$a+b=0$,$cd=1$,所以原式 $=|m|^2+2cd-\dfrac{a+b}{3m}$ $=3^2+2\times1-\dfrac{0}{3m}=11$;(8)右,——;(9)5;(10)0.0760;(11)-6.48×10^6;(12)50。

3. (1) $\sqrt{5}-\sqrt{3}<\sqrt{2}<\sqrt{5}<\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$(2)\ -\sqrt{10}<-\pi<-3.14<(-\pi)^0$$

4. (1)$-\dfrac{1}{3}$;　(2)2;　(3)11;　(4)-1;

(5)49;　(6)0;　(7)-1;　(8)-2

5. 设这个实数为 $a(a\neq0)$,则它的倒数为 $\dfrac{1}{a}$,它们和的倒数是 $\dfrac{1}{a+\frac{1}{a}}$;它们的倒数的和是 $a+\dfrac{1}{a}$ 由 $\dfrac{1}{a+\frac{1}{a}}\cdot(\dfrac{1}{a}+a)=1$ 即知它们和的倒数与它们倒数的和也互为倒数

§1.2　整式

一、内容概要

代数式、多项式的有关概念及整式的加、减、乘、除和幂的运算。

1. 知识要点

去括号法则,合并同类项法则,乘法公式,幂的运算公式,要求能够准确地进行整式的运算。

2. 整式的加减法

实质:即为合并同类项。

运算时,遇到括号,一般要先去括号,去括号的法则,括号前为"+"号,把括号去掉,括号里各项的符号不变,若为"-"

号，去掉"－"号及括号后，括号里各项符号相应变号；判断同类项时要看其所含字母及字母的指数是否相同，合并同类项要把同类项的系数相加，所得的结果为系数，字母及指数不变。

3. 整式的乘除法

单项式与单项式相乘，把系数、同底数幂分别相乘，作为积的因式；只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为一个因式。

单项式与多项式相乘，用单项式乘多项式的每一项，然后把所得的积相加。

多项式与多项式相乘，用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，然后把所得的积相加。

单项式除以单项式，把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，连同它的指数作为商的一个因式。

多项式除以单项式，用多项式的每一项除以这个单项式，然后把所得的商相加。

多项式除以多项式，将被除式与除式都按某一字母的降幂排列，然后用竖式运算。其关系为：被除式＝商式×除式＋余式。

4. 基本公式

(1)幂的运算：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$　$a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$　$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$（$m$，$n$ 都是整数）

(2)乘法公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \pm b^3$