現代數學

上册

鄭 肇 楨 著

商 務 印 書 館

現 代 數 學

上 册

鄭 肇 楨 著

出版者 商務印書館香港分館
香港皇后大道中三十五號
印刷者 商務印書館香港印刷廠
香港九龍炮仗街七十五號

1975年8月港版 1978年5月重印

序

數學是由於生活上的實際需要而產生的。它隨着人類文明進步與生產發展而逐步積累與豐富起來，至今已發展成為一門極為龐大而包含衆多分支的學問。它一如其他科學一般是由觀察與理解自然的規律總結而來，故此，它一方面是具有抽象的特質，而另方面却又反映了具體的現實。這是因為自然的規律，並不僅是偶然而個別地獨立出現，它往往存在於許多不同的事象中，即管它們在表面上顯得毫無關係。因此要從不同的事物中抽取了相同的規律，這就是一般數學產生的歷程。這一種抽取是包括了捨棄只屬於個別事物的特殊性，而提煉出屬於整羣所研究的事物的共有性質。故此數學性質便是概括了的某一類對象的性質。這亦說明了數學為什麽具有高度的抽象性，因為如非抽象就不能從個別性質昇華達於羣體的一般性。

例如我們知道 3 個蘋果再加 4 個蘋果便是 7 個蘋果； 3 隻狗再來 4 隻狗便是 7 隻狗。這兩件原是不同的事象，但是它們却有相同的結果 3＋4＝7 。當我們用 3 ＋ 4 ＝ 7 來表達這種關係的時候，這個別的獨立事象便被提昇到抽象的層面上去了。在這個層面上“狗”和“蘋果”都不再是考慮的對象，因為我們關心的只是“3”，“4”，“7”這三個純量彼此的關係，而這一個關係却不局限於對何種實物而言，因它是普遍地存在於千千萬萬的現實事象中。由此可見數學本身的抽象性，並不是使它脫離了現實而浮於虛幻。事實上，它的抽象性反而使它更具現實的意義，這是由於這種性質原是從現實概括而來。

在初等數學裏，數學所作出的抽象化是旣有限而又初步的。故在此範圍內所涉及的數學性質，幾乎直接地與熟知的生活具體地聯系起來。如算術運算，幾何特性，它們雖

目　錄

I 集

集（Set）的概念在許多數學部門裏都需要涉及，所以學習數學就必要對集有一些基本的認識。

集是什麽呢？簡單言之，集就是一個集合，一個羣體，一隊，一組，••• 等等代表衆數的名詞。例如一“盒”鉛筆，一“羣”學生，一“套”傢具，一“缸”熱帶魚，等等都分別可構成集。我們可以說這是一個鉛筆的集，這是一個學生的集，這是一個傢具的集，這是一個熱帶魚的集。這樣每一個集就包含了若干物體，反之，若干物體合起來就是一個集。

集裏所含有的物體都叫作集裏的**元**（Element）。所以鉛筆的集便含有鉛筆作爲它的元。熱帶魚集便含有熱帶魚爲它的元。由此亦可知一個集的元都必須具有某一種相同的性質才可以構成一個集。例如鉛筆的集的元，就具有作爲鉛筆的相同性質，熱帶魚的集的元，就具有作爲熱帶魚的相同性質。同樣，一個10以內的質數集的元，就必須既爲質數而又是不大於10的一個數目。

由以上的描述可知集必然是由一些清楚地指明的元來構成的。所要確定的便是每一個元的所屬問題，即是一個元是否**屬於**一個集。像一個10以內的質數構成的集，對於任何一元，我們便拿“是否10以內的質數”一個標準來確定它的所屬。如果答案“是”則此一元便屬於這個集，如果答案“否”則此元**不屬於**這個集。

現在作出一些符號來表示集和它的元。通常大草字母是用來表示集的，如A，B，C，D，••• W，X，Y，Z等。小草字母如a，b，c，d，••• 等亦可作爲集內的元的代表。當把元列出來時，又可用一個括號｛　｝把它們括起來以表示構成一個集。上面由2，3，5，7四個元所構成的10以內的質數集便記爲：

