全国高等林业院校教材

数理统计

（第3版）

贾乃光 编

中国林业出版社

图书在版编目(CIP)数据

数理统计/贾乃光编. —3 版. —北京:中国林业出版社,1999.6
ISBN 7-5038-2201-5

Ⅰ.数　Ⅱ.贾…　Ⅲ.数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 00487 号

中国林业出版社出版
(100009　北京西城区刘海胡同 7 号)
北京市卫顺印刷厂印刷　新华书店北京发行所发行
1999 年 5 月第 3 版　　1999 年 5 月第 1 次印刷
开本:787mm×1092mm1/16　印张:18
字数:431 千字　　印数:1～4000 册
定价:20.50 元

第2版 前 言

本书第1版由符伍儒教授主编，1980年10月出版，至今已有10年了。在这10年期间，许多院校的老师曾提出许多宝贵的意见。此外，本课程的教学大纲也在林业部高教处的组织领导下进行了多次修订。在此基础上，我们受林业部高教处的委托，对第1版进行修改补充。

我们可以设想，一位林学或水保系的本科毕业生在实际工作中遇到数理统计的问题时，他恐怕总会首先查阅他曾学过的教材。因为教材一般是他最熟悉、印象最深也是读得最仔细的书。他希望在教材中能找到解决他所遇到的问题的方法，或者进一步详查文献的线索。由于他所学的专业并非数理统计，所以他期望于数理统计教材的，不但有基本的原理和方法，还最好有进一步广泛的内容，和深入一步研究的途径。

然而，教材毕竟是针对课堂教学的讲义，受教学时数的限制，应以基本理论和方法为主，不能也不应该涉及得过广过深。

以上两方面是矛盾的，也是本书编者试图解决的重要问题。本书采用加注和加附录的方法加强内容的深度和广度，而这些注和附录无需在课堂讲授，属参考读物。比如，两总体均值的差异显著性检验和方差分析都要求总体是正态的，那么，细心的同学必然要问，对非正态总体如何解决这些问题呢?我们在附录中给出了解答，即使有些同学来不及细读附录，然而他知道，教材中有这方面的内容，一旦需要可以查阅。附录的内容不可能很详尽，仅仅是启发性地讲一部分，如还需要深入，则要参考另外的文献了。附录尽量做到简单易懂，希望起到过渡到参考文献的桥梁作用。

各章的注放在各章习题之后，因为注与正文关系密切，常常是一些较复杂的定理的证明，如果将这些证明放在正文中，占讲课学时过多，而这些证明的难度又是本科生可以接受的，所以作为注，供参考。有些定理的证明难度较大或占篇幅过大，则只在本文中指出参考文献，不再作注。至于附录，放在本书的最后，它们与正文的关系不像注那么密切，如复合分布等是为一部分学习优秀的同学扩大眼界的。

第1版的第一章很完整，可惜占用学时过多，故加以精简，并将一部分证明放在注里不在课堂讲授。

假设检验、方差分析和回归分析都采用从模型出发的方法，这在问题的提法上更简明。

如果学时数为80，建议只讲前6章；如果为100学时，可讲前7章；120学时，则可以8章都讲。

本版第一章由贾乃光、黄用廉编写，第二至七章由贾乃光编写，第八章仍用第1版的全部内容，未作变动。

由于编者水平所限，错误、疏漏、重点不当、叙述不妥之处一定不少，希望同行们和同学们批评指正。如能在内容的取舍上，深度、广度的安排上得到多数同行的赞同，编者将深感欣慰。

贾乃光

1991年9月于北京林业大学

第3版　序　言

由于受学时所限，数理统计第3版与前两版最主要的不同是去掉了第七章实验设计和第八章抽样技术。而且实验设计和抽样技术都有单独的教材出版。

教材的修订是无止境的，达到完善程度谈何容易。本版仍采用第2版的各章加注的方法，而且还扩展到每章有附录，书的最后还有总的附录，这些是为自学参考的，看了这些注和附录再回过来看必修的那一部分会有更深的理解，也才会感到"学而后知不足！"比如回归分析模型中的前提假设是独立、正态、等方差，如果这些假设不完全满足该怎么办呢？又如果正规方程是病态的该如何呢？如果对此一句话都不提及，就好像不会出现这些问题似的，实际上并不如此；而叙述得太多，又成另一门课了（如近代回归分析），所以分寸是不容易掌握的。

