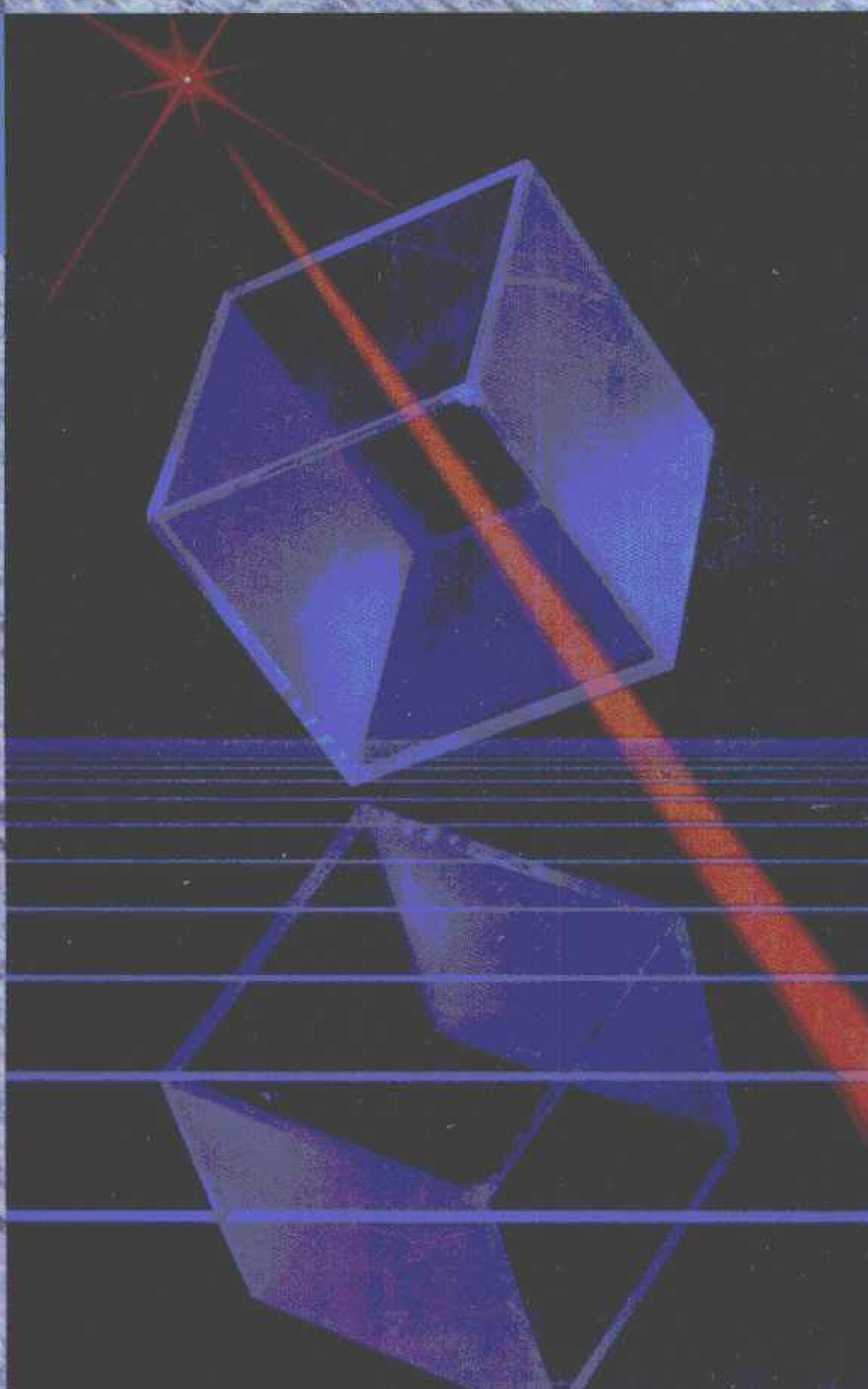
工程结构可靠性原理

李清富 高健磊 乐金朝 李宗坤 编著



黄河水利出版社

工程结构可靠性原理

李清富　高健磊　乐金朝　李宗坤　编著

黄 河 水 利 出 版 社

内 容 提 要

本书系统地介绍了工程结构可靠性的理论基础、基本原理、分析方法及其工程应用.主要内容包括:影响结构可靠性的不确定性;结构可靠性数学基础;结构可靠性基本原理;结构可靠性分析方法;结构体系可靠度;荷载和抗力的统计分析以及结构可靠性理论在设计规范中的应用与研究进展等.

本书按教材形式编写,并配有大量的例题,可作为高等院校工业与民用建筑、结构工程、水利工程、港口工程、公路与桥梁工程专业本科生和研究生的教学参考书,也可供有关专业科研人员、技术人员和管理人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程结构可靠性原理/李清富等编著.—郑州:黄河水利出版社,1999.5

ISBN 7-80621-224-8

Ⅰ.工… Ⅱ.李… Ⅲ.工程结构-结构可靠性 Ⅳ.TU311.2

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第14007号

责任编辑:杜亚娟　　封面设计:谢　萍

责任校对:周　宏　　责任印制:常红昕

出版发行:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市顺河路黄委会综合楼12层　邮编:450003

E-mail:yrcp@public2.zz.ha.cn

印　刷:黄河水利委员会印刷厂

开　本:787mm×1092mm　1/16　　印　张:11.75

版　别:1999年5月　第1版　　印　数:1—1100

印　次:1999年5月　郑州第1次印刷　　字　数:270千字

定价:23.50元

前　言

结构可靠性理论是随着人们对工程中各种不确定性认识的发展建立并逐步完善起来的一门新兴学科，它对结构的分析与设计具有重要的指导意义.

