李代数

〔美〕N. 賈柯勃逊著　曹錫华譯

上海科学技术出版社

李 代 数

〔美〕N. 賈柯勃逊 著
曹 錫 华 譯

上 海 科 学 技 术 出 版 社

內容提要

本书讲述李代数的基本理論，共分十章，第一章到第四章讲述李代数的結构理論，包括基本概念，关于可解李代数与幂零李代数，Cartan准則，分裂半单純李代数等方面的基本結果。第五章到第八章讲述李代数表示理論，包括基本概念，Ado-Iwasawa定理，不可約模的分类，不可約模的特征标等內容。第九章讲述自同构，确定了特征数零的代数閉域上的半单純李代数的所有自同构，最后一章讲述任意域上单純李代数的分类。书中每章之后还附有一定数量的习題。可供高等学校作为教材或教学参考书。

LIE ALGEBRAS
Nathan Jacobson
Interscience Publishers, 1962

李代数

曹錫华 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 11 12/32　排版字数 280,000
1964年11月第1版　1964年11月第1次印刷
印数 1—5,000

統一书号 13119·600　定价(科六) 1.70 元

序

这本书是作者在最近十年，特别是1959～1960学年，在耶魯大学讲授的基础上写成的. 它主要是一本李代数課本，供学生自学或作为教材之用. 讀者除必需具备一般的代数知識外，还要熟悉綫性代数(綫性变换，双綫性型，張量积)的理論. 而且，这还只是为了理解前面九章所必須具备的知識. 对于第十章，还需懂得Galois理論的知識及关于結合代数的Wedderburn結构理論的某些結果.

我們有很多理由向讀者推荐在学习了一般抽象代数与綫性代数之后，接着学习李代数这門学科，一方面是因为它的研究成果和构造非常完美，另方面也是因为它与其他許多数学分支(群論，微分几何，微分方程，拓扑学)有着密切的联系. 在讲述中，我們极力避免叙述得过于抽象；并始終遵循着这样一个观点，即把这种理論当作綫性代数的一个分支来处理. 一般抽象概念分两个部分：第一部分在第一章中，是适应于結构理論的；第二部分在第五章中，是适应于表示理論的. 第一章到第四章所讲述的是結构理論，一直讲到所謂"分裂单純李代数"的分类. 表示理論的基本研究成果，在第六章到第八章中讲述. 在第九章中，决定了特征数零的代数閉域上的半单純李代数的自同构. 把这些結果应用于第十章中，討論了任意域上单純李代数的分类問題.

在这里，我們不想叙述这門学科的历史发展，也不想叙述那些

对这門学科有貢献的人. 在这方面，我們只在有关地方簡略地提一下那些对主要概念首先提出的人的名字.在这里,作者本人特别感謝这个理論的杰出創建者之一 Hermann Weyl 教授，1933~1934 年，他在普林斯頓研究院的讲演眞正具有启发性，引导了作者在这方面进行研究. 还应指出,在这些讲演里,虽然 Weyl 教授主要讲的是关于連續群的李理論，但在他的讲演中把李代数这門学科放在一个独立的地位，第一次将"李代数"这名詞代替了那个时候以前一直专門使用的"无穷小群"这一名詞.

在本书后面附有詳細的文献目录,但这个目录是并不完全的.我編制这个目录的主要目的，在于給人們指出进一步研究本书所提出来的問題的途徑,以及其他与此直接有关的問題.

我特别感謝我的同事 George Seligman，他曾多次仔細地閱讀了我的手稿，并提出了許多修改意見. Paul Cohn 与 Ancel Mewborn 博士也都提出了許多有价値的意見,他們三人还帮助我做了校对工作,趁此机会对他們三人致以衷心的感謝.