完全随机区组设计与分层抽样是实验设计与抽样技术中最常用的又是最容易接受的部分，故列入附录，所占篇幅也很少。

教材建设是一项长期任务，我相信后来人会修改得更好，本书第3版愿做一铺路石子。书中错误和不当之处望各位读者批评指正。

感谢康惠宁教授对本书做了详尽的审阅并提出了许多中肯而又有实际成效的意见。感谢胡冬梅女士为本书制图。

贾乃光

1998年11月

目　　录

第一章　随机事件及其概率；随机变量及其分布

§1.1　随 机 事 件

一、定义

在一定条件下进行某项试验时，常可根据试验条件和已掌握的知识预先作出判断：有些现象在试验结果中必然出现；有些现象在试验结果中不可能出现；有些现象在试验结果中可能出现，也可能不出现。

我们把试验结果中准备观察其是否出现的现象称为事件。把试验结果中必然出现的现象称为必然事件；把试验结果中必定不会出现的现象称为不可能事件；把试验结果中可能出现，也可能不出现的现象称为随机事件。

例如，掷一只骰子时，出现“3”点，“奇数点”，“小于等于 2 的点”，“大于 10 的点”等都是随机事件。其中最后一个事件是不可能事件，不过我们把必然事件和不可能事件也算作随机事件反而更为方便。

又如，某城市在下一个月中的交通事故数、新生婴儿数、死亡人数、某病发病人数、某商品销售量、结婚数、离婚数等都是很难做出准确的、丝毫不差的预报的，也就是说，都具有程度不同的随机性，都是随机现象。在日常生活中和我们所接触的各个领域，随机现象几乎无处不在。从理论上讲，我们可以把这些随机现象看做随机试验，随机试验的结果就是随机事件，要研究某一随机现象，就要研究它所包含的随机事件及其发生的可能性的大小，即它的概率。

今后，我们常将随机事件简称为事件，以 U 代表必然事件；ϕ 代表不可能事件；$A,B,C,\cdots$ 等代表事件。

二、事件之间的关系及其运算

在事件之间的关系及运算中可借助于集合的概念及图示方法。如掷一只骰子，可能出现的所有事件为 1，2，3，4，5，6 共 6 个点，我们将这 6 个基本事件所组成的集合称之为全集或样本空间，以全集 U 表示必然事件，即 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，那么所有可能出现的随机事件都是 U 的子集，认为空集 ϕ 为不可能事件，故有如下关系及符号：

1. 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的样本点也都属于 B，称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

若 $A\subset B$，则如果 B 未发生，必然有 A 也未发生。

显然，对任何事件 A，有

$$\phi\subset A\subset U$$

2. 事件的相等

若 $A\subset B$ 且又有 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$。

3. 事件的并(和)

若事件 A,B 中至少有一个发生，即‘A 或 B’是一个事件，称为事件 A 与 B 的并或 A 与 B 的和，记为 $A+B$。

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$。

可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生的事件，记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

4. 事件的交(积)

两个事件 A,B 同时发生的事件，即‘A 且 B’被称为事件 A 与 B 的交或 A 与 B 的乘积，记为 $A\cdot B$。

5. 事件的差

若事件 A 发生而同时事件 B 未发生，这一事件被称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$。

6. 事件的补(逆)