近十几年来，结构的可靠性理论及其应用得到了迅速的发展，“可靠性设计”的概念已普遍为人们所接受.世界各国都相继制定了以可靠性理论为基础的结构设计标准或规范，我国的《工程结构可靠度设计统一标准》以及建筑结构、港口工程结构、水利水电工程结构、铁路工程结构的可靠度设计统一标准也编制完成，与之相应的结构设计规范有的已开始颁布实施，有的正在加紧修订.这些工作对各设计规范的统一协调、国际间技术合作与交流以及结构可靠性理论的发展起到了积极的推动作用.

我们从1987年开始涉足结构可靠性理论研究领域，先后参加或主持完成了国家自然科学基金项目“水工钢筋混凝土结构可靠度分析”，河南省自然科学基金项目“工程结构耐久性可靠度研究”、“水资源工程可靠性研究”以及为配合港口工程结构设计统一标准编制而进行的“港工钢筋混凝土结构可靠度研究”、“港口工程结构使用性能研究”等研究课题.本书即是我们近几年来在结构可靠性理论方面的学习体会和部分研究成果的总结.

全书共分7章，系统地介绍了结构可靠性理论的基本概念、分析方法、工程应用以及与之有关的一些知识.其中，郑州工业大学的李剑同志、刘晨辉同志和李冰同志参加了本书第二、七章及附录的编写.本书由浅入深、系统性强，且通俗易懂，可作为高等院校教学参考书，也可供有关专业的科研人员、技术人员及管理人员参考.

在我们长期从事结构可靠性理论研究和本书的编写过程中，始终得到了中国工程院院士、大连理工大学赵国藩教授，郑州工业大学丁自强教授，中国建筑科学研究院李云贵研究员，交通部水运规划设计研究院杨松泉高级工程师等的指导和帮助.在本书付梓之际，我们谨表示衷心的感谢.

由于水平所限，书中难免会有不妥甚至错误之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

1999年2月于郑州工业大学

第一章　绪　论

由钢、木、砖石、混凝土及钢筋混凝土等建筑材料建造的工业与民用建筑的承重结构，公路和铁路的桥梁、涵洞，水利工程的堤坝、水闸，港口工程的码头，海洋采油平台，给水排水构筑物的水池、管道等，统称为工程结构．它们在长期的使用过程中，需要安全地承受各种荷载和环境的作用．但是，由于结构材料性能和荷载本身所固有的不确定性，以及结构在规划、设计、施工和使用过程中不可避免地存在各种误差，因此，严格地讲，结构的安全可靠只具有统计或概率意义．结构设计的目标，就是要在可接受的概率水平上，保证结构在规定的设计使用期限内能够满足预定的功能要求．在实际工程设计中，这一目标的实现通常是靠结构设计规范来给予保证的．

结构设计规范要求所设计的结构在设计基准期内，力求在经济合理的前提下满足下列各项功能要求：①能承受在施工和使用期内可能出现的各种作用；②在正常使用时具有良好的工作性能；③具有足够的耐久性；④在偶然事件发生时及发生后，能保持必要的整体稳定性．

上述要求中的第①、④项，涉及到人身财产安全，属于结构的安全性；第②项关系到结构的适用性；第③项关系到结构的耐久性．结构的安全性、适用性和耐久性三者总称为结构的可靠性．结构的可靠性一般用可靠度来度量，安全性则用安全度来度量．可靠度比安全度的含义更为广泛，但是安全度是可靠度中最重要的内容，它不仅涉及到结构的安全与否，同时也与结构使用的经济效益相联系，是本书讨论的重点内容．

1.1　影响结构可靠性的不确定性及其分类

在结构工程中存在着大量的不确定性因素和信息，它们直接影响着结构的可靠性，是结构可靠性研究的基础．从目前情况看，结构工程中的不确定性大致可分为以下几个方面：

1.1.1　随机性

所谓随机性，是由于事件发生的条件不充分，使得在条件与事件之间不能出现必然的因果关系，从而导致在事件的出现上表现出不确定性，这种不确定性称为随机性．例如，我们逐年观测同一地区同一月份的平均气温．这平均气温与许多因素有关，如风向、风力及空气湿度等，这些因素是逐年变化的，因此平均气温也就逐年不一样．造成平均温度不同的因素虽然还可以断定，但产生这些因素的根源却往往是不可能确定的(条件不充分)，以致我们并不能确切地预报温度数值(平均温度的大小是随机的)．又例如，混凝土试块的强度试验，事先不能决定该试块出现什么强度数值，是随机的，但一经试验，这次试验的强度值就明确而不含糊，等等．研究这种随机性的数学方法主要有概率论、随机过程和数理统

计.

1.1.2 模糊性

所谓模糊性,是由于概念本身没有明确的外延,即概念的定义和语言意义不明确,一个对象是否属于某一概念是难以判定的,这种由于概念边界划分标准的模糊不清而产生的不确定性称为模糊性.例如,"高与矮"、"冷与热"、"好与坏"等都难以客观明确地划定界限.又如工程结构中的"耐久与不耐久"、"适用与不适用""破损严重与不严重"等等.研究这种模糊性的数学方法主要是1965年美国自动控制学专家查德(L. A. Zadeh)教授创立的模糊数学.