Nathan Jacobson

1961 年 5 月 28 日

目　　录

第一章 基本概念

李代数的理論是連續群的李理論的产物．后者的主要結果是把李群的“局部”問題归結为相应的李代数問題，从而归結成綫性代数中的問題．对每一个李群联系着实数域或复数域上的一个李代数，并且在李群的解析子群与它的李代数的子代数之間建立了一个对应关系，使得不变子群对应理想，交換子群对应交換子代数，等等．李代数的同构等价于相应的李群之間的局部同构．我們在这里将不詳細地討論这些，因为关于李理論有現成的好的近代說明可以找到．讀者可以参考下列书籍之一：Chevalley 的“李群理論”，Cohn 的“李群”，Pontrjagin 的“連續群”．

近年来，有另外两类群論，在它們的研究中借助于引入适当的李代数．第一个是自由群的理論，它可以用自由李代数来研究，这个方法最初是 Magnus 的．虽然这里的联系不象李理論那样紧密，然而自由群与另一些形式的离散群的重要結果已經通过利用李代数而得到．特別值得注意的是关于所謂局限 Burnside 問題上的結果．所謂局限 Burnside 問題是：固定两个正整数 m 与 r，满足 $x^m=1$ 及具 r 个生成元的所有有限群的阶是否有界？值得注意，特征数为质数的李代数在应用到离散群論的时候起着重要的作用．我們仍然不准备詳細討論，但是愿意向感兴趣的讀者介紹两篇文章，在那里对群論中的这个方法有詳尽的說明．这两篇文章是：Lazard [2] 及 Higman [1]．

象在李理論中所得的那样，李群的子群与它的李代数的子代数之間的对应关系，在 Chevalley 的代数綫性群的理論中有完全相似的情形. 粗糙地說，一个綫性代数群是所有正則 $n\times n$ 矩陣所成的群的子群，这个子群的元素是由矩陣元素的一組多項式方程所刻划的，例如正交群，它是由矩陣 (α_{ij}) 的元素 α_{ij} 的一組方程 $\sum_i\alpha_{ij}^2=1$, $\sum_i\alpha_{ij}\alpha_{ik}=0$, $j\neq k$, j, $k=1,\cdots,n$ 所定义的. 对每一綫性代数群，Chevalley 定义了一个相应的李代数（参看 Chevalley [2]），它給出了关于群的知識，而且在特征数 0 的綫性代数群的理論中是决定性的知識.

由于这些群論的背景，这就并不奇怪，在李代数中的基本概念有着群論的味道. 在学习李代数的整个过程中，特别是学习这一章的时候，必須把这一点記在心里. 这一章里将給出与第二到第四章中所发展的結构理論相适应的基础. 关于基础的問題还将在第五章中提出. 在那里涉及到表示理論中所必須的某些概念，表示理論将在第六与第七章处理.

1. 李代数与結合代数的定义与构作

我們回忆起域 Φ 上的非結合代数（=不一定結合的代数）$\mathfrak{A}$ 的定义. 这是 Φ 上的一个向量空間 $\mathfrak{A}$，而且在 $\mathfrak{A}$ 中还定义着一个双綫性結合. 这就是，对每一对 $\mathfrak{A}$ 中元素 (x,y)，相应地有一个积 $xy\in\mathfrak{A}$，而且满足双綫性条件

$$(x_1+x_2)y=x_1y+x_2y,\quad x(y_1+y_2)=xy_1+xy_2. \tag{1}$$

$$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y),\quad \alpha\in\Phi. \tag{2}$$

对于具单位元素 1 的交换环 Φ 上非結合代数，可以給出相似的定义. 这是具有乘积 $xy\in\mathfrak{A}$ 满足 (1) 与 (2) 的左 Φ-模. 我們将主要对域上代数感兴趣，而且事实上是对那些作为向量空間是有限維的代数. 对这种代数，我們有一組基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，且可以写 $e_ie_j=\sum_{k=1}^n\gamma_{ijk}e_k$，其中这些 γ 都在 Φ 中. 这 n^3 个 γ_{ijk} 称为代数乘