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

若用P代表這集便有

$$P = \{2, 3, 5, 7\}$$

下面所記出的都是一些集：

A＝｛ a , b , c , d ｝

B＝｛ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ｝

C＝｛陳，李，張，黃，何｝

D＝｛ ＊， ！， ？， ：， ＝｝

E＝｛ ☆, ⊙, □, △, ※ ｝

F＝｛  ｝

G＝｛  ｝

H＝｛  ｝

上面集 A 含有元 a , b , c , d 。即是說 a , b , c , d 分別屬於集 A 。用符號∈表示屬於（∈是希臘字母 epsilon），則　$a \in A$,　$b \in A$,　$c \in A$,　$d \in A$ 。

如把這個符號加上一劃變作∉，便是代表不屬於。例如：

$e \notin A$,　$f \notin A$,　 $\notin A$ 。

一個集的元的次序是不計算在內的，故此把一個集的元次序更改後所得的集仍是看作同一的集。例如：

｛1 , 2 , 3｝,｛1 , 3 , 2｝,｛2 , 1 , 3｝,｛2 , 3 , 1｝,｛3 , 1 , 2｝,｛3 , 2 , 1｝

都是相同的集，因爲它們所含的元是完全相同的。含有完全相同元的集稱爲**等集**(Equal set)。並且可用等號來表示，故　｛ 1 , 2 , 3 ｝＝｛ 2 , 1 , 3 ｝

又當一個集所含有的元中有相同時，它們都只算作一個元，例如｛ a , b , a , b , c ｝只算含有三個元 a , b , c 。

即　｛ a , b , a , b , c ｝＝｛ a , b , c ｝

把一個集的元列出來並用括號｛ ｝表示的方法稱爲**列舉法**。列舉法是必須把元的全體盡列出來，而不能遺漏任何一個的。由此亦可想到如果一個集含有許多元，用列舉法是極其麻煩的事。例如一個集含有由 1 至 1000 的整數作爲元 ，則用列舉法寫出這一個集，便要寫出由 1 至1000的數目來。這是一個很長的寫法。又如一個集包含了某一個 X 城市的全部登記車輛，而登記的車輛却有十餘萬架之多，則用列舉法表示這一集便需要

把十餘萬個代表車輛的車牌號數寫出來，這便是很麻煩的事。由於這樣的理由，考慮用別種較簡單的記集方法便有需要。

一種稱爲**構造式**的記集方法是利用元的定義來作出的，譬如對於集 $A=\{2,3,5,7\}$，我們可定義A的元爲質數，且又不能大於10。於是A便可寫作：

$A=\{x \mid x$ 爲質數，$x\leqq 10\}$

同樣 $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ 便可寫作

$B=\{x \mid x$ 爲整數，$1\leqq x\leqq 6\}$

$C=\{1,4,9,16,25\}$ 便可寫作

$C=\{x \mid x=n^2$，n 爲整數且 $1\leqq n\leqq 5\}$

爲了更淸楚這兩種集的表示方法，下面的表列出了一些例子作爲比較。

表列式	構造式
$\{2,6,12,20,30,42\}$	$\{x \mid x=n(n+1)$, n 爲整數且 $1\leqq n<7\}$
$\{2,3,5,7,11,13\}$	$\{x \mid x$ 爲質數且 $x\leqq 13\}$
$\{8,-2,75\}$	$\{x \mid (x-8)(x+2)(x-75)=0\}$
$\{0,2,4,6,8\cdots\}$	$\{x \mid x$ 爲偶數$\}$
$\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$	$\{(x,y) \mid x$ 爲整數,且 $1\leqq x\leqq 4$, $y=x+1\}$
$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$	$\{(x,y) \mid x,y$ 皆爲正整數且 $x+y=6\}$
{李政道，楊振寧}	$\{x \mid x$ 爲在1950年代獲得諾貝爾物理學獎的中國人$\}$
{月球}	$\{x \mid x$ 是地球的衛星$\}$

一個集的構造式並不是唯一的。這由於一個集的元可以往往用多種不同的定義來確定。例如 $\{1,2,3,4\}$ 的元可定義爲不大於 4 的自然數，亦可定義爲小於 6 而能整除12的數。集 $\{2,3\}$ 的元可以定義爲最小的兩個質數，亦可定義爲方程 $x^2-5x+6=0$ 的解。

一個集的元的數目稱爲該集的**基數**(Cardinal number)。如 $A=\{a,b,c,d\}$，則集A的基數是 4。並以符號 $n(A)$ 代表。顯然一集的基數是一個非負的整數。如果這個集的元數是有限的話，含有有限數目的元的集稱爲**有限集** (Finite set)，反之，含有無限大數目的元的集稱爲**無限集** (Infinite set)。像上表所列的集除却第四個含有一切偶數的集外，其餘的都是有限集。