1.1.3 灰色性

灰色性,又称事物知识的不完备性.它是由于人类认识上的局限性而造成的.例如人体,他的某些外形参数:身高、体重、…,以及某些内部参数:血压、脉搏、…是已知的,但有更多的信息是未知的.又如地震,准确判断何时何地发生地震,在现时科学技术条件下是做不到的,但是,地震发生后的震级或烈度,人们还是可以评定的,等等.在结构工程中,知识的不完善性包括两个方面:一是客观信息的不完善性,是由于客观条件限制而造成的统计资料、信息不充足,从而导致判断结论的不确定性;另一方面是人类主观知识的不完备性,如由于科学技术水平的限制,人们还没有认识到某些对结构可靠性有重要影响的因素,或者对某些因素之间的相互作用机理不能完全掌握等.研究和处理这种不确定性的数学方法主要有灰色系统理论和一些经验方法,如经验参数法、主观概率法等.

按结构工程中不确定性产生的原因不同,还可把不确定性分为:①自然因素的不确定性,如风荷载、雪荷载、波浪力、温度、湿度等;②技术因素的不确定性,如结构材料性能、构件几何尺寸、钢筋位置等;③社会因素的不确定性,如政策的变化、经济发展以及科学技术发展等引起的荷载变化等.

按不确定性与时间的关系不同,还可把不确定性分为:①静态不确定性;②动态不确定性.静态不确定性一般与时间因素关系不大,如结构的自重、固定设备重量等.动态不确定性则与时间过程和荷载及结构的动力特性有关,如风荷载、车辆荷载、地震作用等.

以上关于不确定性的分类方法可视所研究对象的不同灵活采用.在结构可靠性理论中,一般以第一种分类方法为主,其中又以随机性为研究重点.

1.2 结构设计方法的演变

工程结构设计方法,从可靠度来说,基本上可以分为经验安全系数设计法和概率设计方法两类.经验安全系数设计法,是将影响结构安全的各种参数,按经验取值,一般用平均值或者规范规定的标准值,并考虑这些参数可能的变异对结构安全性的影响,在强度计算中再取用安全系数 K.概率设计法,则是将影响结构安全的各种参数作为随机变量,用概率论和数理统计学来分析全部参数或部分参数,或者用可靠性理论,分析结构在使用期内满足预定功能的概率.当前,结构设计正由经验设计法转变为概率设计法.在过渡阶段,人

们对设计方法又分为水准Ⅰ、水准Ⅱ和水准Ⅲ三种.水准Ⅰ法,即"半经验半概率法",也就是对影响结构可靠度的某些参数进行数理统计分析,并与经验结合,引入某些经验系数.该法对结构可靠度还不能作出定量的估计.水准Ⅱ法,即"一次二阶矩法",或称"近似概率法",它采用概率论的方法对结构可靠度进行相对近似的估计,是目前结构可靠度实际计算中应用最多的方法.水准Ⅲ法,亦称"全概率法",是完全基于概率论的结构可靠度精确分析法,其设计准则可以是破坏概率直接的表达,而不一定要借助于安全系数或可靠指标.由于引用这种方法进行可靠度分析,会使问题变得非常复杂,因此目前很少直接采用.由此可以看出,结构设计方法实际上是随着人们对工程中各种参数的不确定性认识的提高而不断发展和完善的.下面,就以这几个水准为脉络,简单回顾一下我国在钢筋混凝土结构设计方法上的发展和演变过程.

1.2.1 容许应力设计法

早期的工程结构设计一般采用容许应力法.该法是将材料作为弹性体,用材料力学或弹性力学方法,计算结构或构件在标准荷载(使用荷载)作用下的应力,要求任一点的计算应力 σ 不超过材料的容许应力$[\sigma]$,即

$$\sigma \leqslant [\sigma] \tag{1-1}$$

材料的容许应力,是由材料的极限强度(如混凝土)或者流限(如钢材)R,除以安全系数 K 而得.即

$$[\sigma] = R/K \tag{1-2}$$

上述容许应力设计法,在规定材料容许应力时,所采用的安全系数 K 是一个经验系数,其值在各个历史时期不同.而且,在不同的规范中也不相同.同时,材料强度和使用荷载的选定也是经验的.

1.2.2 破坏阶段设计法

破坏阶段设计法与容许应力设计法的区别,主要在于它考虑了材料的塑性性质,以计算截面或构件甚至整个结构的承载能力.以单筋矩形截面受弯构件正截面强度计算为例,截面设计要求:作用在截面上的弯矩 M 乘以安全系数 K 后,不大于该截面的抵抗弯矩 M_P,即

$$KM \leqslant M_P \tag{1-3}$$

式中,K 值仍然与容许应力法的 K 一样,是按经验取值的.

1.2.3 多系数极限状态设计法

容许应力法和破坏阶段法采用的单一安全系数 K,是一个笼统的粗略的经验系数,对影响结构安全的许多因素不能区别对待,因而可能导致结构在某些情况下过分安全,而在另一些情况下却反而不够安全.为了克服单一安全系数设计方法的这些缺点,50 年代,前苏联设计规范首先采用了多系数的极限状态设计法.我国 1966 年的《钢筋混凝土结构设计规范(BJG21-66)》也采用了这种设计方法.该法的特点是:[1]

(1)明确规定了结构的三种极限状态:①承载能力极限状态;②变形极限状态;③裂缝

宽度极限状态.

