

现代经济学

岭南系列



王则柯 著

拓扑学方法和经济学应用



点集拓扑学基础

代数拓扑学初步

微分拓扑学方法

博弈论应用

经济均衡问题

经济均衡算法

中国经济出版社

WANG ZHEKE JINGJIAOYUE

走近现代经济学

岭南系列 *

拓扑学方法和经济学应用

王则柯 著

中国经济出版社

1999

责任编辑:毛增余(电话:010-68319287)

封面设计:侯 茗

图书在版编目(CIP)数据

拓扑学方法和经济学应用/王则柯著. —北京:中国经济出版社,

1999年3月

(走近现代经济学·岭南系列)

ISBN 7-5017-4341-X

I. 拓… II. 王… III. 拓扑学-应用-经济学 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 17668 号

走近现代经济学

* 岭南系列 *

拓扑学方法和经济学应用

王则柯 著

中国经济出版社出版发行

(北京市百万庄北街3号)

邮政编码:100037

北京地矿印刷厂印刷 新华书店经销

开本:850×1168毫米 1/32 印张:12.25 318千字

1999年3月第1版 1999年3月第1次印刷

印数:3000

ISBN 7-5017-4341-X/F·3313

定价:24.00元

371

前 言

最近几十年,数学大学科里面的拓扑学方法在许多领域的应用,特别是在理论经济学方面的应用,发展很快,成果丰富,引人注目。

理论经济学论证了在理想条件下,市场经济是人类最好的制度选择。这是一般经济均衡理论在 20 世纪 50 和 60 年代的重大成果。事实上,经济均衡理论,可以说是数理经济学的核心论题。在这一理论框架内,使市场供求关系达到平衡的所谓均衡价格,归结为数学上的“不动点”。理论经济学方面的阿罗—德布鲁(Arrow-Debreu)模型,就是把理想条件下的市场经济表现为一个不动点问题,然后运用拓扑学的不动点定理,论证经济将达到均衡。这是理论经济学对市场经济信念的论证,是经济学家成功运用数学方法特别是拓扑学方法取得卓越成就的范例。这里说的是数学对经济学的推动。另一方面,拓扑学的不动点定理自本世纪初出现以来,很快就成为判断纯粹数学和应用数学许多问题解的存在性的有力工具。但是在数理经济学家参与以前,即使可以根据不动点定理确定问题有解,数学家往往也不知道怎样才能把肯定存在的解求出来。这方面的突破,最终由普林斯顿

大学数学博士出身的耶鲁大学经济学家斯卡夫(H. Scarf)教授做出。斯卡夫开创的不动点计算方法,是20世纪60年代后期以来数学发展的大事,是经济学家的研究推动和贡献于数学发展的范例。1981年至1983年我首次在美国普林斯顿大学访问进修的时候,数学系的教授们仍然为他们的弟子的这一成就津津乐道。

博弈论方面的情况同样值得一提。大家知道,纳什均衡是博弈论的最重要的概念,而纳什定理则论定,每个有限博弈都存在至少一个纳什均衡。这是博弈论的基石。纳什(J. Nash)证明他的定理的工具,也是拓扑学里面的不动点定理。至此我们提到过的四位经济学家,有三位获得了诺贝尔经济学奖,他们是阿罗、德布鲁和纳什。

在这样的背景之下,广大读者迫切需要一本适合他们阅读的著作,以便了解和掌握拓扑学的基础概念和基本方法,了解和掌握拓扑学的典型应用,特别是在经济学方面的应用。国内外现有的拓扑学著作不少,但都着眼于拓扑学各分支本身的逻辑发展,内容偏专偏深,偏于公理化系统和抽象的讨论,未能顾及非数学专业的要求。在我看来,20世纪最后的几十年,拓扑学在其他领域的应用之所以发展很快,并不是代数拓扑学和微分拓扑学的高深理论和最新成果的杰作,而主要是因为拓扑学本质上整体的讨论方式适应了其他领域的要求,是因为拓扑学的一些基本方法在其他领域开拓了应用。