事件 A 未发生也是一个事件，这一事件被称为 A 的补或 A 的逆，记为 $\overline{A}$。显然，$\overline{A}=U-A$。

上述事件的关系用图 1.1 表示。

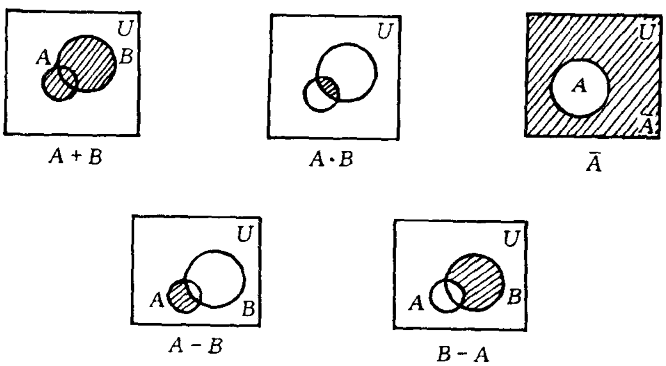


图 1.1

利用图示，不难看出一些有趣的关系，如：

$A+A=A$　　$(A-B)+B\neq A$

$A\cdot A=A$　　$A\cdot\overline{A}=\phi$

$A+\overline{A}=U$

三、事件的互斥及互斥事件的完备群

(1)若 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B 是互斥的。于是显然有

$$A,B\text{ 互斥}\Longleftrightarrow A\cdot B=\phi$$

(2)若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互斥，且

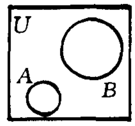
$$A_1+A_2+\cdots+A_m=U$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为互斥事件的完备群。

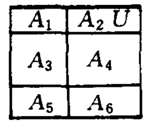
显然，A 与 $\overline{A}$ 构成了互斥事件的完备群（图 1.2）。

我们常把互斥也称为互不相容。

（3）关于交换律、结合律、分配律及摩尔律



$A \cdot B = \phi$



$A_1, A_2, \cdots, A_6$ 为互斥事件的完备群（以掷一只骰子的事件为例）

图 1.2

由以上图示不难理解以下运算法则

①交换律

$$A+B=B+A;\ A \cdot B=B \cdot A$$

$$(\text{但 } A-B \neq B-A)$$

②结合律

$$(A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C)$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

③分配律

$$(A+B) \cdot C=A \cdot C+B \cdot C$$

$$C \cdot (A+B)=C \cdot A+C \cdot B$$

④摩尔律

$$\overline{(A+B)}=\overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

以上关于摩尔律我们可以用以下的例说明：设 A 为某一班会英语的同学；B 为同一个班中会日语的同学，则 $A+B$ 表示在英语及日语中至少会一门外语的同学；而 $\overline{A+B}$ 则表示并非至少会一门的，即一门外语也不会的。$\overline{A}$ 表示不会英语的；$\overline{B}$ 表示不会日语的；那么，$\overline{A} \cdot \overline{B}$ 表示既不会英语又不会日语的，亦即两门中一门都不会的，故 $\overline{A+B}=\overline{A} \cdot \overline{B}$。类似可推出另一等式。

§ 1.2　概　　率

一个事件的概率即此事件发生的客观上的可能性的大小。于是出现了两个问题。一是如何从数量上来表示可能性的大小；二是这个反映可能性大小的数值我们能否精确地知道，还是只能近似地知道。

一、事件出现的频率

设同一试验被重复地做了 n 次，其中事件 A 出现了 m 次（即 $n-m$ 次事件，A 未出现），则称 m/n 为事件 A 在此 n 次试验中出现的频率。可记为

$$\text{频率}(A) = m/n \tag{1.2.1}$$

表 1.1

试验者	抛掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 m/n
德·摩尔根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

如果另一个人重新进行另外的（同样条件的）n 次试验，则事件 A 的频率可能有很大改变。然而，经验告诉我们，当 n 充分

大时,频率则趋于稳定。历史上有以下掷钱币的记录,试验者都是著名的统计学家。从表 1.1 可看出,n 愈大,频率愈趋于稳定。可以设想它应该有一个稳定中心,如表 1.1 的掷钱币试验,出现正面这一事件的频率稳定中心应为 0.5(或 0.5 附近的一个数),而我们就把频率的稳定中心(在理论上它应该存在)定义为事件的概率。

二、概率的定义

定义　当同一试验重复地进行 n 次时,若某事件 A 的频率随着 n 的增大而愈趋于稳定地在某一常数 p 的附近摆动时,则称常数 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$。