积常数(关于所选的基). 它們給出了每一乘积 $e_ie_j(i, j=1, \cdots, n)$ 的值. 从而这些乘积又决定了 $\mathfrak{A}$ 中每一乘积. 事实上, 設 x 与 y 为 $\mathfrak{A}$ 中任二元素, 令 $x=\sum\xi_ie_i$, $y=\sum\eta_je_j$, ξ_i, $\eta_j\in\Phi$. 于是由(1)与(2), 得

$$xy=(\sum_i\xi_ie_i)(\sum_j\eta_je_j)=\sum_{i,j}(\xi_ie_i)(\eta_je_j)$$
$$=\sum_{i,j}\xi_i(e_i(\eta_je_j))=\sum_{i,j}\xi_i\eta_j(e_ie_j),$$

由 e_ie_j 就决定了 xy 的值.

这个理由指出了有限非結合代数的一个普遍构作法.

从任一向量空間 $\mathfrak{A}$ 及 $\mathfrak{A}$ 中一組基 (e_i) 出发. 对每一对 (i, j), 我們任意地把 e_ie_j 定义作 $\mathfrak{A}$ 中一元素. 于是若 $x=\sum_1^n\xi_ie_i$, $y=\sum_1^n\eta_je_j$, 我們定义

$$xy=\sum_{i,j=1}^n\xi_i\eta_j(e_ie_j). \tag{3}$$

可直接驗証, (1)与(2)成立, 在这意义下乘积是双綫性的. e_ie_j 的选擇等价于选取 Φ 中元素 γ_{ijk} 使 $e_ie_j=\sum\gamma_{ijk}e_k$.

要引出有趣的构造結果, 非結合代数的概念是太广了. 为了得到这样的結果, 我們必須对乘法加上某些更进一步的条件. 最重要的, 也就是在这里将討論的一类条件, 是結合律与李条件.

定义 1 如果一个非結合代数 $\mathfrak{A}$ 中的乘法满足結合律

$$(xy)z=x(yz), \tag{4}$$

則称 $\mathfrak{A}$ 为**結合代数**. 如果一个非結合代数 $\mathfrak{A}$ 中的乘法满足李条件

$$x^2=0, \quad (xy)z+(yz)x+(zx)y=0, \tag{5}$$

則称 $\mathfrak{A}$ 为**李代数**. (5)中第二式称为 **Jacobi 等式**.

因为这些类型的非結合代数都是由等式来定义, 所以显然子代数及同态象都是同一类型的, 也就是結合的或李的. 若 $\mathfrak{A}$ 是一李代数且 x, $y\in\mathfrak{A}$, 則 $0=(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2=xy+yx$, 所以在任一李代数中有

$$xy=-yx. \tag{6}$$

反之,如果这个条件成立,则$2x^2=0$,所以若特征数$\neq 2$,则$x^2=0$. 因此,在特征数$\neq 2$的情形,(6)可以用来代替李代数的定义中(5)的第一个式子.

命题 1 对于Φ上具基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$的一个非結合代数$\mathfrak{A}$,$\mathfrak{A}$为結合代数当且仅当$(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$, $i, j, k=1, 2, \cdots, n$. 若$e_ie_j=\sum_r \gamma_{ijr}e_r$,那末这些条件等价于

$$\sum_r \gamma_{ijr}\gamma_{rks}=\sum_r \gamma_{irs}\gamma_{jkr}, \quad i, j, k, s=1, 2, \cdots, n. \tag{7}$$

代数$\mathfrak{A}$是李代数当且仅当对$i, j, k=1, 2, \cdots, n$,

$$e_i^2=0, \quad e_ie_j=-e_je_i,$$
$$(e_ie_j)e_k+(e_je_k)e_i+(e_ke_i)e_j=0.$$

这些条件等价于

$$\begin{gathered}\gamma_{iik}=0, \quad \gamma_{ijk}=-\gamma_{jik}, \\ \sum_r(\gamma_{ijr}\gamma_{rks}+\gamma_{jkr}\gamma_{ris}+\gamma_{kir}\gamma_{rjs})=0.\end{gathered} \tag{8}$$