数学家要澄清深刻的数学概念,需要借助刁怪的反

例。数学家把概念弄清楚了,把方法发展起来了,我们着眼于应用他们锤炼过的概念和方法,不一定要走完他们过去走过的所有路径。基于这样的认识,我们写《拓扑学方法和经济学应用》,就是要向读者,特别是向关心理论经济学发展的读者,介绍拓扑学的比较容易掌握和比较有应用价值的基础概念和基本方法。经济学讲究社会分工,这样处理也是一种社会角色的分工。该书第一部分是点集拓扑学基础,主要介绍拓扑空间,同胚映射,紧致性和连通性。因为应用问题本身常常是在欧氏空间和度量空间里面提出来的,所以我们完全不讲度量化问题。第二部分是代数拓扑学初步,在经济学研究中用得比较多的是同伦的概念和单纯剖分的做法。对于基本群的计算和同调群的不变性论证这些比较专门的数学内容,则着力于粗线条的然而准确的轮廓介绍。第三部分是微分拓扑学技巧,其中的萨德(Sard)定理,是说明“好”的情况发生的概率为1的数学命题,从而你不必因为个别“坏”的情况可能存在而束手无策。德布鲁在获奖演说中,就谈到斯梅尔教授向他介绍萨德定理,使他豁然开朗。在这一部分,我们一开始就把微分流形作为欧氏空间的一种子集提出来,除了微分流形及其切空间、光滑映射及其导映射等基本概念外,主要展开萨德定理、原像定理、一维流形分类定理和布劳威尔不动点定理。后面两个部分共六章,集中谈具体的经济学应用,特别是前面提到的经济学家在经济均衡理论和博弈论方面的工作。

比起《岭南系列》的其他著作,这本书是值得你花时间当作课本学的,如果你想了解经济学的发展、而不仅仅是停留在听说人家的贡献的话。

回想在我学拓扑学的时候,老师说拓扑学是橡皮膜上的几何,但是教授和学生都讲不出拓扑学有多少实际应用。记得妻子在恋爱的时候问我,拓扑学是怎么回事?我发挥想像力回答说,可以用来说明人的头发为什么会有“转”。这“转”,就是一些以牛为题材的木刻,总是要在牛身上突出地表现出来的那些牛毛的“旋”或“转”。后来,拓扑学在经济学理论上大显身手,证明了在理想状态下市场经济是人类最好的选择,我们学拓扑学的人,也跟着沾光。琢磨多年,妻子说,什么头顶上的转,还是你们老师说得好,拓扑学是橡皮膜上的几何。的确,点集拓扑学看重次序和比邻关系,不讲究距离和方向,所以是“橡皮膜上的几何”。点集拓扑学从集合表示开始,学习这种讲究次序比邻不讲究方向距离的橡皮膜上的几何。

经济学提供思考和分析经济现象的科学方法。至于数理经济学,其特点则是从一些经济学假设出发,建立经济机理的数学模型,并采用数学方法,推导出相应的结果,与现实经济现象对证。这理应是非常严密的一门科学。如果对证得好,模型就比较成功,就可以尝试用来预测未来可能的发展,尝试揭示一些未曾发现的规律。如果对证得不好,那就应该考虑是否对模型做必要的修正。

本书在我多年的讲稿的基础上写成。我自知水平有

限,学识陋浅,虽兢兢业业写作,仍难免疏漏乃至错误。不足之处,诚望读者和专家指正。我的电子信箱是 lnszrk@zsu.edu.cn,预先感谢各位的批评。陈向新参加了部分讨论,王晓刚和张良桥阅读过部分初稿,帮助消灭了若干笔误。在此向他们表示感谢。

最后,有必要就本书的编辑排版作简要的说明。在全书草稿完成以后,我们就使用一个后来感觉不太成熟的中文 TEX 软件开始输入,以为可以像本系列其他的书一样,以软盘送稿。几个月以后我们才知道,英语学界颇为流行的 TEX 系列排版软件的汉化版本,在中文世界的用户很少,特别是出版界对它并不接受。这时候,单看字数的话,书稿的键入似乎已经接近尾声。于是我们决心自己做到底,因为很难设想把这种事情交给非专业人员去做。事实上,我们实在也有一点儿不知天高地厚,总想自己就能完成一件事情。但是继续做下去,才醒悟这其中有一个对于我们来说非常严重的缺乏编辑专业训练的问题。