(2)在承载能力极限状态设计中,对材料强度引入各自的材料强度系数及材料工作条件系数,对不同荷载引入各自的荷载系数,对构件还引入工作条件系数.

(3)材料强度系数及某些荷载系数,是将材料强度与荷载作为随机变量,用数理统计学的方法,经调查分析而确定的.

以单筋矩形截面受弯构件正截面强度计算为例,截面的计算应力图形如图 1-1 所示.

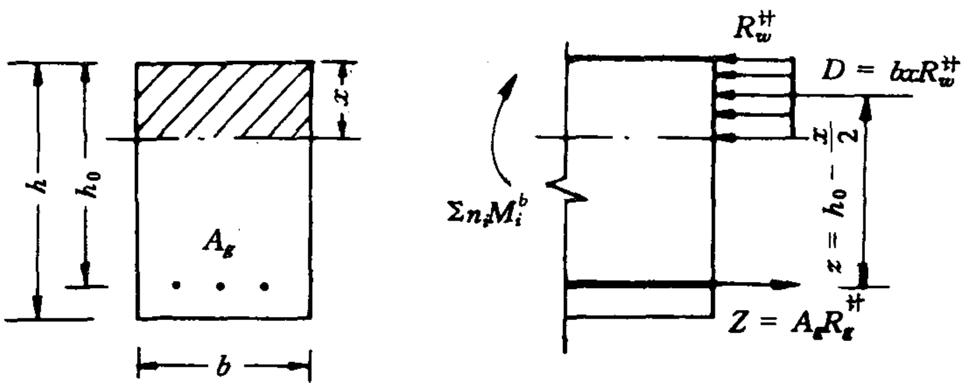


图 1-1

设计表达式为

$$\Sigma n_i M_i^b \leqslant m A_g R_g^{计}(h_0 - \frac{x}{2}) \tag{1-4}$$

$$x = \frac{A_g R_g^{计}}{b R_w^{计}} \tag{1-5}$$

$$R_g^{计} = m_g K_g R_g^b; R_w^{计} = m_h K_h R_w^b \tag{1-6}$$

式中:$\Sigma n_i M_i^b = M^{计}$ 为截面的计算弯矩;M_i^b 为标准荷载作用下的标准弯矩;n_i 为荷载系数;$R_g^{计}$ 为钢筋计算强度;K_g 为钢筋材料强度系数;R_g^b 为钢筋的标准强度;m_g 为钢筋工作条件系数;A_g 为钢筋截面积;m 为构件的工作条件系数;$R_w^{计}$ 为混凝土的弯曲抗压计算强度;m_h 为混凝土工作条件系数;R_w^b 为混凝土弯曲抗压标准强度;K_h 为混凝土弯曲抗压强度的材料强度系数.其中,K_g,K_h 是经数理统计分析而得到的.如在 BJG21-66 中,规定 $R_{g\min} = \overline{R}_g - 3\sigma_g$(图 1-2).此处,$\overline{R}_g$ 为钢材流限的平均值,σ_g 为钢材流限的标准差,是由大量数据统计而得的.则 $K_g = R_{g\min}/R_g^b$,称为钢筋的材料强度系数.同样地,$K_h = R_{h\min}/R_h^b$,$R_{h\min} = \overline{R}_h - 3\sigma_h$.

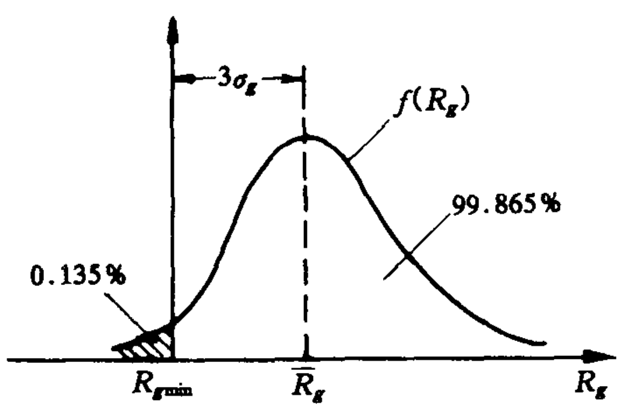


图 1-2

1.2.4 单系数极限状态设计法

我国的多系数极限状态设计法(规范

BJG21-66)中采用的材料计算强度是以 $R_{\min}=\overline{R}-3\sigma$ 为依据的，这一数值的确定具有一定的主观性．根据现有的混凝土和钢材的强度统计资料，都还未遇到过这么低的数值．另外，从概率论可知，当 $R_{\min}=\overline{R}-3\sigma$ 时，R 取何种概率分布对 $R_{\min}$的计算值影响颇大．因此，我国 1974 年的钢筋混凝土结构设计规范（TJ10-74)，选取钢筋及混凝土设计强度的保证率为 97.73%，如钢筋的 $R_g^{设}=\overline{R}_g-2\sigma_g$，混凝土的 $R_h^{设}=\overline{R}_h-2\sigma_h$．同时，荷载规范也作了修订，对荷载的标准值作了一些调整，并且一律综合取荷载系数 $K_1=1.2$．