以上所说的,概率为频率的稳定值。这个稳定值是理论上承认它存在的,它与每一次的试验结果无关,与 n 无关,而与稳定值有关的是频率,而频率只是概率的近似值。一般说来,试验次数 n 愈大,这个近似值就愈好一些。

由概率的定义可以看出,这个定义的基础是试验是可以多次重复的,否则就没有概率可言。

概率的这个定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的,但并不能用这个定义来计算 $P(A)$。然而,对古典概型,$P(A)$是可以精确计算的。

三、古典概型

定义　若试验结果是由有限个基本事件组成,可设有 n 个基本事件 $E_1,E_2,\cdots,E_n$,而且有 $P(E_1)=P(E_2)=\cdots=P(E_n)$。则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{有利于 } A \text{ 的基本事件的个数}}{n} \tag{1.2.2}$$

这里的 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 构成一个等概的互斥事件的完备群。

例如,掷一个骰子时,出现 1,2,…,6 点的事件就是 6 个基本事件。当骰子为一个正六面体,制造骰子的材质均匀,掷时又充分旋转时,从对称性可以认为这 6 个基本事件是等概的,故属古典概型。若 A 表示出现'奇数点'的事件,则有利于 A 的基本事件为出现'1','3'及'5'点,共 3 个,故 $P(A)=3/6=1/2$。

古典概型的优点是可以精确地计算出概率值。但如以上的例则需假设骰子材质均匀及旋转充分等条件,而这些条件在现实中仅能近似地成立,因而它也只是一个理想化的概型。

现实中的许多情形并非古典概型,如某地段在某时间段发生车祸的概率,它只能通过记录发生车祸的频率,在 n 充分大时,将此频率作为概率的近似值。

为了通过运算得出某些事件的概率,我们必须熟悉概率在运算中的一些性质。

四、概率的性质

(1)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$　　(1.2.3)

这里的 A 为任何一个事件。这是因为任何事件的频率 m/n 总满足 $0\leqslant m/n\leqslant 1$。

(2)$P(U)=1$　　(1.2.4)

这里的 U 是必然事件。因为必然事件在每次试验中都出现,故 $m=n$,$m/n=1$,这对任何 n 都成立,故 m/n 的稳定点也为 1。

(3)$P(\phi)=0$　　(1.2.5)

这里的 ϕ 为不可能事件。因为在 n 次试验中不可能事件出现的次数 $m=0$,故 $m/n=0$ 对

任何 n 都成立，其稳定点自然也为零。

(4) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$　　(1.2.6)

这里的 A,B 为两个任意事件。设在 n 次试验中 A 出现 m_1 次，B 出现 m_2 次，A,B 同时出现的有 m_3 次。那么，A、B 至少一个出现的事件可分解为①A 出现但 B 不出现；②B 出现但 A 不出现；③A、B 同时出现。这三者的次数分别为 m_1-m_3；m_2-m_3 及 m_3。故事件 $A+B$ 的频率为

$$\frac{m}{n}=\frac{(m_1-m_3)+(m_2-m_3)+m_3}{n}=\frac{m_1+m_2-m_3}{n}$$

$$=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{m_3}{n}$$

这等式对任何 n 都成立，故对频率的稳定点也成立，即(1.2.6)成立。

(5)若 A,B 互斥(即互不相容)，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1.2.7)$$

因为互斥即 $A\cdot B=\phi$，而 $P(\phi)=0$ 代入(1.2.6)即得(1.2.7)。(1.2.7)又称为可加性。

(6)若事件 $\overline{A}$ 为事件 A 的逆，即

$\overline{A}=U-A$　则有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (1.2.8)$$

【例 1.1】 袋内装有 5 个白球，3 个黑球。从中任取两个球(一次取两个)，求所取的两个球皆为白球的概率 $P(A)$；两个球皆为黑球的概率 $P(B)$；及两个球为一个白球、一个黑球的概率 $P(C)$。[illegible]

