

徐友鹏 编

概率论与数理统计

概率论与数理统计

51.7/497

出版社

上海交通大学出版社

51.7
497
C.2

专科学校、业余大学及职工大学教学用书

概率论与数理统计

徐友鹏 编

810665/17

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书内容分十章：随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、二维随机变量、大数定律与中心极限定理简介、样本及其分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析。每章后面均附有一定数量的习题，书末有习题答案。

本书编写时力求深入浅出、条理清晰、突出重点、通俗易懂、联系实际，便于学生掌握和自学。

本书适用于专科学校、业余大学和职工大学的学生，可作为上述学校的教材，也可供工程技术人员及企业或经济管理人员参考之用。

概率论与数理统计

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1884弄19号)

新华书店上海发行所发行

常熟市印刷二厂印装

开本787×1092毫米 1/32 印张9.375 字数206000

1987年12月第1版 1988年2月第1次印刷

印数：1—18000

ISBN7—313—00071—5/TB1 科技书目：161—292

定价：2.25元

前 言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它发展迅速、应用广泛。目前，概率统计无论对工程技术人员，还是对企业或经济管理人员，都愈来愈成为他们必备的数学工具。很多专科学校、业余大学与职工大学都已把概率统计列为必修课程。然而，目前适合上述学校学生学习的概率统计教材还为数不多。

本书是在我校自编《概率论与数理统计》讲义的基础上，参照原机械工业部专科学校数学协作组1984年制订的《工程数学教学大纲》及上海市高等工业专科学校数学协作组1986年制订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》编写而成。

本书在编写过程中注意到了以下几个方面：

(1) 本书适用的对象是专科学校、业余大学与职工大学的学生，也可供工程技术人员及企业或经济管理人员参考之用；

(2) 本书教学时数约需50~60学时。少学时的专业可删去打星号的内容，必要时也可删去第四章(二维随机变量)，这对以后学习数理统计部分的内容影响不大。作为一种弥补，教材§2-5中对随机变量的独立性作了简要的介绍；

(3) 考虑到上述学校注重应用的特点，教材在内容的安排和概念的引入等方面都尽可能联系直观背景；

(4) 针对上述学校学生的特点，本书在照顾到必要的系统性的前提下，以基本概念和基本运算为主，不追求过深的数学

理论。文字通俗易懂，深入浅出，突出重点，便于自学，并注意联系实际。在例题、习题的配备上，注意到难易适中、份量适当。

本书由上海交通大学工业管理工程系主任黄洁纲教授主审。在编写过程中，得到了上海机械专科学校数学教研室同志的帮助，其中王绍智副教授审阅了全稿，并提出了宝贵意见。在此，向他们表示衷心的感谢。

编者

1986年12月

目 录

第一章 随机事件及其概率	(1)
§ 1-1 随机事件.....	(2)
§ 1-2 事件的频率与概率.....	(10)
§ 1-3 概率的古典定义 *几何概率	(14)
§ 1-4 概率的加法定理与乘法定理.....	(21)
§ 1-5 全概率公式和贝叶斯公式.....	(28)
§ 1-6 事件的独立性.....	(33)
§ 1-7 伯努利概型 二项概率公式.....	(38)
习题一.....	(42)
第二章 随机变量及其概率分布	(49)
§ 2-1 随机变量的概念.....	(49)
§ 2-2 离散型随机变量的概率分布.....	(52)
§ 2-3 连续型随机变量的概率分布.....	(60)
§ 2-4 分布函数与正态分布.....	(66)
§ 2-5 随机变量函数的分布与随机变量的 独立性简介	(79)
习题二.....	(84)
第三章 随机变量的数字特征	(90)
§ 3-1 随机变量的均值(数学期望).....	(96)

§ 3-2 随机变量的方差	(97)
§ 3-3 常用分布的均值和方差	(101)
习题三	(107)
第四章 二维随机变量	(110)
§ 4-1 二维随机变量的分布	(110)
§ 4-2 边缘分布与随机变量的独立性	(117)
§ 4-3 二维正态分布与两个随机变量的函数的分布	(123)
§ 4-4 二维随机变量的数字特征	(130)
习题四	(137)
第五章 大数定律与中心极限定理简介	(142)
§ 5-1 大数定律	(142)
§ 5-2 中心极限定理	(144)
习题五	(149)
第六章 样本及其分布	(150)
§ 6-1 基本概念	(150)
§ 6-2 抽样分布	(154)
习题六	(164)
第七章 参数估计	(166)
§ 7-1 点估计	(166)
§ 7-2 区间估计	(177)