此外，考虑到其他对构件安全度有影响的因素，在设计表达式中增加了一个“构件强度系数 K_2”和“附加安全系数 K_3”，K_2、K_3 暂由经验确定．

仍以矩形截面受弯构件为例，式(1-4)可转化为

$$K_1\Sigma M_i^b\leqslant\frac{1}{K_2K_3}A_gR_g^{设}(h_0-\frac{x}{2})\tag{1-7}$$

$$x=\frac{A_gR_g^{设}}{bR_w^{设}}\tag{1-8}$$

将式(1-7)进行变换，得

$$K_1K_2K_3\Sigma M_i^b\leqslant A_gR_g^{设}(h_0-\frac{x}{2})$$

或

$$K_jK_3\Sigma M_i^b\leqslant A_gR_g^{设}(h_0-\frac{x}{2})\tag{1-9}$$

式中：$K_j=K_1\cdot K_2$ 称为基本安全系数．这样，在 $K_3=1$ 的大多数情况下，式(1-9)就表达为(以 K 表示K_j，R_g 表示$R_g^{设}$，$M=\Sigma M_i^b$)

$$KM\leqslant A_gR_g(h_0-\frac{x}{2})\tag{1-10}$$

式中：K 为基本安全系数．

从上面可以看出，容许应力设计法和破坏阶段法属于经验安全系数法，多系数或单系数极限状态法属于水准Ⅰ法．不论是经验安全系数法，还是水准Ⅰ法，在安全系数的取值上都是经验的．因此，本质上都属于定值安全系数设计的范畴．长期的实践证明，这种定值安全系数法设计结构不够科学，原因是：①定值安全系数取值粗糙，与日益精确的力学分析方法不相匹配，从而使结构设计结果也变得非常粗糙．②安全系数 K 的大小，并不反映结构安全度的高低．比如，在 TJ10-74 规范中，钢筋混凝土轴心受压构件与受剪构件的设计安全系数都规定为 $K=1.55$，但并不意味着两者具有相同的可靠度；轴心受拉构件的设计安全系数 $K=1.55$，受扭构件的设计安全系数 $K=1.65$，并不能说明后者的安全度比前者高，相反，分析计算表明，前者的可靠度反而高于后者．③加大结构的安全系数，不一定能按比例地增加结构的安全度．对于那些存在着不同符号应力叠加情况的结构，这问题更为突出．

为了克服定值安全系数法的不足，人们提出了基于可靠度理论的概率极限状态设计法．这种方法将影响结构安全性的几乎所有因素都作为随机变量，依据结构可靠性理论的分析方法，计算结构的可靠指标或可靠度，以此设计或校核结构．关于这一部分内容，将在以后章节中详细讨论．

1.3 结构可靠性研究历史简介

结构可靠性理论的形成始于人们对结构工程中各种不确定性的认识.早在 1911 年,匈牙利布达佩斯的卡钦奇(Качинчи)提出用统计数学研究荷载及材料强度.1928 年苏联哈奇诺夫(Н. А. Хациалов)、1935 年斯特列里茨基(Н. С. Стрелецкий)等人相继发表了这方面的文章.1946 年,美国的弗罗伊詹特(A. M. Freudenthal)发表了题为《结构的安全度》的研究论文,开始较为集中地讨论结构安全度问题.1947 年,苏联的尔然尼钦(А. Р. Ржаницин)提出了一次二阶矩理论的基本概念和计算结构失效概率的方法,给出与失效概率 P_f 相对应的安全指标 β 的计算公式.美国的康乃尔(C. A. Cornell)在尔然尼钦工作的基础上,于 1969 年提出了与结构失效概率相联系的可靠指标 β 作为衡量结构安全度的一种统一数量指标,并建立了结构的二阶矩模式.1971 年加拿大的林德(N. C. Lind)提出了分项系数的概念,将可靠指标 β 表达成设计人员习惯采用的分项系数形式.这些工作都加速了结构可靠度方法的实用化.美国伊利诺斯大学洪华生(A. H-S. Ang)在结构可靠度研究方面有较大贡献.他对各种结构不定性作了分析,提出了广义可靠性概率法.1974 年,他与康乃尔联合撰写了《结构安全和设计的可靠性基础》一文,对结构可靠度设计作了详尽的系统论述.欧洲混凝土委员会(CEB)和国际预应力混凝土协会(FIP),在安全度研究方面,近年来也作了大量工作.1971 年,由 CEB 倡议,CEB、CECM(欧洲钢结构协会),CIB(国际房屋建筑协会)、FIP、IABSE(国际桥梁与结构工程协会)、RILEM(国际材料与结构研究所联合会)赞助,成立了结构安全度联合委员会(JCSS).着手编制《结构统一标准规范的国际体系》.1976 年,JCSS 推荐了拉克维茨(Rackwitz)和菲斯莱(Fiessler)等人提出的通过"当量正态化"方法以考虑随机变量实际分布的二阶矩模式.至此,结构可靠性理论开始进入实用阶段.

在国际会议方面,"国际结构安全性与可靠性会议"(ICOSSAR)第一届于 1969 年在美国华盛顿(Washington)举行,第二届于 1977 年在德国慕尼黑(Munich),此后每四年举行一次,到目前已进行了七届."国际土木工程中统计学与概率论的应用学术会议"(ICASP)第一届于 1971 年在香港举行,每四年一次,现已举办了七届.在这些会议论文集以及国际刊物《结构安全性》(Structural Safety)中,集中报道了各国在工程结构可靠性方面的重要研究成果.