當然，在A是一個無限集時，$n(A)$ 是不存在的。如自然數集，奇數集，3 的倍數集，質數集等等都是無限集，我們都不能用一個數字來寫出它們各自的基數。

當 $n(A)=0$時，集A便是不含有元，當一個集不含有元時，它就稱爲**空集** (Empty set)， 並且以符號 $\varnothing$ 爲代表。例如若以集 A 代表所有在1975年內在月球出生的人的集，則這一個集不含有任何元，故它便是一個空集。

我們可以很容易作出空集的例子的，像下面的集都是空集。

{ x ¦ $x^2+1=0$，x 爲實數 }

{ x ¦ x 是每天吃一噸食物的人 }

{ x ¦ x 是小於 2 的質數 }

{ x ¦ x 是 7 和 8 的公因子而且 $x \neq 1$ }

{ x ¦ x 是一隻小飛象 }

子集

考慮集　$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B = \{1,3,5,7\}$

$C = \{2,4,6,8\}$

$D = \{1\}$

容易看到集 A **包含**了集 B，亦包含了集 C 和集 D，因爲 B 的元 1,3,5,7 全部都在 A 裏找到，這樣 B 便稱爲 A 的**子集**（Subset）。用符號記出這一事實是

$$B \subset A$$

同樣這裏有　$C \subset A$，　$D \subset A$，　$D \subset B$。

集 B 作爲集 A 的子集的必要條件是：若在 B 中取一任意元 x，此元 x 必亦同時屬於集 A 的。如以符號 $\forall$ x 表示"任意每一 x"，則上述條件可表示爲：

B 爲 A 的子集條件：$\forall x \in B$　都有 $x \in A$。

考察 B 中的每一元　1,3,5,7　有

$1 \in B$，$1 \in A$，

$3 \in B$，$3 \in A$，

$5 \in B$，$5 \in A$，

$7 \in B$，$7 \in A$。

這樣就確知全部 B 的元皆在 A 中找到，因而 B 便是 A 的子集。

當 B 是 A 的子集時，A 便稱爲 B 的**母集**（Super set）。

一個集不是另一個集的子集時，亦可使用符號 $\not\subset$ 表明，如上面的 $D \not\subset C$，$B \not\subset C$ 等。

例：以 S 代表某校的全體學生的集，T 代表該校三年級學生的集，則 T 便是 S 的子集，S 便是 T 的母集。

要研究一個集可以包含多少個子集的問題，可以先舉個例來觀察。

集　$M = \{a, b, c\}$，則可依子集內含元的數目作出下列的子集。

(1) 不含有元的子集。

這一個集只有一個，它便是空集 $\varnothing$

(2) 含有一個元的子集有下列三個：

$\{a\},\{b\},\{c\}$

(3) 含有兩個元的子集有下列三個：

$\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}$

(4) 含有三個元的子集有下列一個：

$\{a,b,c\}$

故M全部子集數目一共是 $1+3+3+1=8$ 個。

現在用同樣的方法分別作出集$\varnothing$, $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,c,d\}$ 的全體子集如下：

集	子　　集	子集數
$\varnothing$	$\varnothing$	1
$\{a\}$	$\varnothing,\{a\}$	2
$\{a,b\}$	$\varnothing,\{a\},\{b\}\ \{a,b\}$	4
$\{a,b,c\}$	$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}$	8
$\{a,b,c,d\}$	$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$ $\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$ $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$ $\{a,b,c,d\}$	16

把集的基數與子集總數並列如下：

集的基數	子集總數	
0	1	(2^0)
1	2	(2^1)
2	4	(2^2)
3	8	(2^3)
4	16	(2^4)

不難看出 1,2,4,8,16, ··· 構成了一個數串 $2^0,2^1,2^2,2^3,2^4,\cdots$

由此而推論得一個含有 n 個元的集必有2^n個不同的子集。

一個集裏的元本身亦可能是一個集的，例如：

$$M=\Big\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\Big\}$$

M便是一個含有集$\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$作爲元的集。像這樣的集在日常生活所見的例子亦是很多的，如S是某五年制中學的學生全體的集，則S是：