【証】 若$\mathfrak{A}$是結合代数,则$(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$. 反之,假設对e_i这些条件成立. 若$x=\sum\xi_ie_i$, $y=\sum\eta_je_j$, $z=\sum\zeta_ke_k$,则

$$(xy)z=\sum\xi_i\eta_j\zeta_k(e_ie_j)e_k \quad 及 \quad x(yz)=\sum\xi_i\eta_j\zeta_ke_i(e_je_k).$$

因此$(xy)z=x(yz)$,所以$\mathfrak{A}$是結合代数. 若$e_ie_j=\sum\gamma_{ijr}e_r$,则$(e_ie_j)e_k=\sum_{r,s}\gamma_{ijr}\gamma_{rks}e_s$及$e_i(e_je_k)=\sum_{r,s}\gamma_{irs}\gamma_{jks}e_s$. 因此由$e_i$的綫性无关性就可得出条件$(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$等价于(7). 对于李情形的証明是相似的,这里省略了.

在眞的实踐中,除非对低維的代数,在构造結合代数与李代数的例子的时候,上述的一般手續不是常用的. 我們将在§4中,在决定一維、二維、三維李代数的时候应用它. 对于李代数的情形还有一些簡化手續值得注意. 首先,注意到,若在一代数中有$e_i^2=0$及$e_ie_j=-e_je_i$,那末如果对特殊的三数i, j, k,

$$(e_ie_j)e_k+(e_je_k)e_i+(e_ke_i)e_j=0$$

成立就可推出$(e_je_i)e_k+(e_ie_k)e_j+(e_ke_j)e_i=0$成立. 因为对$i, j, k$

的巡回置换显然是允許的，所以对$(e_{i'}e_{j'})e_{k'}$的 Jacobi 等式也成立，其中 i', j', k' 是 i, j, k 的任一置换. 其次，設 $i=j$. 于是 $e_i^2e_k+(e_ie_k)e_i+(e_ke_i)e_i=0+(e_ie_k)e_i-(e_ie_k)e_i=0$. 因此若在 $\mathfrak{A}$ 中有 $e_i^2=0$, $e_ie_j=-e_je_i$, 或即 $x^2=0$, 那末对于 e_i, e_i, e_j, Jacobi 等式成立. 特別，当 $\dim\mathfrak{A}\leqslant 2$ 时，Jacobi 等式是 $x^2=0$ 的結果；当 $\dim\mathfrak{A}=3$ 时，只要驗証一个等式$(e_1e_2)e_3+(e_2e_3)e_1+(e_3e_1)e_2=0$.

2. 綫性变换的代数. 微分

事实上，我們不必要通过基及乘法表去构造結合代数与李代数的例子，因为这些代数可以"自然地"得到. 結合代数的原始例子得之如下. 設 $\mathfrak{M}$ 为域 Φ 上一向量空間，又設 $\mathfrak{E}$ 为 $\mathfrak{M}$ 到它自己內的所有綫性变换所成的集合. 我們回忆起，若 $A, B\in\mathfrak{E}$ 及 $\alpha\in\Phi$,則 $A+B$,αA 及 AB 定义如下：$x(A+B)=xA+xB$, $x(\alpha A)=\alpha(xA)$, $x(AB)=(xA)B$. 于是,大家熟知, $\mathfrak{E}$ 关于 $+$ 及乘純量成一个向量空間，而且乘法是結合的并满足(1)与(2). 因此 $\mathfrak{E}$ 是一个結合代数. 我們还都知道，若 $\mathfrak{M}$ 是m維的, $m<\infty$, 則 $\mathfrak{E}$ 是 Φ 上 m^2 維向量空間. 若 $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 为 $\mathfrak{M}$ 在 Φ 上的一組基，則满足 $e_iE_{ij}=e_j$, $e_rE_{ij}=0$, $r\neq i$ 的綫性变换 $E_{ij}(i, j=1, \cdots, m)$ 組成 $\mathfrak{E}$ 在 Φ 上的一組基. 若 $A\in\mathfrak{E}$, 則可令 $e_iA=\sum_j\alpha_{ij}e_j$, $i=1, \cdots, m$, $(\alpha)=(\alpha_{ij})$是 A 关于基(e_i)的矩陣. 对应 $A\to(\alpha)$ 是$\mathfrak{E}$到代数 Φ_m 上的一个同构，其中 Φ_m 是系数 α_{ij} 在 Φ 中的所有 $m\times m$ 矩陣所成的代数.