这个经济学所说的“路径依赖”过程,代价非常之大。毫无编辑方面的专业培训,我们竟然斗胆去做这样的工作,代价没法子不大。但是从另一个角度来说,我们又是越俎代庖,干预了责任编辑的工作。所以我们必须在这里声明,如果读者对于本书的编辑排版有任何意见,责任完全在作者方面。其中特别需要具体说明的一点是,我们采用了居中的数学式中都默认后面“已经”跟了必要的标点符号的编辑方案。这是一种新的处理,原意是避免

标点符号对数学式子的干扰。如果读者不习惯,质问为什么有些句子后面没有标点符号,请记住这是我们作为作者的尝试。如果读者在阅读默念的时候慢慢能够适应这些后面没有标点符号的居中的式子,我们将十分高兴。如果一直不能适应,我们会考虑这个情况,以便将来调整,但是希望无论如何不要错怪责任编辑。

本书的写作,得到华南师范大学左再思教授的很大帮助。左教授是我的学长,在培养拓扑学专门人才方面成绩卓著。这次,他仔细阅读了本书大部分初稿,提出几千字的意见和建议,十分中肯。学长的帮助,使本书增色不少。余下的谬误,只能由我自己负责。北京大学史树中教授的著述,也使我们得到许多教益。在本书付梓的时候,谨向两位学长表示由衷的感谢。还要感谢国家自然科学基金重大项目课题《金融数学、金融工程和金融管理》的资助和支持。

谨以本书献给我的导师、中国科学院院士江泽涵教授和姜伯驹教授,献给中国科学院院士吴文俊教授。如果我现在能够做一些有用的工作,离不开老师们当年和后来的教诲。

王则柯识于 1999 年初

目 录

前言	(1)
第一部分 点集拓扑学基础	(1)
第一章 拓扑空间与同胚映射	(2)
§ 1.1 集合与映射	(2)
§ 1.2 拓扑空间	(8)
§ 1.3 基本运算:内部与闭包	(18)
§ 1.4 可数公理与分离公理	(23)
§ 1.5 连续映射与同胚	(32)
第二章 紧致性和连通性	(44)
§ 2.1 紧致性	(44)
§ 2.2 单点紧致化	(49)
§ 2.3 连通性	(53)
§ 2.4 道路连通性	(61)
第二部分 代数拓扑学基础	(66)
第三章 同伦与基本群	(67)
§ 3.1 引言与代数预备	(67)

§ 3.2	映射的同伦和空间的伦型	(73)
§ 3.3	基本群	(80)
§ 3.4	基本群的性质	(87)
第四章	多面体的同调群	(96)
§ 4.1	单纯复形与多面体	(96)
§ 4.2	复形的同调群	(104)
§ 4.3	同调群的伦型不变性	(112)
§ 4.4	伪流形与 Brouwer 定理	(123)
第三部分	微分拓扑学技巧	(138)
第五章	微分流形与光滑映射	(139)
§ 5.1	欧氏空间的光滑映射	(139)
§ 5.2	微分流形与光滑映射	(148)
§ 5.3	光滑映射的正则值	(157)
§ 5.4	带边流形	(165)
第六章	Sard 定理及其应用	(173)
§ 6.1	零测集和 Sard 定理	(173)
§ 6.2	一维流形分类	(185)
§ 6.3	Brouwer 不动点定理	(192)
§ 6.4	Morse 函数	(199)
第四部分	单纯剖分及不动点定理	(210)
第七章	单纯剖分	(211)
§ 7.1	单纯剖分的一般概念	(211)
§ 7.2	R^n 的 K_1 剖分和 J_1 剖分	(216)

§ 7.3	标准单纯形	(220)
-------	-------------	-------

§ 7.4	$K_2(m)$ 剖分	(224)
-------	-------------------	-------

§ 7.5	渐细单纯剖分	(227)
-------	--------------	-------

第八章	不动点定理	(235)
------------	--------------------	--------------

§ 8.1	低维情形	(235)
-------	------------	-------

§ 8.2	S^n 上的不动点问题:Kuhn 人为始点算法	(240)
-------	---------------------------------	-------