在我国,结构可靠性研究工作起步较晚,始于 50 年代初.1954 年,大连理工大学赵国藩提出用数理统计学中的误差传递公式,计算各种荷载组合的总超载系数 n_s 及构件总匀质系数 K_R,以代替各分项系数;1960 年,他提出用数理统计法计算的安全系数与经验系数相结合,设计钢筋混凝土结构构件.60 年代,土木工程界广泛开展了结构安全度问题的讨论.对影响安全度的诸因素进行了较为详细的分析.70 年代,我国的部分规范采用了半经验半概率的极限状态设计法,但在安全度的表达形式上以及材料强度的取值原则上,各设计规范没有统一起来.为此,原国家建委于 1978 年成立了《建筑结构设计统一标准》编委会和专题研究组,组织有关单位开展了研究工作.1983 年提出的《建筑结构设计统一标准》(草案)就完全采用了国际上推行的概率极限状态设计法(水准Ⅱ).目前,我国工程结

构设计规范的编制与修订正在按下述层次进行:第一层次为《工程结构可靠度设计统一标准》;第二层次为按照第一层次统一标准的指导原则编制的专业部门的国家标准,如《港口工程结构可靠度设计统一标准》、《水利水电工程结构可靠度设计统一标准》等;第三层次为按照第二层次标准修订补充而成的具体行业标准,如《砌体结构设计规范》、《钢结构设计规范》等.

在学术会议方面,我国土木工程学会桥梁和结构工程学会结构可靠度委员会,从1987年起每隔二三年举行一次全国性学术会议,现已举办了四届.会议收录的论文全面地反映了我国在结构可靠性研究领域的成果.

可以预料,结构可靠性理论作为一门新兴学科,随着科学技术的不断发展,必将不断完善并拓宽自己的应用领域,使结构设计与分析方法进入一个新的阶段.

第二章　结构可靠性数学基础

正如第一章中所讲，结构可靠性分析是基于事物具有不确定性这样一个基本观点的，因此，与不确定性处理有关的概率论、数理统计、随机过程和模糊数学等就构成了结构可靠性理论的数学基础. 限于篇幅，本章不可能对上述理论进行详尽的论述，只着重论述与结构可靠性有关的重要概念.

2.1　概率论的基本概念

2.1.1　样本空间

一般地说，设 E 为一试验，若该试验具有以下特征：①可以在相同条件下重复进行；②每次试验的可能结果不止一种；③试验前，不能预知哪一个结果会出现. 则称 E 为随机试验，简称试验. 随机试验的每一个可能结果称为随机事件，简称事件. 在随机事件中不可能再分的事件称为基本事件，由基本事件复合而成的事件称为复合事件. 在随机试验 E 中，必然出现的结果称为必然事件，不可能出现的结果称为不可能事件. 对于随机试验 E，以其所有基本事件作为元素所组成的集合，称为 E 的样本空间. 样本空间中的每个基本事件称为样本点. 若样本空间有无限多个样本点，则样本空间就叫做连续样本空间；若样本空间中样本点是离散的和可数的，则样本空间就叫做离散样本空间，其中，有有限多个样本点的样本空间叫有限样本空间，有可数无限多个样本点的样本空间叫无限样本空间.

从上面定义可以看出，一般的事件相当于样本空间的一个子集合. 若事件不包含样本点，则为不可能事件. 而必然事件就等于样本空间本身.

例如，图 2-1 所示简支梁. 设 P 的可能值是 3、4、5、6kN，于是荷载的样本空间是 $\Omega_P = \{3,4,5,6\}$，支座反力 R_A 的样本空间是 $\Omega_A = \left\{\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{5}{2},\frac{6}{2}\right\}$，子集 $\left\{\frac{4}{2},\frac{5}{2}\right\}$ 表示 R_A 等于 $\frac{4}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$ 这个事件.

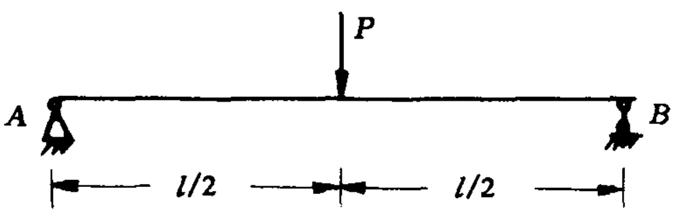


图　2-1

2.1.2　概率的定义和性质

设 E 为一随机试验，Ω 是它的样本空间，设 F 是由样本空间 Ω 的一些子集构成的集合族，如果满足下列条件：

(1) $\Omega \in F$；

(2) 若 $A \in F$，则对立事件 $\overline{A} \in F$；

(3) 若 $A_i \in F,(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.
则称 F 为事件域.

定义在事件域上的一个实值函数 P,若它满足下列三个条件:

(1) 对每一个 $A \in F$,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) 对必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$,对不可能事件 Φ,有 $P(\Phi)=0$;

(3) 若 $A_i \in F,(i=1,2,\cdots)$,且两两互不相容,则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
则实值函数 P 为 (Ω,F) 上的概率,$P(A)$ 称为事件 A 的概率.

由概率的定义可以推得概率的一些性质:

性质 1　设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件,则

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{2-1}$$

性质 2　设 A、B 为两事件,若 $A \subset B$,则

$$P(A) \leqslant P(B) \tag{2-2}$$

性质 3　设 A、B 为两事件,则

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{2-3}$$

推广:对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{\substack{i,j\\ i<j}} P(A_iA_j)+\sum_{\substack{i,j,k\\ i<j<k}} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{2-4}$$

性质 4　(连续性定理)设 $A_n \in F,A_n \supset A_{n+1},n=1,2,\cdots$,令 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$,则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{2-5}$$

若 $A_n \subset A_{n+1},n=1,2,\cdots$,令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{2-6}$$

2.1.3 条件概率

在许多实际应用中,事件 B 发生的概率往往有条件地依赖于事件 A 的发生,这种概率叫做条件概率,用 $P(B \mid A)$ 表示,在一般情况下,$P(B)$ 与 $P(B \mid A)$ 是不相同的.