代数 $\mathfrak{E}$ 称为是 Φ 上 $\mathfrak{M}$ **中所有綫性变换所成的(結合)代数.** $\mathfrak{E}$ 的任一子代数 $\mathfrak{A}$，也即关于乘法閉合的子空間，称为**綫性变换的代数.**

若 $\mathfrak{A}$ 是任一个非結合代数且 $a\in\mathfrak{A}$, 則把 x 映成 xa 的映象 a_R 是一个綫性变换. 大家熟知，也容易驗証，$(a+b)_R=a_R+b_R$, $(\alpha a)_R=\alpha a_R$, 而且若 $\mathfrak{A}$ 是結合的,那末还有$(ab)_R=a_Rb_R$. 因此若

$\mathfrak{A}$ 是一个結合代数，則映象 $a \to a_R$ 是 $\mathfrak{A}$ 到向量空間 $\mathfrak{A}$ 中綫性变换所成代数 $\mathfrak{E}$ 內的一个同态. 若 $\mathfrak{A}$ 有单位元素 1，則 $a \to a_R$ 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{E}$ 內的一个同构. 因此 $\mathfrak{A}$ 同构于綫性变换的一个代数. 若 $\mathfrak{A}$ 沒有单位元素，那末我們可用簡单的方法把 $\mathfrak{A}$ 嵌入于一个具单位元素的代数 $\mathfrak{A}^*$ 中，且 $\dim \mathfrak{A}^* = \dim \mathfrak{A} + 1$（参考 Jacobson[2], vol. I. p. 84）. 因为 $\mathfrak{A}^*$ 同构于一个綫性变换的代数，所以 $\mathfrak{A}$ 亦然. 若 $\mathfrak{A}$ 是有限維的，上述論証指出了，$\mathfrak{A}$ 同构于一个有限維向量空間中綫性变换的代数.

可以用很簡单的方法从結合代数得到李代数. 設 $\mathfrak{A}$ 是一个結合代数. 若 $x, y \in \mathfrak{A}$，則我們定义 x 与 y 的**李积**或(加法的)**换位子**如下:

$$[xy] = xy - yx. \tag{9}$$

直接驗算得

$$[x_1 + x_2, y] = [x_1 y] + [x_2 y],$$
$$[x, y_1 + y_2] = [x y_1] + [x y_2],$$
$$\alpha[xy] = [\alpha x, y] = [x, \alpha y].$$

还有，

$$[xx] = x^2 - x^2 = 0,$$
$$\begin{aligned}&[[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y] \\ &\quad = (xy - yx)z - z(xy - yx) + (yz - zy)x \\ &\qquad - x(yz - zy) + (zx - xz)y - y(zx - xz) = 0;\end{aligned}$$

于是乘积 $[xy]$ 滿足关于李代数乘积的所有条件. 这样得到的李代数称为結合代数 $\mathfrak{A}$ 的**李代数**. 我們将以 $\mathfrak{A}_L$ 記这个李代数. 特别，我們有从 $\mathfrak{E}$ 得到的李代数 $\mathfrak{E}_L$. $\mathfrak{E}_L$ 的任一子代数 $\mathfrak{L}$ 将称为**綫性变换的李代数**(或綫性变换李代数). 今后我們将看到，每一李代数同构于李代数 $\mathfrak{A}_L$ 的一个子代数，这里 $\mathfrak{A}$ 是結合代数. 由于刚才对結合代数所証的結果，这等价于說，每一李代数同构于一个綫性变换李代数.