S ={{中一年級學生}，{中二年級學生}，{中三年級學生}，{中四年級學生}，{中五年級學生}}

某班次的火車乘客集：

{{頭等乘客}，{二等乘客}，{三等乘客}}

把一個集的全部子集作爲元構成的集稱爲**勢集**（Power set）。例如集 A = {a,b,c} 它的勢集便是：

$$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

集 A 的勢集可用記號 P(A)表示。

同樣　集　B = {0,1} 則它的勢集是：

$$P(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

溫氏圖

集的構成和集的相互關係是可以用示意圖解來表示，這一種圖稱作**溫氏圖**（Venn diagram）。溫氏圖就是在平面上用一個封閉的曲線圍繞着集的元以表示一集，如集　A = {a，b，c，d}是

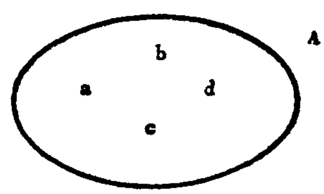

圖 1·1

集　B = {1,2,3,4,5}是

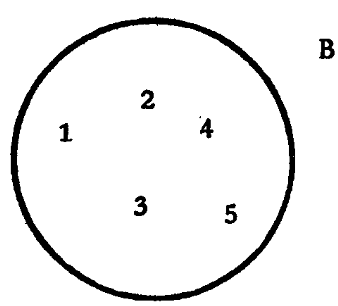

圖 1·2

這一條封閉曲線便把屬於與不屬於的元區分開來。

考慮　D = {a，b，c，d，e，f，g}

A = {a，b，c，d}

則

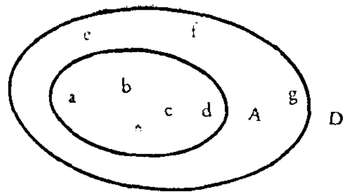

圖 1・3

這裏可見集A是給集D包含着，因為集A是集D的子集。同樣如圖

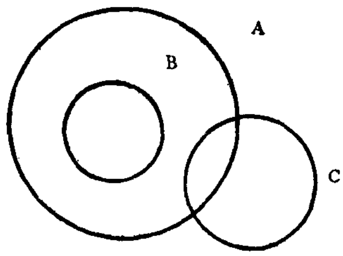

圖 1・4

表示出　B⊂A，　C⊄A。

又當兩集 A，B 互相包含時，A⊂B及B⊂A,則所作出的 A，B 溫氏圖必是兩者疊合，因為只有在兩者疊合的情況下才能有A在B的範圍內及B在A的範圍內。在這個時候，A和B便只能是相等。

因此　當A＝B，　則有　A⊂B，及B⊂A。

反之　當A⊂B，　及B⊂A時　則有　A＝B。

宇集

在某一些集的研究中，若所談及的集都是某一個固定集的子集，則這樣的一個固定的集便可取定為**宇集**（Universal set）。

譬如在一間學校中，每次談及的學生的集，都是該校的某些學生，則該校的全體學生所構成的集便可視為一個宇集，因為它的範圍已足夠包含由該校學生所構成的一切集在內。

在小學一年級裏學習算術所遇到的數字都是正整數，所以取正整數的全體來構成一個宇集，便足夠容納所學習的數字的集在內。

在A城內調查人口，由於調查的對象都是A城的居民，故在調查中取A城的全部居民為宇集便足夠。

在平面上研究點集，由於所研究的點集皆在此平面上，故以整個平面上的點的整體構成一個宇集，便足以包含在研究中的各點集在內。

當然，宇集並非唯一的，它只是一個方便於取用的集而已。例如在A城的人口調查中，如果取包含A城在內的一個省的人口全體，或甚至包含A城的一國的人口全體為宇

集亦是可以的，只是所取的範圍過大，則可能增加不必要的麻煩而已。

在溫氏圖中往往是用矩形來代表宇集的，如以 I 代表宇集，及 $I = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