§ 8.3	Kuhn 变维数算法.....	(248)
-------	-----------------	-------

§ 8.4	Brouwer 定理的构造性证明	(253)
-------	------------------------	-------

第九章	Kakutani 不动点定理及其应用	(256)
------------	---------------------------------	--------------

§ 9.1	集值映射及其半连续性	(256)
-------	------------------	-------

§ 9.2	Kakutani 不动点定理	(261)
-------	----------------------	-------

§ 9.3	Kakutani 不动点计算中出现的问题	(267)
-------	----------------------------	-------

§ 9.4	计算 Kakutani 不动点的预备知识	(274)
-------	----------------------------	-------

§ 9.5	代数讨论	(280)
-------	------------	-------

§ 9.6	普适算法	(287)
-------	------------	-------

第五部分	博弈论及经济均衡理论	(296)
-------------	-------------------------	--------------

第十章	博弈论与 Nash 定理	(297)
------------	---------------------------	--------------

§ 10.1	博弈论的基本知识	(297)
--------	----------------	-------

§ 10.2	Nash 定理的特例及其证明	(302)
--------	----------------------	-------

§ 10.3	Nash 定理的一般证明	(308)
--------	--------------------	-------

§ 10.4	确定 Nash 均衡的反应函数法	(311)
--------	------------------------	-------

§ 10.5	确定 Nash 均衡的线性规划解法	(317)
--------	-------------------------	-------

第十一章	效用函数的存在性	(324)
-------------	-----------------------	--------------

§ 11.1	偏好与效用	(324)
§ 11.2	关于空隙的讨论	(329)
§ 11.3	Debreu - Eilenberg - Rader 定理	(337)
§ 11.4	连续效用函数存在性的一个初等证明 ...	(340)
第十二章	经济均衡问题	(343)
§ 12.1	经济的初步描述	(343)
§ 12.2	私人所有制经济	(346)
§ 12.3	市场均衡	(348)
§ 12.4	私有制经济均衡的存在性	(352)
文 献		(358)
索 引		(362)

第一部分 点集拓扑学基础

这部分的内容，包括点集拓扑学的基本概念和若干最基本的结果。这些基本内容已经成为学习和应用近现代数学所不可缺少的基础知识。

第一章介绍拓扑空间的基本概念和性质、连续映射的基本概念和性质，第二章集中讨论紧致性和连通性。

我们完全不谈拓扑空间的度量化问题。这是与许多点集拓扑学著作不同的地方。

第一章 拓扑空间与同胚映射

§ 1.1 集合与映射

作为全书的预备，本节列出集合论的一些最基本的概念和事实。

假定读者已经熟悉**集合**、**子集**、集合的**并**和集合的**交**等概念。集合常用大写的英文字母表示，集合中的元素常用小写的英文字母表示。 a 是集合 A 中的元素，记作 $a \in A$ 。这时，也说元素 a 属于集合 A 。在本书中，集合中的元素又常称为集合中的点。这样， $a \in A$ 又可以读成：点 a 属于集合 A 。点 a 不属于集合 A ，则记作 $a \notin A$ 。

设 A ， B 都是点的集合。当 $a \in B$ 则必有 $a \in A$ 时，即集合 B 的元素都是集合 A 的元素时，称集合 B 是集合 A 的子集，记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$ 。这时也说集合 A 包含集合 B ，或者集合 B 包含于集合 A 。当 $A \supset B$ 同时 $B \supset A$ 时，说集合 A 和集合 B 相等，记作 $A = B$ 。因为 $B = A$ 是 $B \subset A$ 的一个特款，所以当 $B \subset A$ 但是 $B \neq A$ 时，特别称 B 为 A 的**真子集**。