解：组成试验的基本事件的个数 $n=C_8^2$，设以上所求概率的三个事件分别为 A,B,C。

由于是任意的不作任何选择的抽取，故在 $n=C_8^2=8\cdot 7/2!=28$ 个基本事件中，它们出现的可能是一样的。那么，这是一个古典概型。有利于 A 的基本事件的个数为 C_5^2，即在 5 个白球中任取 2 个的个数。有利于 B 和 C 的基本事件的个数分别为 C_3^2 及 $C_5^1\cdot C_3^1$，于是

$P(A)=C_5^2/C_8^2$，$P(B)=C_3^2/C_8^2$，$P(C)=C_5^1\cdot C_3^1/C_8^2$　□

【例 1.2】 设某种产品有一等品、二等品及废品三种。一、二等品都属合格品，它们在产品中所占的比率分别为 0.54 及 0.31，求产品的合格率及废品率。

解：令 A 表示产品为合格品的事件，A_1,A_2 分别表示产品为一等品及二等品的事件。故有 $A=A_1+A_2$，且 A_1,A_2 为互不相容的，因为从产品中任抽一个，所抽中的产品不可能既是一等品又是二等品。

$\overline{A}$ 为抽中非合格品的事件，亦即抽中废品的事件。由(1.2.7)式可得

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=0.54+0.31=0.85$

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.85=0.15$

即产品的合格率为 85%，废品率为 15%。　□

五、条件概率、乘法法则及事件的独立性

有时，我们需要求的是在已知某一事件已经发生的条件下某些事件的概率。

例如，从一副扑克牌(设为 52 张)中任抽一张。设 A 为抽中 K 牌的事件，B 为抽中黑桃的事件。显然，这是典型的古典概型，$P(A)=1/52$，$P(B)=13/52$。但有时我们需要知道比如在已知抽中黑桃的条件下，求抽中 K 牌的概率，这个事件被称为 B 条件下的事件 A，记为 $A|B$。显

然,$P(A|B)=1/13=(1/52)/(13/52)=P(A\cdot B)/P(B)$。故有以下定义

定义 设$P(B)\neq 0$,则B已发生的条件下事件A的概率定义为

$$P(A|B)=P(A\cdot B)/P(B) \tag{1.2.9}$$

其中$A|B$表示B发生条件下的事件A。

由(1.2.9)显然有(也假设$P(A)\neq 0$)

$$P(A\cdot B)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A) \tag{1.2.10}$$

我们称(1.2.10)为概率的乘法性质,或乘法法则,而(1.2.6)及(1.2.7)为概率的加法性质,或加法法则。

定义1.4 若

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B) \tag{1.2.11}$$

则称A、B相互独立。

由(1.2.9)易知,若A,B相互独立,则有

$$P(A|B)=P(A),\ P(B|A)=P(B) \tag{1.2.12}$$

加法法则和乘法法则可以推广到3个事件中去,有公式

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$$
$$-P(BC)+P(ABC) \tag{1.2.13}$$
$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB) \tag{1.2.14}$$

以上两式的证明作为习题留给读者,并要求读者再推广,写出4个事件的两个相应的公式。

【例1.3】 今有甲、乙两城市,根据多年的气象观察统计记录,每年夏季甲市雨天的概率为0.3,乙市雨天的概率为0.2,两市同时雨天的概率为0.1。试求,甲市雨天的条件下乙市为雨天的概率;乙市雨天的条件下,甲市雨天的概率;以及甲、乙两市至少有一个是雨天的概率。

解:设A为夏季甲市雨天的事件,B为夏季乙市雨天的事件,由题意知,$P(A)=0.3$,$P(B)=0.2$,$P(AB)=0.1$,由(1.2.9)得

$$P(B|A)=P(AB)/P(A)=0.1/0.3\approx 0.33$$
$$P(A|B)=P(AB)/P(B)=0.1/0.2=0.50$$

再由(1.2.6)得

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=0.3+0.2-0.1=0.4$$

□

【例1.4】 植树100株,其中95株成活。从这100株中任意抽取一株,观察其是否成活,共抽取3次,每次抽取后不放回。试求,第三次才抽到成活的概率。

解:设A_i为第i次所抽林木为成活的事件。$i=1,2,3$。题意所求为

P(第一次抽得不成活的且第二次抽得不成活的且第三次抽得成活的)

$$=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3)$$ $= P(A_1)\,P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)\cdot P(A_3/\overline{A}_1\overline{A}_2)$