又 $A = \{2,4,6,8\}$

$B = \{2,4,7,9\}$

則代表它們的溫氏圖是：

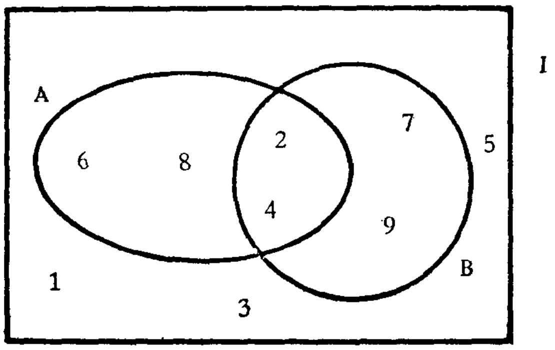

圖 1·5

取出這裏一切不在 A 集的元 1,3,5,7,9，並構成一集 $\{1,3,5,7,9\}$，則這一個集便稱爲 A 的**餘集** (Complement)，並且記爲 A'。

$$A' = \{ x \mid x \notin A \}$$

$$\therefore \quad A' = \{1,3,5,7,9\}$$

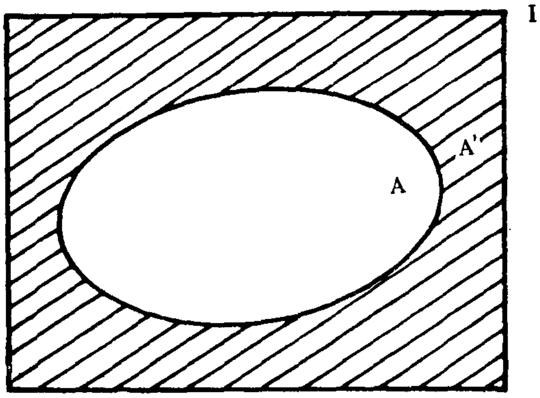

圖 1·6

容易看出 A 的餘集的餘集便是 A 集本身 $(A')' = A$

又空集的餘集必爲宇集 $\varnothing' = I$

同樣宇集的餘集又必是空集 $I' = \varnothing$

因宇集既是包含了全集的元在內的集，故除了全部的元之外便無其他元，因而它的餘集應是空集。

集的運算

設有兩集　$A = \{ a, b, c, d \}$

$B = \{ c, d, e, f \}$

把A，B兩集的元合取拼成一集則有$\{ a, b, c, d, c, d, e, f \}$。除去重複的元便得$\{ a, b, c, d, e, f \}$。像這樣由兩個集合併而成的集便稱爲**和集**（Union）。

A和B的和集記爲$A \cup B$。

A和B的和集包含了一切屬於A集的元，同時亦包含一切在B的元。故$A \cup B$的元必是屬於A或B的元。由此A，B和集的構造式便是

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{或} x \in B \}$$

取上面的A，B集爲例，$A \cup B$的溫氏圖是：

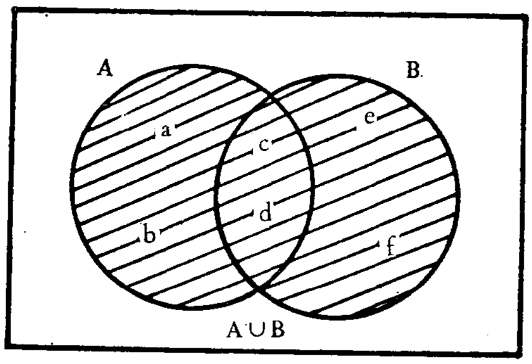

圖 1·7

現在又從A，B二集中只取出它們共有的元作成一集，這個集便稱爲A，B二集的**交集**（Intersection）。記爲$A \cap B$。A，B交集所含的元必是同時分屬A，B集的，故$A \cap B$的構造式是