集合也可以看成是由一个更大的集合中的符合一定条件的点或元素组成的。这时，我们采用

$$A = \{x \in S : p(x)\}$$

的表示法，表示 A 由(更大的集合) S 中所有使得命题 $p(x)$ 成立的点 x 组成。当这个更大的集合 S 是不言而喻的时候，我们也写

$$A = \{x : p(x)\}$$

在本书中，整数集、有理数集、实数集和复数集将分别记作 Z ， Q ， R ， C 。非负整数集、非负有理数集、非负实数集将分别记作 Z_+ ， Q_+ ， R_+ 。按照上述表示法，就是：

$$Z = \{x: x \text{ 是整数}\}$$

$$Q = \{x: x \text{ 是有理数}\}$$

$$R = \{x: x \text{ 是实数}\}$$

$$C = \{x: x \text{ 是复数}\}$$

而

$$Z_+ = \{x \in Z: x \geq 0\}$$

$$Q_+ = \{x \in Q: x \geq 0\}$$

$$R_+ = \{x \in R: x \geq 0\}$$

空集将用符号 $\emptyset$ 表示。这样，我们可以写

$$\emptyset = \{x: x \neq x\}$$

或者

$$\emptyset = \{x: x \in A \text{ 同时 } x \notin A\}$$

等等。

我们规定，空集是唯一的；空集是一切集合的子集。但为方便计，规定空集不算作任何集合的真子集。注意，空集具有一切所述的性质，这是空集不包含任何元素的事实的逻辑结果。

集合 A 与集合 B 的并集记作 $A \cup B$ ，集合 A 与集合 B 的交集记作 $A \cap B$ 。这样，我们有

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 同时 } x \in B\}$$

当 $A \cap B = \emptyset$ 时，我们说 A 与 B 不相交。

设 A 和 B 是作为某同一个更大的集合的子集的两个集合。称由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合为 A 对 B 的差集，

记作 $A \setminus B$ 。就是：

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

特别，当 $B \subset A$ 时，称 $A \setminus B$ 为集合 B 关于集合 A 的**余集**。在集合 A 是不言而喻的时候， $A \setminus B$ 亦可简称为集合 B 的余集。

注意，本书不用 $A - B$ 表示 A 对 B 的差集。这个符号将另有含义。

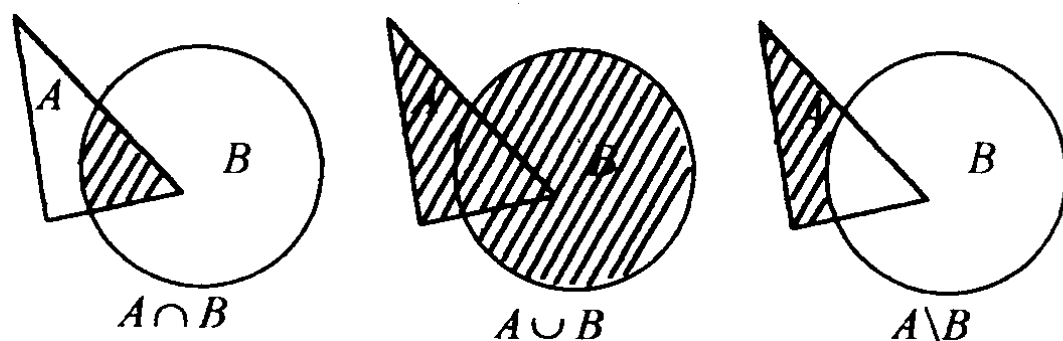


图 1.1

现在，我们将集合的并和集合的交的概念和运算，作下述推广。

定义 1.1.1 $\mathcal{A} = \{A_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 是以 Λ 为指标集的一族集合。称由各 A_λ , $\lambda \in \Lambda$, 中的所有元素所组成的集合为 $\mathcal{A}$ 中集合的**并集**，记作 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 。称由同时属于各 A_λ , $\lambda \in \Lambda$, 的元素所组成的集合为 $\mathcal{A}$ 中集合的**交集**，记作 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 。

我们有下列表示：

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x: \text{存在 } \lambda \in \Lambda \text{ 使得 } x \in A_\lambda\}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x: \text{对于任何 } \lambda \in \Lambda \text{ 都有 } x \in A_\lambda\}$$

当 Λ 是只有两个元素的指标集时， $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 和 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 与先前叙述的两个集合的并集和交集的定义一致。