現在我們来考虑李代数 $\mathfrak{E}_L$ 的子代数的某些重要例子，这里 $\mathfrak{E}$ 是域 Φ 上向量空間 $\mathfrak{M}$ 中所有綫性变換所成的結合代数.

正交李代数. 設 $\mathfrak{M}$ 具有一个非退化的对称双綫性型 (x, y)，又設 $\mathfrak{M}$ 是有限維的. 于是 $\mathfrak{M}$ 中任一綫性变換 A 关于 (x, y) 有一个共軛变換 A^*；也卽 A^* 是綫性的并满足 $(xA, y) = (x, yA^*)$. 映象 $A \to A^*$ 是代数 $\mathfrak{E}$ 中的反自同构：$(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$, $(AB)^* = B^* A^*$. 設 $\mathfrak{S}$ 表示满足 $A^* = -A$ 的所有元素 $A \in \mathfrak{E}$ 所成的集合（满足 $A^* = -A$ 的元素 A 称为关于反自同构*为反称的）. 于是 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{E}$ 的一个子空間，并且若 $A^* = -A$, $B^* = -B$，則

$$
\begin{aligned}
[AB]^* &= (AB - BA)^* = B^* A^* - A^* B^* \\
&= BA - AB = [BA] = -[AB].
\end{aligned}
$$

因此 $[AB] \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{E}_L$ 的一个子代数.

若 Φ 是实数域，則李代数 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{M}$ 关于 (x, y) 的正交群的李代数. 这个群就是 $\mathfrak{M}$ 中所有正交綫性变換 O 所成的群，所謂正交綫性变換是满足 $(xO, yO) = (x, y)$, $x, y \in \mathfrak{M}$ 的意思. 因为这个理由，所以称 $\mathfrak{S}$ 为关于 (x, y) 的**正交李代数**.

辛李代数. 这里我們假設 (x, y) 是一个非退化的交錯型：$(x, x) = 0$；仍設 $\dim \mathfrak{M} < \infty$. 我們回忆起，这些条件可推出 $\dim \mathfrak{M} = 2l$ 是偶数. 仍旧設 A^* 是 $A \in \mathfrak{E}$ 关于 (x, y) 的共軛变換. 于是所有反称綫性变換（$A^* = -A$）所成的集合 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{E}_L$ 的一个子代数. 这是与辛群有关的一个李代数，所以称之为交錯型 (x, y) 的**辛李代数** $\mathfrak{S}$.

三角綫性变換. 設 $0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个子空間鏈，且满足 $\dim \mathfrak{M}_i = i$，又設 $\mathfrak{T}$ 为所有使 $\mathfrak{M}_i T \subseteq \mathfrak{M}_i$ 的綫性变換 T 所成的集合. 显然 $\mathfrak{T}$ 是結合代数 $\mathfrak{E}$ 的一个子代数，因此 $\mathfrak{T}_L$ 是 $\mathfrak{E}_L$ 的一个子代数. 我們可以取 $\mathfrak{M}$ 的一組基 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 使得 $(x_1, x_2, \cdots, x_i)$ 为 $\mathfrak{M}_i$ 的基. 于是若 $T \in \mathfrak{T}$，則由 $\mathfrak{M}_i T \subseteq \mathfrak{M}_i$ 可得 T 关于 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 的矩陣有形式

$$(\tau)=\begin{pmatrix}\tau_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \tau_{m1} & \tau_{m2} & \cdots & & \tau_{mm}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

这样的矩陣称为**三角矩陣**，相应地称任一 $T\in\mathfrak{T}$ 为三角綫性变換.

微分代数. 設 $\mathfrak{A}$ 为任一非結合代数. 如果 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 内的綫性变換 D 満足

$$(xy)D=(xD)y+x(yD), \tag{11}$$

則称 D 为 $\mathfrak{A}$ 中一**微分**.