习题七	(187)
第八章 假设检验	(190)
§ 8-1 假设检验的基本思想	(190)
§ 8-2 u 检验法和 t 检验法	(195)
§ 8-3 χ^2 检验法和 F 检验法	(204)
*§ 8-4 分布函数的假设检验	(212)
习题八	(219)
第九章 回归分析	(223)
§ 9-1 一元线性回归分析	(224)
*§ 9-2 一元非线性回归及多元线性回归简介	(235)
习题九	(240)
第十章 方差分析	(242)
§ 10-1 单因素方差分析	(242)
*§ 10-2 双因素方差分析	(254)
习题十	(259)
习题答案	(262)
附表 1 泊松分布表	(274)
附表 2 标准正态分布表	(276)
附表 3 χ^2 分布表	(279)
附表 4 t 分布表	(281)
附表 5 F 分布表	(283)
附表 6 相关系数检验表	(289)

第一章 随机事件及其概率

在生产实践、科学实验和日常生活中，我们会遇到各种各样的现象。有一类现象，在一定的条件下必然会发生(或必然不会发生)。例如：

- (1) 在标准大气压下，纯水加热到 100°C 必然沸腾；
- (2) 导体通电必然发热；
- (3) 从 100 个全是正品的产品中抽检一个产品，必然得正品。

这种在一定条件下必然会发生(或必然不会发生)的现象称为**确定性现象**。

还有一类现象，在一定的条件下可能发生也可能不发生。例如：

- (1) 抛一枚硬币，可能出现正面(国徽朝上)，也可能出现反面(币值朝上)；
- (2) 从一批含一定数量次品的产品中任意抽取 4 件检验，所得次品数可能是 0，也可能是 1, 2, 3 或 4；
- (3) 掷一粒骰子，出现的点数可能是 1, 2, 3, 4, 5, 6 中的某一个；
- (4) 某电话总机在某一段时间间隔内接到的呼唤次数可能是 0, 1, 2, 3, ... (一切非负整数) 中的一个；
- (5) 日光灯的使用寿命可能是任意的非负实数。

这种在一定条件下具有多种可能结果，究竟发生哪种结果事先无法确定的现象，称为**随机现象**。

人们经过长期实践并深入研究之后，发现随机现象虽然就每次试验或观测来说具有不确定性，但在大量重复试验或观测下，它的结果却呈现出某种规律性。例如：在相同的条件下，多次重复抛一枚硬币，出现正面或反面的次数大致相等；对同一批产品进行大量重复抽样检查，可以观测到该产品的次品率，等等。这种在大量重复试验或观测中所呈现的规律性，称为**统计规律性**。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学学科，是近代数学的重要组成部分。

概率统计起源于17世纪，并于19世纪末随着大工业生产和自然科学的发展而蓬勃发展起来。到了20世纪30年代，由于概率论公理系统的建立，使得概率统计的发展进入了新的阶段，理论上不断完善，应用上日益广泛和深入。目前，概率统计的应用，已几乎遍及所有科学技术领域和国民经济的各个部门之中。

§1-1 随 机 事 件

一、随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的。在概率论中，试验作为一种广泛的术语，它包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某个特征的观测也可以认为是一种试验。下面我们举例来加以说明。

例 1 抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况。

例 2 从一批含有一定数量的次品的产品中任意抽取4件，检查次品的个数。

例 3 掷一粒骰子，观察出现的点数。

例 4 在某一段时间间隔内，记录某电话总机接到的呼唤次数。

例 5 在一批日光灯中任意抽取 1 只，测试其寿命。

上面我们举了五个关于试验的例子，这些试验具有以下两个共同特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，究竟出现哪个结果，在试验之前无法预知。

在概率论中，我们把具有上述两个特点的试验叫做**随机试验**，简称**试验**，用记号 E 来表示。我们可以将例 1 中的试验记为 E_1 ，例 2 中的试验记为 E_2 ，…。