设 A、B 为随机试验 E 的两个事件,且 $P(A)>0$,则定义

$$P(B \mid A)=P(AB) \mid P(A) \tag{2-7}$$

式中:$P(AB)$ 表示事件 A 和事件 B 同时发生的概率.若

$$P(B \mid A)=P(B) \text{ 或 } \quad P(A \mid B)=P(A) \tag{2-8}$$

则称 A、B 相互独立.由式(2-7)和式(2-8)可知,若 A、B 相互独立,则

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \tag{2-9}$$

由式(2-7)可知,当 $P(A) \neq 0$ 时,得

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B \mid A) \tag{2-10}$$

这就是两事件的概率的乘法公式.推广到一般情况,就可以得到关于条件概率的三个重要

公式.

乘法公式 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 满足 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1A_2)\cdot \cdots \cdot P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{2-11}$$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \tag{2-12}$$

全概率公式 设 $H_1, H_2\cdots$ 为有穷或可列多个互不相容的事件,$P(\bigcup_n H_n) = 1$, $P(H_n) > 0, n = 1,2,\cdots$,则对任一事件 A,有

$$P(A) = \sum_n P(H_n)\cdot P(A \mid H_n) \tag{2-13}$$

逆概率公式 设 $H_1, H_2, \cdots$ 为有穷或可列多个互不相容事件,$P(\bigcup_n H_n) = 1, P(H_n) > 0, n = 1,2,\cdots$,对任一事件 A,$P(A) > 0$,则有

$$P(H_m \mid A) = \frac{P(A \mid H_m)\cdot P(H_m)}{\sum_n P(A \mid H_n)P(H_n)} \tag{2-14}$$

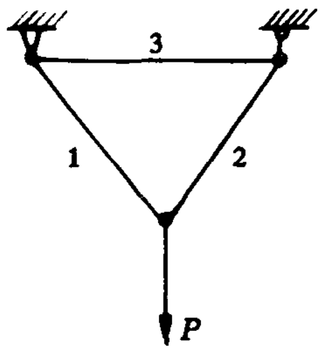


图 2-2

例 2.1 如图 2-2 所示的三个杆件的静定结构体系.设构件 i 失效事件用 F_i 表示,构件 i 失效的概率为 $P(F_i)$.假定各构件的失效是统计独立的,且 $P(F_1) = P(F_2) = 0.03, P(F_3) = 0.01$.求该结构的失效概率 P_F.

解: 由图 2-2 给出的结构体系知,任一构件的失效将引起这个静定结构体系的失效.因此有:

$$\begin{aligned} P_F &= P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) \\ &= 1 - P(\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap \overline{F}_3) \\ &= 1 - P(\overline{F}_1)P(\overline{F}_2)P(\overline{F}_3) \\ &= 1 - [1 - P(F_1)][1 - P(F_2)][1 - P(F_3)] \\ &= 1 - 0.97 \times 0.97 \times 0.99 = 0.068\,5 \end{aligned}$$

例 2.2 仍考虑图 2-2 所示结构,假定只有构件 1 和构件 2 可能破坏,求结构的失效概率 P_F.

解: 依题意知

$$\begin{aligned} P_F &= P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \\ &= P(F_1) + P(F_2) - P(F_2 \mid F_1)\cdot P(F_1) \end{aligned}$$

若 F_1 和 F_2 统计独立,则

$$P_F = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1)P(F_2) = 0.03 + 0.03 - 0.03 \times 0.03 = 0.059\,1$$

若 F_1 和 F_2 不是独立的,就需要知道 $P(F_2 \mid F_1)$.如果这两个构件是由同一厂商用相同的材料和方式加工制造出来的,在图 2-2 所示的特殊情况下,可以期望 $P(F_2 \mid F_1)$ 接近于 1,因此有

$$P_F = P(F_1) + P(F_2) - P(F_2 \mid F_1)P(F_1) = 0.03 + 0.03 - 1 \times 0.03 = 0.03$$

例 2.3 设有一批型号相同的钢筋,其中一厂产品占 0.25,二厂产品占 0.50,三厂产品占 0.25;又,各厂产品废品率依次为 5%、4%、2%,现任取一根钢筋,问这根钢筋是废品的概率为多少?

解: 设 A 表示“钢筋为废品”这一事件,$E_i(i = 1,2,3)$ 表示“钢筋为 i 厂产品”这一事件.依题意有:$P(E_1) = 0.25, P(E_2) = 0.50, P(E_3) = 0.25$.又,$P(A \mid E_1) = 0.05$, $P(A \mid E_2) = 0.04, P(A \mid E_3) = 0.02$,由全概率公式(2-13)得

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(E_i) \cdot P(A \mid E_i) \\ &= 0.25 \times 0.05 + 0.50 \times 0.04 + 0.25 \times 0.02 = 0.037\,5 \end{aligned}$$

例 2.4 条件同上例,问随意抽到一根钢筋恰好是废品,它是各厂产品的概率为多少?