設 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}$ 中所有微分所成的集合. 若 $D_1, D_2\in\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$，則

$$\begin{aligned}(xy)(D_1+D_2)&=(xy)D_1+(xy)D_2\\ &=(xD_1)y+x(yD_1)+(xD_2)y+x(yD_2)\\ &=(x(D_1+D_2))y+x(y(D_1+D_2)).\end{aligned}$$

因此 $D_1+D_2\in\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. 同样可驗証，若 $\alpha\in\Phi$，則 $\alpha D_1\in\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. 我們有

$$\begin{aligned}(xy)D_1D_2&=((xD_1)y+x(yD_1))D_2\\ &=(xD_1D_2)y+(xD_1)(yD_2)+(xD_2)(yD_1)+x(yD_1D_2).\end{aligned}$$

把下指标 1 与 2 对換一下，然后两式相减就得

$$(xy)[D_1D_2]=(x[D_1D_2])y+x(y[D_1D_2]).$$

因此 $[D_1D_2]\in\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$，所以 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{E}_L$ 的一个子代数，其中 $\mathfrak{E}$ 是向量空間 $\mathfrak{A}$ 中所有綫性变換所成的代数. 我們称它为 $\mathfrak{A}$ 的**微分的李代数**或 $\mathfrak{A}$ 的**微分代数**.

若 $\mathfrak{A}$ 是实数域上的有限維代数，那末李代数 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 的自同构群的李代数. 有关李群与李代数之間的关系，我們对所叙述的任一結果将不給以証明，只是指示讀者去参閱有关李群的这一方面的文献. 然而，在这里我們将指出自同构群与微分代数之間的联系.

設 D 是一微分. 于是对 n 进行归納法可得 Leibniz 法則:

$$(xy)D^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(xD^i)(yD^{n-i}). \tag{12}$$

若Φ的特征数是0，那末就可以除以$n!$，而得到

$$(xy)\frac{D^n}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{i!}xD^i\right)\left(\frac{1}{(n-i)!}yD^{n-i}\right). \tag{12'}$$

若$\mathfrak{A}$是实数域上的有限維代数，則容易証明（参看 Jacobson [2], vol. II, p. 197），对$\mathfrak{A}$中任一綫性变换D，級数

$$1+D+\frac{D^2}{2!}+\frac{D^3}{3!}+\cdots \tag{13}$$

是收斂的，而且由(13)所定义的綫性变换$\exp D$是一一的. 利用(12′)也容易看出，若D是一微分，則$G=\exp D$满足

$$(xy)G=(xG)(yG).$$

因此G是$\mathfrak{A}$的一个自同构.

自同构与微分之間的一个联系可以通过純代数的处理建立起来，这有重要的应用. 这里我們假設$\mathfrak{A}$的基域是特征数为0的任意域. 設D是一个幂零微分，設$D^N=0$. 考虑映象

$$G\equiv\exp D=1+D+\frac{D^2}{2!}+\cdots+\frac{D^{N-1}}{(N-1)!}. \tag{14}$$

令$G=1+Z$, $Z=D+(D^2/2!)+\cdots+(D^{N-1}/(N-1)!)$，并注意到$Z^N=0$. 因此$G=1+Z$有一个逆变换$1-Z+Z^2+\cdots\pm Z^{n-1}$，所以$G$是$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}$上的一一映象. 我們有

$$\begin{aligned}(xG)(yG)&=\left(\sum_{i=0}^{N-1}\frac{xD^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{N-1}\frac{yD^j}{j!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{2N-2}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{xD^i}{i!}\right)\left(\frac{yD^{n-i}}{(n-i)!}\right)\right)\\&=\sum_{n=0}^{2N-2}(xy)\frac{D^n}{n!}\qquad(\text{由}(12'))\\&=\sum_{n=0}^{N-1}(xy)\frac{D^n}{n!}\\&=(xy)G.\end{aligned}$$