面向21世纪课程教材

高等学校经济管理学科数学基础

微积分辅导

4

傅维潼 编著

经济管理出版社
ECONOMIC MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

面向21世纪课程教材

高等学校经济管理学科数学基础

微积分辅导

傅维潼　编著

经济管理出版社

责任编辑:钟培华　张洪林
版式设计:王　超
责任校对:超　凡

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导:高等学校经济管理学科数学基础/傅维潼编著.
-北京:经济管理出版社,2001
ISBN 7-80162-255-3

Ⅰ.微…　Ⅱ.傅…　Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 059830 号

面向 21 世纪课程教材
高等学校经济管理学科数学基础
微积分辅导
傅维潼　编著

出版:经济管理出版社
(北京市新街口六条红园胡同 8 号　邮编:100035)
发行:经济管理出版社总发行　全国各地新华书店经销
印刷:北京中租胶印厂

850×1168 毫米　1/32　11.5 印张　298 千字
2001 年 10 月第 1 版　2001 年 10 月北京第 1 次印刷
印数:1—6000 册

ISBN 7-80162-255-3/F·243
定价:19.00 元

前　言

高等学校经济管理学科数学基础辅导分为三个分册:微积分分册、线性代数分册、概率论与数理统计分册。本书是微积分分册。编写本书的目的在于为学习这门课的学生提供一些力所能及的帮助和辅导。

本书分为8章,收集例题和习题约1250道。这些例题和习题,涵盖了全国全日制高等院校经济管理学科数学基础《微积分》这门课程的教学大纲所规定的全部内容。若能把这些例题和习题都做会,不仅可达到这门课程的教学基本目标,而且可以达到参加经济管理类硕士入学考试的水平。因此,使用本书不会受所用教材的限制。

本书主要以"面向21世纪课程教材——高等学校经济管理学科数学基础"《微积分》一书为参考蓝本编写而成,竭力通过对例题的讲解以及练习题给学生提供一些思考问题的直观想法和思路,通过各节的例题及习题由浅入深地阐述有关定义、定理、公式和方法的用法,充实有关理论。其中,有一些例题和习题反复强调了一些基本的定义、定理、公式和方法。这对有效地学习这门课是很重要的。还有一些例题和习题反复使用一些对解决微积分应用问题有用的数学方法,以便于读者学会使用。各章最后关于硕士生入学考试水平的例题和练习题,需要灵活地、创造性地运用微积分知识解决问题,以便读者扩大题型,进一步提高能力。希望使用本书的读者,先浏览一遍各节的基本知识,它清晰地叙述了有关定义、定理、公式和方法;然后把例题自己动手做一做,做出后再看讲解,比较一下,总结经验教训,再解答各节各章的习题;本书学完后,再

把总练习做一遍。本书例题及练习所包含的题型是多样的，有些是常见的，有的是比较新颖的，它们会帮助读者检验有关定义、定理、公式和方法是否真正地掌握了。只要读者扎扎实实地学习下去，就一定会收到满意的效果，可以自如地应付各种考试。

对张泽平、孙泉水、钟丽、戚秀琴等同志为整理、誊写书稿、搜集例题和习题所付出的劳动表示谢意。

本书如有错误或不当之处，希望读者批评指正。

傅维潼

2001年8月

目　录

注:加 * 为提高部分

第1章

函　　数

1.1　实数

1.1.1　基本知识及例题讲解

1. 实数与实数的绝对值

(1)实数与数轴上的点是1—1对应的,常用一个字母表示一个实数同时也表示以该实数为坐标的数轴上的对应点,有理数对应的点为有理点,无理数对应的点为无理点.

(2)在数轴上有理点与无理点都具有稠密性:任意两个有理点之间有无穷多个有理点;任意两个无理点之间有无数多个无理点.

(3)有理数经四则运算(0不能作除数)仍为有理数;实数经四则运算(0不能作除数)仍为实数.