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{及} x \in B \}$$

上例的A，B二集的交集是$\{ c, d \}$。因爲只有c，d是A，B二集相同的元。

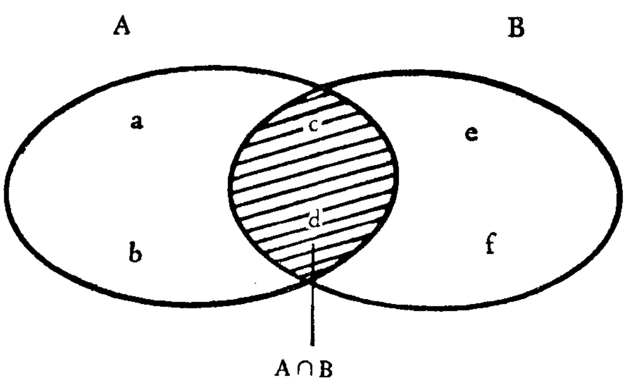

圖 1·8

例：設字集 $I = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$M = \{1,2,3,6\}$

$N = \{1,3,5,7,9\}$

則有 $M \cup N = \{1,2,3,5,6,7,9\}$

$M \cap N = \{1,3\}$

又 $M \cup I = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = I$

$M \cap I = \{1,2,3,6\} = M$

$N \cup \varnothing = \{1,3,5,7,9\} \cup \varnothing = \{1,3,5,7,9\} = N$

$N \cap \varnothing = \varnothing$

又設 $L = \{3,6,8,9\}$

$(L \cup M) \cup N = \{1,2,3,6,8,9\} \cup \{1,3,5,7,9\}$
$= \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$

$L \cup (M \cup N) = \{3,6,8,9\} \cup \{1,2,3,5,6,7,9\}$
$= \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$

$\therefore \ (L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$

又 $(L \cap M) \cap N = \{3,6\} \cap \{1,3,5,7,9\}$
$= \{3\}$

$L \cap (M \cap N) = \{3,6,8,9\} \cap \{1,3\}$
$= \{3\}$

$\therefore \ (L \cap M) \cap N = L \cap (M \cap N)$

由上面的例我們可察覺到和集與交集的運算具有以下的一些性質：

1. 可易性

對於兩個任意集 A，B 都有

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

兩集的和集與交集跟這兩集給定的次序是無關的，因而它們的次序先後可易。換言之，A，B 的和集等於 B，A 的和集，而 A，B 的交集亦等於 B，A 的交集。

2. 同一律(Identity law)

任一集 A 與包含 A 的字集 I 及空集 $\varnothing$，在和集及交集的運算下，具有以下的恒等結果。

$$\begin{cases} A \cup I = I \\ A \cap I = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup \varnothing = A \\ A \cap \varnothing = \varnothing \end{cases}$$

3. 結合律

在前一頁的例獲得的結果

$$\begin{cases} L\cup(M\cup N)=(L\cup M)\cup N \\ L\cap(M\cap N)=(L\cap M)\cap N \end{cases}$$