二、随机事件的概念

1. 随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情，叫做**随机事件**，简称**事件**。事件通常用大写拉丁字母 A, B, \dots 表示。例如，在抛硬币试验中，“出现正面”是随机事件；在掷骰子试验中，“出现 2 点”、“出现偶数点”也都是随机事件；在 100 件产品中，有 10 件是次品，90 件是正品，如果从中任取一件，则“取到正品”与“取到次品”都是随机事件。

2. 基本事件

在一随机试验中，它的每一个可能出现的结果都是一个随机事件，它们是这个试验的最简单的随机事件。我们称这些简单的随机事件为**基本事件**。

例如，在抛硬币试验中的“出现正面”与“出现反面”；掷骰子试验中的“出现 1 点”、“出现 2 点”、…、“出现 6 点”等等都

是基本事件。

我们把能够分解为两个或多个基本事件的随机事件，叫做**复合事件**。

例如，在掷骰子试验中，“出现偶数点”这一事件是复合事件，因为它可以分解为：“出现2点”、“出现4点”及“出现6点”这样三个基本事件。

3. 必然事件与不可能事件

在随机试验中，必然会发生的**事件叫做必然事件**；不可能发生的事件叫做**不可能事件**。

例如，在掷骰子试验中，“点数不大于6”是必然事件；“点数大于6”是不可能事件。

从本质上讲，必然事件与不可能事件都不是随机事件，但我们还是把它们当作特殊的随机事件，这对今后分析问题和解决问题是有好处的。

必然事件与不可能事件通常分别用字母 S 和 ϕ 表示。

三、样本空间

为了描述一个随机现象，就得通过随机试验考察随机现象的各种可能发生的**结果**。

我们把随机试验 E 的一切可能发生的试验结果所组成的集合，叫做试验 E 的**样本空间**，记为 S 。 S 中的元素就是试验 E 的基本事件。基本事件也称为**样本点**。

如果用 S_1 、 S_2 、 \dots 、 S_5 分别表示例1、例2、 \dots 、例5中随机试验的样本空间，那末

$$S_1 = \{\text{出现正面, 出现反面}\};$$

$$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\};$$

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$S_4 = \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$S_5 = \{t | 0 \leq t < +\infty\}.$$

一个随机试验的样本空间可以是有限集(如 S_1)，也可以是可数集(如 S_4)，也可以是不可数集(如 S_5)。认识一个随机现象，很重要的一点是要搞清楚其样本空间是什么。

引进了样本空间的概念后，我们就可以从集合论的角度来描述随机事件。例如：

在掷骰子试验中，事件 A_1 ：“出现偶数点”，即

$$A_1 = \{2, 4, 6\};$$

在抽检产品的试验中，事件 A_2 ：“次品数小于 2”，即

$$A_2 = \{0, 1, 2\};$$

在日光灯的寿命试验中，事件 A_3 ：“寿命不低于 1000 小时”，即

$$A_3 = \{t | t \geq 1000\}.$$

由上述例子我们可以知道：随机试验 E 的任意一个事件都是其样本空间 S 的子集，它是由一个或若干个基本事件组成。这时，事件发生，当且仅当这个子集中的一个基本事件发生。此外，我们还应知道：必然事件就是样本空间 S ；不可能事件就是空集 ϕ 。

四、事件之间的关系及运算

在客观世界里，同一随机试验中的许多事件，往往存在着一定的关系。对于事件之间相互关系的研究，将有助于我们去认识和分析比较复杂的事件。下面，我们来介绍事件之间的关系及运算。

1. 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A ，或称事件 A 包含于事件 B ，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 。例如：

在掷骰子试验中，设事件 A 表示“出现偶数点”，事件 B 表示“不少于 2 点”，则 $B \supset A$ 。

2. 相等关系

如果事件 $A \supset B$ ，并且 $B \subset A$ ，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A = B$ 。例如：

在掷骰子试验中，事件“出现偶数点”与事件“不出现奇数点”，便是两个相等的事件。

3. 事件的和

“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的和，记作 $A \cup B$ 。

以抽检产品的试验为例，设事件 A 表示“ $2 \leq \text{次品数} \leq 4$ ”，事件 B 表示“ $1 \leq \text{次品数} \leq 3$ ”，那末

$A \cup B$ 表示事件“ $1 \leq \text{次品数} \leq 4$ ”。

从它们所包含的基本事件来看：

$A = \{2, 3, 4\}$ ， $B = \{1, 2, 3\}$ ，而 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ 。

可见， $A \cup B$ 所包含的基本事件是 A 与 B 所含的基本事件的全部（重复的只算一次）。

一般来说，“事件 A_1, A_2, \dots, A_n 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的和，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ （简记为 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ ）；“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$

(简记为 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$).

4. 事件的积

“事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的积, 记作 $A \cap B$, 简记为 AB . 事件 AB 是由事件 A 与 B 的所有公共的基本事件所组成的.

我们仍以抽检产品的试验为例, 并设

$A = “2 \leq \text{次品数} \leq 4”$, $B = “1 \leq \text{次品数} \leq 3”$, 那末 $AB = “2 \leq \text{次品数} \leq 3”$.

类似地, 可以定义“事件 A_1, A_2, \dots, A_n 同时发生”这一事件为事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的积, 记作 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 或 $A_1 A_2 \dots A_n$ (简记为 $\bigcap_{k=1}^n A_k$); 还可以定义“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生”这一事件为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积, 记作 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$ 或 $A_1 A_2 \dots A_n \dots$ (简记为 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$).

5. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与 B 的差, 记作 $A - B$.

6. 事件的互不相容

如果两个事件 A 与 B 在一次试验中不可能同时发生, 即

$$AB = \phi,$$

则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).

如果 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 中任意两个事件都不可能同时发生, 即

$$A_i A_j = \phi (1 \leq i < j \leq n),$$

则称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

显然，对于一个随机试验来说，它的各个基本事件之间是互不相容的。

7. 事件的对立

在一次试验中，若事件 A 与 B 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即

$$A \cup B = S, AB = \phi,$$

则称事件 A 与事件 B 对立(或互逆)，并称事件 B 是 A 的对立事件(或逆事件)，同样， A 也是 B 的对立事件(或逆事件)，记作

$$B = \bar{A} \text{ 或 } A = \bar{B}.$$

例如，在掷骰子试验中，事件 A ：“出现偶数点” = $\{2, 4, 6\}$ 的对立事件是 \bar{A} ：“出现奇数点” = $\{1, 3, 5\}$ ；事件 B ：“点数不小于3” = $\{3, 4, 5, 6\}$ 的对立事件是 \bar{B} ：“点数小于3” = $\{1, 2\}$ 。

从这个例子可以看到：

事件 A 的对立事件 \bar{A} 是由样本空间 S 中的一切不属于 A 的基本事件所组成的，即 $\bar{A} = S - A$ 。

根据对立事件的定义，显然有：

$$\overline{\bar{A}} = A, \overline{\bar{S}} = \phi, A \cup \bar{A} = S.$$

以上事件的各种关系可用图 1-1 表示。

从上面的讨论可以看到，概率论中事件之间的关系与集合论中集合之间的关系是一致的。

随机事件的运算也和集合的运算一样，满足以下规律：

(1) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$$

(2) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

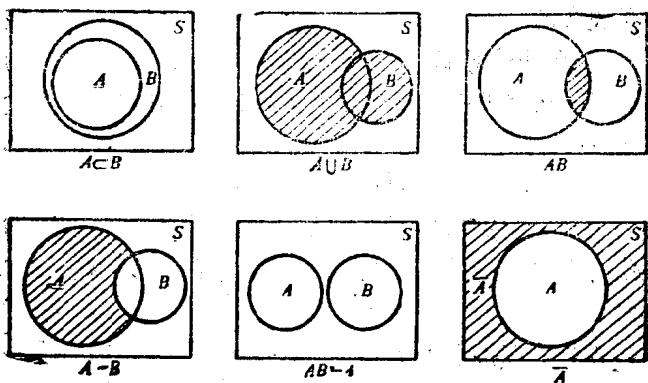


图 1-1.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

(3) 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

(4) 对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

例 6 设 A 、 B 、 C 是三个事件，试用 A 、 B 、 C 表示下列事件：

- (1) “ A 发生而 B 、 C 不发生”；
- (2) “ A 、 B 、 C 中恰有一个发生”；
- (3) “ A 、 B 、 C 中至少有一个发生”；
- (4) “ A 、 B 、 C 中至少有两个发生”；
- (5) “ A 、 B 、 C 都不发生”；
- (6) “ A 、 B 、 C 中不多于两个发生”。