(4)设 x 为一个实数,则 x 的绝对值为:

$$|x|=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

它是点 x 与原点之间的距离.点 a 与点 b 之间的距离为 $|a-b|$,即

$$|a-b|=\begin{cases}a-b & (a\geqslant b)\\ b-a & (a<b)\end{cases}$$

(5)绝对值的基本性质:

① $|a| \geqslant 0, |a| = |-a|, \sqrt{a^2} = |a|$

② $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

③ $|a| \leqslant k(k \geqslant 0)$即 $-k \leqslant a \leqslant k$

④ $||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$

⑤ $|ab| = |a| \cdot |b|$

⑥ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}(b \neq 0)$

2. 区间,邻域

全体实数的集合,记为 R,全体自然数的集合,记为 N,

(1)区间.

设 $a < b \in \mathrm{R}$

① 闭区间:$[a,b] = \{x \in \mathrm{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$

② 开区间:$(a,b) = \{x \in \mathrm{R} | a < x < b\}$

③ 半开区间:$(a,b] = \{x \in \mathrm{R} | a < x \leqslant b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathrm{R} | a \leqslant x < b\}$

④ 无穷区间:

$(-\infty, b] = \{x \in \mathrm{R} | x \leqslant b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathrm{R} | x < b\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} | a \leqslant x\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathrm{R} | a < x\}$

$R = (-\infty, +\infty)$

(2)邻域.

$|x - x_0| < \delta(\delta > 0)$或开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$称为 x_0 的邻域,x_0 为该邻域的中心,δ 为半径. $0 < |x - x_0| < \delta$ 或$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$为 x_0 的空心邻域,$(x_0 - \delta, x_0)$与$(x_0, x_0 + \delta)$分别为 x_0 的左邻域和右邻域.

例 1.1 解不等式：

① $x^2<4$　　　　② $|x+1|\leqslant|x-2|$

解： ① $x^2<4$ 两边取算术平方根可得

$|x|<2$，即 $-2<x<2$

② 令 $f(x)=|x+1|-|x-2|$

当 $x=-1$ 时，$|x+1|=0$，当 $x=2$ 时，$|x-2|=0$. 用 $x=-1$ 与 $x=2$ 把 $(-\infty,+\infty)$ 分为三部分：$(-\infty,-1)$，$(-1,2)$，$(2,+\infty)$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f(x)$	-3	-3	$2x-1$	3	3

而当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=2x-1\leqslant0$.

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=2x-1>0$.

故当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$|x+1|\leqslant|x-2|$.

例 1.2 解不等式：

① $|x+4|+|x|\leqslant12$　　② $|x+4|-|x-2|<2$

解： ① 令 $f(x)=|x+4|+|x|$

当 $x=-4$ 时，$|x+4|=0$，当 $x=0$ 时，$|x|=0$. 用 $x=-4$，$x=0$ 把 $(-\infty,+\infty)$ 分为三部分：$(-\infty,-4)$，$(-4,0)$，$(0,+\infty)$

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f(x)$	$-2x-4$	4	4	4	$2x+4$

$f(x)\leqslant12$　当 $x<-4$ 时，$-2x-4\leqslant12$　$x\geqslant-8$

当 $-4\leqslant x\leqslant0$ 时 $4<12$

当 $x>0$ 时，$2x+4\leqslant12$　$x\leqslant4$

故当 $-8\leqslant x\leqslant4$ 时，$|x+4|+|x|\leqslant12$

② 令 $f(x)=|x+4|-|x-2|$

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f(x)$	-6	-6	$2x+2$	6	6

$f(x)<2$　当 $x\leqslant -4$ 时, $f(x)=-6<2$

当 $-4<x<2$ 时, $2x+2<2$　$x<0$

故当 $x<0$ 时, $|x+4|-|x-2|<2$

注意:解关于绝对值的不等式用例 1.2 的方法比较奏效,其要点是将不等式两边的绝对值都移到同一侧,设该式为 $f(x)$,再根据绝对值的几何意义,找出使各绝对值为 0 的点,用这些点把实数轴划分成互不相交的区间,在各区间中考察 $f(x)$.