是對於任意三個集都是眞的，在和集的運算下，先求前二集的和與第三集的和或先求後二集的和再與第一集的和，結果仍是相等，在交集的運算下，情形也是一樣。

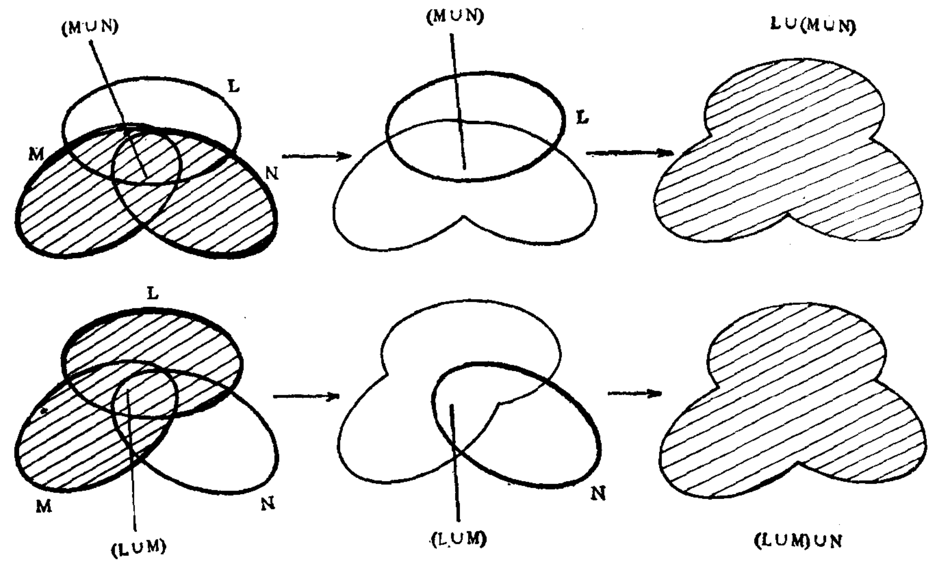

圖 1·9

由以上的溫氏圖可檢驗得和集的結合性。

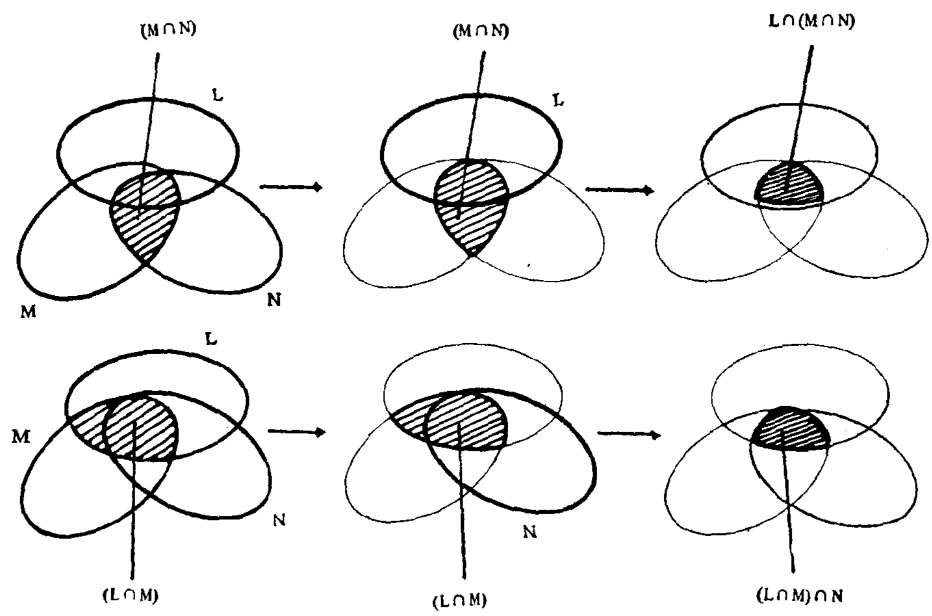

圖 1·10

由以上的圖亦可看出交集的結合性。

差集

設有兩集　$A = \{ a, b, c, d, e \}$

$B = \{ d, e, f, g \}$

現在取出那些屬於集A的元而又不屬於集B的元來構成一集。因：

$a \in A \qquad a \notin B$

$b \in A \qquad b \notin B$

$c \in A \qquad c \notin B$

$d \in A \qquad d \in B$

$e \in A \qquad e \in B$

這裏屬於A而又不屬於B的元有 a，b，c 三個，它們便構成一集 $\{ a, b, c \}$，這樣的一個集便稱爲集A與集B的**差集** (Difference)，並記爲 $A \setminus B$。

差集的温氏圖如下：

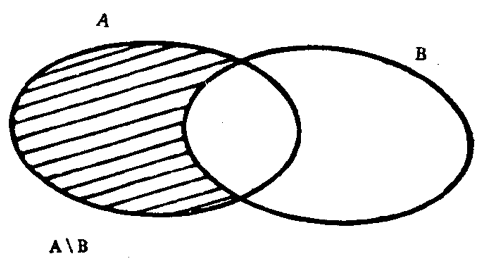

圖 1・11

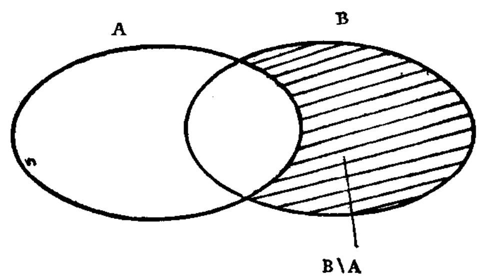

圖 1・12

倘若考慮那些在B的元而又不在A的元則有 f，g 二元。f，g 構成集 $\{ f, g \}$，這一集便是B和A的差集 $B \setminus A$。

$\therefore \quad A \setminus B = \{ a, b, c \}$

$B \setminus A = \{ f, g \}$

這兩個是完全不同的集。

如果 $A \neq B$，則A和B的差集是不同於B和A的差集的，如果 $A = B$，則 $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$。由此可知差集的運算是不可易的，正如兩個數字在求差的運算中亦不可易一樣。

根據差集的定義便有：

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ 及 } x \notin B \}$

$B \setminus A = \{ x \mid x \in B \text{ 及 } x \notin A \}$

把 $A \setminus B$ 與 $B \setminus A$ 合併起來構成一個它們的和集，稱爲 A, B 的 **對稱差集** (Symmetric difference)，並用符號 $A \triangle B$ 爲記。

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

A和B的對稱差集與B和A的對稱差集是沒有分別的。