由(1.2.8)知$P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0.95=0.05$

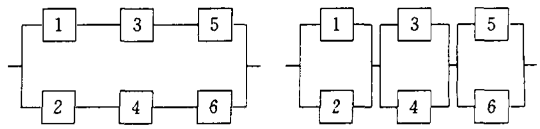
$$P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=4/99$$
$$P(A_3|\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2)=95/98$$

由(1.2.14)得

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdot P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}\cdot\frac{95}{98}\approx 0.002$$

□

【例 1.5】 设有 6 个元件，每个元件的可靠性(即处于正常工作状态的概率)为 0.9，且各元件是否正常工作是相互独立的。如果按下列方式装配成两个系统(如图所示)，试问，哪个系统的可靠性大？



系统1　　系统2

解：设 A_i 为第 i 个元件正常工作的事件，$i=1,2,\cdots,6$；B_1,B_2 分别表示系统 1 及系统 2 正常工作的事件。由题意知

$$P(A_i)=0.9\qquad(i=1,2,\cdots,6)$$

在系统 1 中，元件 1,3,5 串联，若此线路工作正常必须元件 1,3,5 都同时处于正常，即事件 $A_1A_3A_5$ 出现，或者说 A_1,A_3,A_5 同时出现。同理，系统 1 下面的线路正常必须元件 A_2,A_4,A_6 同时出现。故

$$B_1=A_1A_3A_5+A_2A_4A_6$$

因为并联线路相当于事件相加。由(1.2.6)得

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1A_3A_5+A_2A_4A_6)\\&=P(A_1A_3A_5)+P(A_2A_4A_6)-P(A_1A_3A_5A_2A_4A_6)\end{aligned}$$

再由(1.2.13)得

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1)\cdot P(A_3)\cdot P(A_5)+P(A_2)\cdot P(A_4)\cdot P(A_6)\\&\quad-P(A_1)\cdot P(A_3)\cdot P(A_5)\cdot P(A_2)\cdot P(A_4)\cdot P(A_6)\\&=(0.9)^3+(0.9)^3-(0.9)^6=0.9266\end{aligned}$$

同理知

$$\begin{aligned}P(B_2)&=P[(A_1+A_2)\cdot(A_3+A_4)\cdot(A_5+A_6)]\\&=P(A_1+A_2)\cdot P(A_3+A_4)\cdot P(A_5+A_6)\\&=[P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)][P(A_3)+P(A_4)\\&\quad-P(A_3A_4)][P(A_5)+P(A_6)-P(A_5A_6)]\\&=[0.9+0.9-(0.9)^2]^3\approx0.9703\end{aligned}$$

$P(B_2)>P(B_1)$，所以系统 2 的可靠性大于系统 1 的可靠性。　□

六、全概公式与逆概公式

1. 全概公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 为互斥事件的完备群

则　任何事件 A 的概率

$$P(A)=\sum_{i=1}^{K}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{K}P(B_i)P(A|B_i)\qquad(1.2.15)$$

证：由 $B_1,\cdots,B_k$ 为互斥事件的完备群，故有 $U=B_1+B_2+\cdots+B_k$，且它们是两两互斥的，那么 $AB_1\subset B_1,AB_2\subset B_2,\cdots,AB_k\subset B_k$ 就也是两两互斥的，于是由推广的(1.2.7)式有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cdot U)=P(A\cdot(B_1+\cdots+B_k))\\&=P(AB_1+AB_2+\cdots+AB_k)\\&=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_k)\end{aligned}$$

再应用(1.2.10)式即得(1.2.15)式。

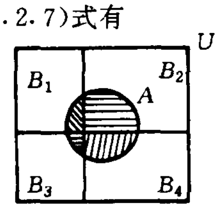


图 1.3

公式(1.2.15)式被称为全概公式。其直观含意如图 1.3 所示。图 1.3 为 $k=4$ 的情形，即全集 U 被分为 4 类，则任一事件 A 集合也被分为 4 类。