1.1.2　练习

1. 解不等式 $x^2-2x\geqslant 3$

2. 解不等式:

(1) $|x+2|\geqslant|x-1|$　　(2) $|x+2|-|x|<1$

1.1.3　答案

1. $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$

2. (1) $x\geqslant -\frac{1}{2}$　　(2) $x<-\frac{1}{2}$

1.2　函数的概念

1.2.1　基本知识及例题讲解

1. 常量与变量

(1)在某种变化过程中取值保持不变的量叫常量,用字母 a, b, c 等表示;而在某种变化过程中取不同数值的量称为变量,以 x, y, z 等字母表示.

(2)一般地,变量是在一个非空的数集中可以取任意一数值的量,即给定一变量与给定其取值的数集应该是相一致的.常量可以看成是在只由一个数构成的数集中取值的变量.在数轴上,变量表

示一个在数轴的某个范围中移动的点，而常量则是数轴上的一个固定的点.

2. 函数的概念

设有两个变量 x 与 y，对于变量 x 的取值集合 $D \neq \Phi$ 中的每一个数值 x，根据一个对应法则 f，都有一个确定的实数 y 与之对应，用 $y=f(x)$ 表示，则称变量 y 为变量 x 在变域 D 的函数，称 D 为该函数的定义域，$R=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

3. 反函数的概念

若 y 为函数 $f(x)$ 的值域 R 中的任意一固定数值，在 D 中有惟一一个确定数值 x，使 $f(x)=y$ 成立，则变量 x 为变量 y 在变域 R 的函数，这个函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为：$x=f^{-1}(y)$，习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$.

4. 复合函数的概念

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $u \in D_f$，而 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ. 若 $D_f \cap R_\varphi \neq \Phi$，则称函数

$$y=f[\varphi(x)]$$

为函数 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 的复合函数. y 是因变量，u 为中间变量，x 为自变量，其定义域为

$$D_{f\cdot\varphi}=\{x \mid \varphi(x) \in D_f, x \in D_\varphi\}$$

5. 分段函数

若函数的定义域被划分为若干个不相交的子集合，当自变量 x 在不同的子集中取值时，函数值 $f(x)$ 则用不同的分析表达式来计算，这样的函数称为分段函数.

6. 函数的简单几何特性

(1)单调性.

设函数 $f(x)$ 在某区间 (a,b) 上有定义，对于任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$：

① 如果 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)上单调增加.

② 如果 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)上单调减少.单调增加、单调减少函数统称为单调函数,使函数单调的区间称为该函数的单调区间.

(2)有界性.

设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,若存在一常数 L,使得对任意 $x\in D$ 均有 $f(x)\leqslant L$ 成立,则称 $f(x)$在 D 上有上界;若存在常数 K,使得对任意 $x\in D$,均有 $K\leqslant f(x)$成立,则称 $f(x)$在 D 上有下界;$f(x)$在 D 上即有下界 K 又有上界 L,(对任意 $x\in D$ 均有 $K\leqslant f(x)\leqslant L$ 成立),则称 $f(x)$在 D 上有界(或存在一正数 C,使得对于任意 $x\in D$,均有 $|f(x)|\leqslant C$ 成立).

(3)奇偶性.

设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,且 $x\in D$ 时必有 $-x\in D$;如果对任意 $x\in D$,均有 $f(x)=f(-x)$成立,则称$f(x)$为偶函数;而有 $f(-x)=-f(x)$成立,则称 $f(x)$为奇函数.

(4)周期性.

设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,如果存在常数 T,使得 $x\in D$时,必有 $x\pm nT\in D(n=1,2,\cdots)$,且 $f(x+T)=f(x)$成立,则称 $f(x)$为周期函数,满足上式的最小正数 T_0,称为 $f(x)$的最小周期(简称周期).

例 1.3 求下列函数的定义域:

① $y=\dfrac{3x^2+1}{1+x}$　　　② $y=(2x-3)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

解: ① 当 $x+1\neq 0$ 时,函数 $y=\dfrac{3x^2+1}{x+1}$才有意义,所以其定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

② 当$\dfrac{x+1}{1-x}\geqslant 0$ 时,才能确定 y 的值.

解此不等式可得: