生物数学入门

D·梅钦 著

人民卫生出版社

生物数学入门

[英] David Machin

马 斌 荣 译

刘 曾 复 校

人 民 卫 生 出 版 社

BIOMATHEMATICS:
AN INTRODUCTION
David Machin
1976

生 物 数 学 入 门
D·梅 钦 著　马 斌 荣 译

人民卫生出版社出版
兰州新华印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

787×1092 毫米 32 开本　$6\frac{1}{4}$印张　136 千字
1979 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
印数：1—78,300
统一书号：14048·3691　定价：0.53 元

译者的话

本书适合于医学、生物学工作者使用。本书包括指数、对数、常用图象、二项式展开、微分、导数、积分、微分方程和矩阵代数。

学习本书后将在下列三方面带来方便：（1）在阅读国内外有关医学、生物学、遗传学的文献时，经常会碰到图象、经验公式、微积分等，本书能帮助读者较好地理解，并会作一些简单的推算；（2）为进一步学习医用统计学、生物统计学提供了足够的数学基础；（3）对读者进一步学习生物医学工程学提供了一些初步数学知识。

本书作者正确地指出，由于传统常常把医学、生物学与数学看成是互不相关的两门科学，因而造成医学、生物学工作者不了解数学，数学工作者也不善于将数学应用到医学和生物学领域中去。现代科学的发展日益打破了这种陈腐观念，生物医学工程学、电子计算机在医学上的应用，都使科学发展到一个崭新的阶段。本书引进了一些生物学、遗传学和医学的例子，使读者能很快进入到自己较熟悉的领域，并初步知道这些数学知识是如何应用到这些领域的。应该指出，作者所作的这种努力是很宝贵的，但仍然是初步的。

本书文字简洁，讲解浅近，书后附有习题和答案，可供自学参考。

由于水平有限，译文难免有不妥之处，请读者赐教！

马斌荣　于北京第二医学院

1978年9月

序　言

生物学是一门多样性的、范围很广的科学：由于它具有多种可供研究的材料，因而难怪多数人只对此科学的某个方面发生兴趣。这种多样性为探索和发现提供了巨大的可能性，但同时也使旨在提出统一理论而进行的工作更加困难。例如，遗传学家可采用随机交配来论述亲代和子代之间的世代相传的相似性——事实上也确有足够的随机交配的种群可供他们检验这种理论。但是，还有不少（如果不是更多）这样的种群，在它们当中，随机交配也没有达到近似的程度，那又怎么解释呢？尽管有多种困难，只要有可能，我们还是要探索基础理论。遗传学是生物学的一个分支，对它的这种探索工作，数学方法给予了巨大的帮助。在研究遗传学的初期，我们知道有 Hardy-Weinberg 法则，这不过是应用了一个初等数学的结果。遗传学的顾问们使用了数学和概率的术语，几乎没有人否认它所带来的好处。

多数生物学家都承认数学对他们常常有巨大帮助。只要参看 Cook（1971）、Maynard-Smith（1968）、Milthorpe 和 Moorby（1974）、Pielou（1970）、Williamson（1970）的著作和许多其他的生物学教科书，就可以看出事实确实如此。生物学家对数学家也有不少帮助，这一点也不应当忽视。近代科学史表明，由于从事研究工作并喜好钻研的生物学家的推动，统计学的理论和实践发展得多么迅速。

生物学的一些分支，尤其是生态学、生理学和遗传学，看来似乎比别的需要更多的数学知识。这一点人们可能有争

论，认为对于其他学科中的问题，有用的数学技术并没有如此的活力，或者认为那些问题本身就是较难于解决的，也更难于归入数学的构架。

根据作者的经验，多数生物学家对定量方法确实感兴趣，他们常常希望用数学模型来评价他们的工作，去描述他们的正在受到检验的理论并为进一步探索提供新的线索；或者用统计学的方法来确定他们的实验结果的可信程度。很多生物学家由于缺乏数学技术知识而气馁。在发展过程中的某个阶段，如果研究人员能用数学来表达他们的概念，那么从他们辛勤的研究结果中将能得到更多的东西。

不仅由于生物学家缺乏数学技术知识而应受到指责，同样也许数学家也应该受到指责，因为他们把数学概念搞得陈旧和乏味，他们的教义没有引起那些研究生物的人们对于数学的有用性和艺术性方面的兴趣和想像力。不幸的是，由于传统势力认为这两个课题是无联系的，甚至包括我们的一些学院在内，生物学家和数学家之间的可能合作仍是搞得不好。

本书试图引导生物学家到能够有助于他们工作的数学基本概念中去。考虑到简短，所以并不打算写得完整和包罗万象。我们的希望是任何人只要有一些起码的数学知识，将能理解（不是指粗略一看）本书的主要内容。本教程包括很多生物学的例子，因此无论现在和将来，读者能够使自己进入熟悉的领域，并且看到数学是怎样应用于这个领域的。对于生物学家来说，为了阅读更多的统计学教程，本书提供了足够的数学知识。为了生物学家能进一步超越本书的境界，给出了这一类教程和数学教程的参考书。应该强调指出，每一章末尾的练习题是本教程不可分割的一部分，其中有些题比

较难做，但是在进行下一章之前，应该做一做，虽然无须完全解出来。

……（下略）

戴维·梅钦

目　　录

第一章　指数，对数和指数函数

本章从讨论指数和对数开始，这两个课题常会引起一些困难。但是牢牢掌握这些课题是必要的，因为无论在本书或别的数学教程中，要很好理解随后章节的每一内容，都有赖于对它们的充分应用。从指数和对数出发，我们引导到讨论指数函数，最后介绍指数常数本身。

§1.1　指　　数

我们记

$$b\times b\times b\times b\times b\times b=b^6$$

换一种形式，引进适当的括号

$$\begin{aligned}b\times b\times b\times b\times b\times b&=(b\times b\times b\times b)\times(b\times b)\\&=b^4\times b^2=b^6\end{aligned}$$

则有

$$b^4\times b^2=b^{(4+2)}=b^6$$

由此可引出更一般的表达式

$$b^m\times b^n=b^{(m+n)} \tag{1.1}$$

这里 m、n 是正整数，称为指数。这里 $b^m\times b^n$ 意味着

$$\underbrace{b\times b\times\cdots\times b}_{m\text{个因子}} 与 \underbrace{b\times b\times\cdots\times b}_{n\text{个因子}} 的乘积。$$

如果把乘积写出来，它是 $\underbrace{b\times b\times\cdots\times b}_{(m+n)\text{个因子}}$。新指数$(m+n)$是指

数 m 和 n 之和。

我们假设

$$\frac{b\times b\times b\times b\times b\times b}{b\times b\times b\times b}$$

那么用 b 的 4 次方除分子和分母，可得

$$\frac{b\times b}{1}=\frac{b^2}{1}=b^2$$

或用指数可表达为

$$\frac{b^6}{b^4}=b^2=b^{(6-4)}=b^6\times b^{-4}$$

则有

$$b^{-4}=\frac{1}{b^4}$$

更一般的表达式为

$$\frac{b^m}{b^n}=b^{(m-n)}=b^m\times b^{-n} \qquad (1.2)$$

这里$\frac{b^m}{b^n}$表示 b^m 被 b^n 除，新指数 $(m-n)$ 是原来两指数 m 和 n 之差。方程 1.2 提示，b 取负指数时，等于它取同样正指数的倒数，即

$$b^{-n}=\frac{1}{b^n} \qquad (1.3)$$

在除法中，指数是相减的，所以我们用一个数的负指数幂来表示该数的正指数幂的倒数。因此方程 1.1 可推广到正负指数都适用。

[例 1.1]

化简 $b^{-3}\times b^2$ 并计算当 $b=2$ 时的值。

解：利用方程 1.1，这里 $m=-3$，$n=2$。
那么

$$b^{-3}\times b^{2}=b^{-1}$$

由方程 1.3 可知

$$b^{-1}=\frac{1}{b}$$

因此，$b=2$ 时，结果得

$$b^{-3}\times b^{2}=\frac{1}{2}$$

方程 1.2 的一个特别有趣的情况是 $m=n$ 时。那时，我们有

$$\frac{b^{m}}{b^{n}}=b^{m}\times b^{-n}=b^{m}\times b^{-m}=b^{m-m}=b^{0}$$

但是

$$\frac{b^{m}}{b^{n}}=\frac{b^{m}}{b^{m}}=1$$

因此

$$b^{0}=1 \tag{1.4}$$

以上我们把指数 m 作为整数来考虑，m 可以是正数、负数或零。事实上，指数 m 可推广到取任何实数的范围。假设，我们取 $m=n=\frac{1}{2}$，那末

$$b^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}=b^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=b^{1}=b$$

因此，$b^{\frac{1}{2}}$ 可以理解为其自乘得 b。如果我们设 $b=3$，那么 $3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}=3$。换句话说 $3^{\frac{1}{2}}$是$\sqrt{3}$，一般地说，$b^{\frac{1}{2}}$是 b 的平方根，即$\sqrt{b}$。为了集中我们的注意力于指数，通常记平方

根式为 $b^{\frac{1}{2}}$。

让我们考察 $b^{\frac{1}{3}}$，用方程 1.1 可得

$$b^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} = b^{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)} = b^{\frac{2}{3}}$$

另一方面

$$b^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} = b^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = b^{1} = b$$

综合以上结果，可得

$$b^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} = b^{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)} = b^{1} = b$$

于是，我们可把 $b^{\frac{1}{3}}$ 解释为 b 的立方根。

应该指出，指数能写成适当的小数形式，例如 $b^{\frac{1}{2}}$ 可写为 $b^{0.5}$。含有分数指数的一些数例如 $b^{\frac{1}{2}}$ 能如此直观地表示，但另外有一些不能如此简单地表示。

[例 1.2]

证明 27 的立方根是 3，并计算 $27^{\frac{2}{3}}$。

解：因为 $3\times3\times3=27$，所以 $3=(27)^{\frac{1}{3}}$，即 27 的立方根。这样

$$27^{\frac{2}{3}} = 27^{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}} = 3\times3 = 9$$

换另一种形式

$$27^{\frac{2}{3}} = 27^{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 27^{1} \times 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{27}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{27}{3} = 9$$

最后得

$$27^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}} = 27^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 27^{1} = 27$$

现在，我们记

$$b\times b\times b\times b\times b\times b=b^2\times b^2\times b^2=(b^2)^3$$

则

$$(b^2)^3=b^{(2\times3)}=b^6$$

一般地有

$$(b^p)^q=b^{(p\times q)}=b^{pq} \tag{1.5}$$

例如

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^4=b^{\left(\frac{1}{2}\times4\right)}=b^2$$

$$\left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^4=b^{\left(-\frac{1}{2}\times4\right)}=b^{-2}=\frac{1}{b^2}$$

及

$$\left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4}=b^{\left[-\frac{1}{2}\times(-4)\right]}=b^2$$

这里，我们将指数概念推广到任何实数范围，即指数取正负整数、分数、零都成立。

§1.2 对　　数

设 m 是 b 的指数（或称为乘方次数），且 b 的 m 次方的对应值为 x，即

$$b^m=x \tag{1.6}$$

则，我们称 m 是以 b 为底数 x 的对数，记为

$$m=\log_b x \tag{1.7}$$

例如，如果 $b=4$，$x=2$，则 $m=\frac{1}{2}$，这是因为 $4^{\frac{1}{2}}$ 是 4 的平方根，即 2 。因而，我们可记为 $m=\log_4 2=\frac{1}{2}$

假设对 b 进行 n 次乘方，则

$$b^n=y \tag{1.8}$$

即

$$n=\log_b y$$

设 x 和 y 之积为 z，那么

$$z=xy \tag{1.9}$$

利用方程 1.6 和 1.8 可得

$$z=b^m\times b^n$$

因而

$$z=b^{(m+n)}$$

这就象方程 1.6 一样，只是用 $m+n$ 代替了 m，用 z 代替了 x。于是根据方程 1.7，同理可得

$$(m+n)=\log_b z \tag{1.10}$$

由于 $m=\log_b x$，$n=\log_b y$ 及 $z=xy$，所以方程 1.10 表示为

$$\log_b(xy)=\log_b x+\log_b y \tag{1.11}$$

方程 1.11 表示两数之积的对数等于它们分别求对数之和。

[例 1.3]

计算 $z=xy$ 以 3 为底的对数，这里 $x=9$ 和 $y=27$。

解：记 $x=9=3^2$，$y=27=3^3$，所以对于底 $b=3$，用方程 1.7 和 1.8 可得

$$m=\log_b x=\log_3 9=2$$

$$n=\log_b y=\log_3 27=3$$

应用方程 1.10，对于 $z=9\times 27=243$，可得

$$\log_3 243=2+3=5$$

换一种形式 $243=3^5$，则 $\log_3 243=5$

如果在此例中选 $b=9$ 为底而不用 $b=3$，且由于 $9^1=9$ 和

$$27 = 9 \times 3 = 9^1 \times 9^{\frac{1}{2}} = 9^{(1+\frac{1}{2})} = 9^{\frac{3}{2}}$$

则

$$m = \log_9 9 = 1$$

$$n = \log_9 27 = \frac{3}{2}$$

因而

$$\log_9(243) = \log_9(9 \times 27) = \log_9 9 + \log_9 27$$
$$= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

换言之

$$243 = 9 \times 27 = 9^1 \times 9^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{5}{2}}$$

读者可用方程 1.5 来验证 $9^{\frac{5}{2}} = 3^5$。

在计算应用中，通常使用对数的底是 $b=10$。如果在例 1.3 中选用以 10 为底，那么 $m=0.9542$，$n=1.4314$，所以 $m+n=2.3856$，即 $10^{2.3856}=243$。

我们要指出一个重要的一般结论

$$\log_b b = 1 \tag{1.12}$$

（对于任何底 b，方程 1.7 中当 x 等于 b 时的特殊情况即上述方程。从方程 1.6 得 $b^m=b$。若 $m=1$，则 $\log_b b=1$。）

从我们已知的一些指数性质，可以推演出一些对数性质。

设 $b^p=u$ 和 $u^q=V$，那么在方程 1.5 中可知

$$V = u^q = (b^p)^q = b^{pq}$$

从方程 1.6 和 1.7 的对数定义可得

$$p = \log_b u$$

和

$$pq = \log_b V$$