解: 由逆概率公式(2-14)得

$$P(E_1 \mid A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A \mid E_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E_i) \cdot P(A \mid E_i)} = \frac{0.25 \times 0.05}{0.037\,5} = 0.333\,3$$

$$P(E_2 \mid A) = \frac{P(E_2) \cdot P(A \mid E_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(E_i) \cdot P(A \mid E_i)} = \frac{0.50 \times 0.04}{0.037\,5} = 0.533\,3$$

$$P(E_3 \mid A) = \frac{P(E_3) \cdot P(A \mid E_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(E_i) \cdot P(A \mid E_i)} = \frac{0.25 \times 0.02}{0.037\,5} = 0.133\,3$$

2.1.4 随机变量

设 E 为一随机试验,Ω 为它的样本空间,对于每一个 $\omega \in \Omega$,有在 Ω 上的一个实单值函数 $X(\omega)$ 与之对应,若对于任一实数 x,$\{\omega: X(\omega) < x\}$ 是事件域上的随机事件.即 $\{\omega: X(\omega) < x\}$ 属于事件域,则称 $X(\omega)$ 为随机变量,其中,$\{\omega: X(\omega) < x\}$ 表示满足 $X(\omega) < x$ 的 ω 的全体.

从随机变量定义可以看出,随机变量总是联系着一个概率空间,为了书写方便,我们常将概率空间的记号省略不写,并且将随机变量 $X(\omega)$ 写成 X,把 $\{\omega: X(\omega) < x\}$ 记作 $\{X < x\}$ 等等.

随机变量是建立在随机事件基础上的一个概念,既然随机事件发生的可能性对应于一定的概率,那么随机变量也因一定的概率取各种可能值,因此,随机变量至少有两种不同的类型:一种是试验结果 X 可能取值为有限个或可列个,如废品数、电话呼叫次数等;另一种是试验结果 X 不止可列个值,如量测误差、混凝土强度等.按上述取值情况,可把随机变量分为两大类:一类是离散型随机变量,另一类是非离散型随机变量.而非离散型随机变量范围很大,情况比较复杂,其中应用最多的是连续型随机变量,在结构可靠性理论中,只讨论以下两种:一是离散型随机变量,其取值为有限个或可列无限多个;二是连续型随机变量,其取值为某一区间或在整个数轴上取值.

2.2 概率分布函数与概率密度函数

2.2.1 随机变量的概率分布函数

设 X 为一随机变量,对任意实数 x,令 $F(x) = P\{X \leqslant x\}$,称 $F(x)$ 为 X 的分布函数,分布函数有如下性质:

(1)$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(2)$F(x)$ 是 x 的不减函数;

(3)$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(4)$F(x+0) = F(x)$,即 $F(x)$ 是右连续的.

2.2.1.1 离散型随机变量的概率分布

设离散型随机变量 X 的一切可能取值为$\{x_i\}(i = 1,2,\cdots)$,其中,$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$,X 取值为x_i 的概率为

$$P\{X = x_i\} = p_i \quad (i = 1,2,\cdots) \tag{2-15}$$

则称式(2-15)为离散型随机变量 X 的概率分布.显然:

$$p_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots), \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

此分布可以用表格描述(见表 2-1),也可用矩阵表示(如式(2-16)),还可以用概率函数图像表示等.

表 2-1

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
$P\{X=x_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix} \tag{2-16}$$

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} P\{X = x_i\} \tag{2-17}$$

它是右连续的阶梯函数.

2.2.1.2 连续型随机变量及其密度函数

在结构可靠性分析中,涉及到的许多随机变量不是离散型的而是连续型的,如结构材料的强度、截面尺寸、荷载等.连续型随机变量的分布是由它的分布密度 $f(x)$ 给出的.

若存在非负函数 $f(x)$,且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$,对任意实数 x ,有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{2-18}$$

则称 X 为连续型随机变量,$f(x)$ 称为 X 的分布密度或概率密度,$F(x)$ 为 X 的分布函数.

2.2.2 概率密度的性质

概率密度 $f(x)$ 具有以下性质：

(1) $f(x) \geqslant 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ (2-19)

(3) $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}$ (2-20)

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'(x) = f(x)$

2.3 随机变量的数字特征

随机变量的数字特征是指关于它的分布函数的某些值，这些值可以反映随机变量在某些方面的重要特征．在许多实际工程中，不需要知道分布函数，只要知道它的某些主要特性就足够了．因此，随机变量的数字特征具有理论和实际意义．

2.3.1 随机变量的数学期望与方差

2.3.1.1 离散型随机变量的数学期望与方差

设 X 为一离散型随机变量，分布律为 $P\{X = x_i\} = p_i, (i = 1,2,\cdots)$，如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称它为 X 的数学期望或均值，记作 $E(X)$，即

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \tag{2-21}$$

设 X 为一离散型随机变量，若 $\sum_{i=1}^{\infty}[x_i - E(X)]^2 \cdot p_i < \infty$，则称 $D(X)$：

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty}[x_i - E(X)]^2 p_i \tag{2-22}$$

为 X 的方差，记为 σ^2 或 $\mathrm{var}(X)$，其中 $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1,2,\cdots$.

由 $D(X)$ 的定义可推出计算方差的另一个重要公式：

$$\begin{aligned}
D(X) &= \sum_{i=1}^{\infty}[x_i - E(X)]^2 p_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\{x_i^2 p_i - 2E(X)\cdot x_i p_i + [E(X)]^2 p_i\} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - 2E(X)\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i + [E(X)]^2 \sum_{i=1}^{\infty} p_i \\
&= E(X^2) - 2E(X)\cdot E(X) + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}$$

例 2.5 求二项分布 $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0,1,2,\cdots,n$ 的数学期望与方差．