

● 高一起航 ● 高二扬帆 ● 高三冲刺

发散思维

高一起航

高考目标起航训练

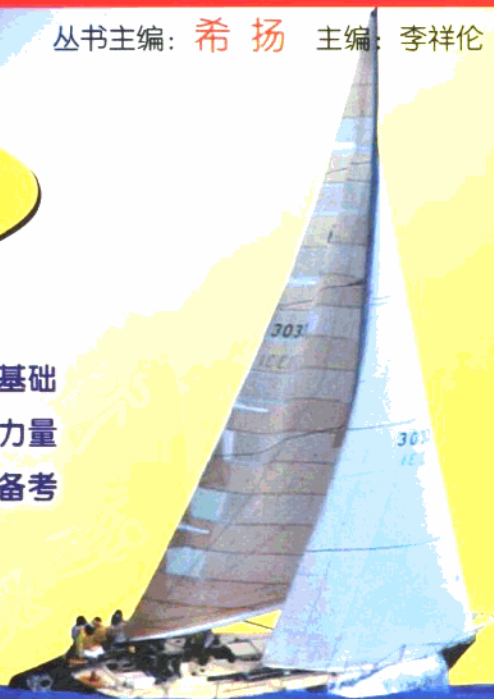
丛书主编：希 扬 主编：李祥伦

立体几何

(必修本)

起航 ● 求实求精 夯实基础
扬帆 ● 精选精练 凝聚力量
冲刺 ● 模拟冲刺 强势备考

中央民族大学出版社
世界图书出版公司



《高一起航》

编委会

丛书策划 张晶义

丛书主编 希 扬

丛书副主编 源 流

编委 胡祖明 江家发 宛炳生

任 远 李祥伦 陈其异

胡开文 王代益 吴树烈

《高一起航》各分册主编：

化 学：江家发 物 理：胡开文

政 治：吴树烈 英 语：胡祖明

生 物：王代益 立体几何：李祥伦

代 数：李祥伦 数 学(试验修订本)：郭之尔

语 文：陈其异 化 学(试验修订本)：江家发

历 史：郭之林 物 理(试验修订本)：宛炳生

LNB 205/55

乘风破浪会有时 直挂云帆济沧海

——《高一起航》序

千里之行，始于足下。

上大学，上中华名校，读自己喜爱的专业，是每一个中学生的理想，要实现这一理想，高中是重要阶段，高一是这一阶段中更为重要的一年。这套《高一起航》就是专门为高一学生编写的教学辅导书。本书有以下特点：

●**新观念**：它打破常规，将高考中的常见题与高一各科知识的练习联系起来，使高一学生把平时的学习瞄准高考，高标准，严要求。同时又用高考的高标准来指导、检验平时的学习与训练。

●**新方法**：本书采用发散思维的方法进行解题训练。发散思维又称“求异思维”，它具有思维的多向性、变通性、流畅性、独特性等特点。在解题时，它注重多思路、多方式，或横向拓展，或纵向延伸，或逆向深化，或迁移辐射。它能活跃思维，打开思路，激发灵感，唤醒无穷智慧，提高素质能力，达到触类旁通、举一反三之效。

●**新体系**：本书的体例与栏目新颖、实用。如：“夯实三基”、“基础性发散思维训练”、“能力性发散思维训练”、“提高性发散思维训练”等，充分体现出加强基础知识训练与运用能力的培养。“点睛示意”，点拨重点与方法；“承袭导向”，提示知识之间的联系，便于融会贯通；“拓展思路”，重在广开思路，培养悟性；“方法凸现”，重在点拨方法，加强解题方法的训练。



最后，本书还有一个不可忽视的作用，就是**调整和训练应试心态**。

在现实中，我们常常见到一些平时学习很好的学生，在高考的考场上却发挥失常，造成终身遗憾。实践证明，一个清醒的头脑比一个聪明的脑袋更重要。冷静的头脑、平静的心态，在应试中举足轻重，决不可小觑。针对这一特点，本书把平时的训练与高考结合起来，使学生的应试心态得到很好的训练和调整，在高考时，就会把高考当作一次几百万人参加的期末考试。这样，应试时就会有动力而无压力，精神集中而不紧张，答题迅速而不慌张，再加上平时的充分准备，何愁不得高分，又岂能与名校无缘！

高一起航：

“乘风破浪会有时，直挂云帆济沧海”！

希 扬

2001年4月

前言

发散思维即求异思维，它从一点出发沿着多方向达到思维目标。用图表示，它就是从一点出发向知识网络空间发出的一束射线，使之与两个或多个知识点之间形成联系。它包含横向思维、逆向思维及多向思维。发散思维具有多向性、变通性、流畅性、独特性的特点，即思考问题时注重多思路、多方案，解决问题时注重多途径、多方式。它对同一个问题，从不同的方向、不同的侧面、不同的层次，横向拓展，逆向深入，采用探索、转化、变换、迁移、构造、变形、组合、分解等手法，开启学生心扉，激发学生潜能，提高学生素质，这对造就创造性人才至关重要。

本书紧扣教学大纲，与现行教材同步，紧密联系学生的学习实际，全面深入地反映 2000 年以来高考试题及各省、市高考试题或模拟试题，力求贴近整个教学环节，培养学生的创造思维能力，增强学生思维的灵活性、拓展性，以提高学生对实际问题模型化及应用数学模型解释生活现象、解决实际问题的能力。

本书每章或单元均有以下六个部分组成：

学习目标 点睛示意 使学生运用目标管理的方法，点睛示意，掌握学习重点和方向，做到有的放矢，在学习每章（或每单元）时可达到预期的学习效果。

夯实三基 承袭导向 高度概括每章（或每单元）的内在知识体系，精辟分析高考所需要考查的知识点，并以画龙点睛之笔突出重点、难点，及其解决问题的关键，以此作为展开发散思维的主线，达到夯实三基，承袭导向之目的。

拓展思维 方法凸现 它是本书的主体结构，我们可从应考的知识点、重点、难点出发，分析本章（或本单元）的知识内容、

相互关系，并运用发散思维方法揭示思维规律，突出解题规律和方法，以达到融会贯通的目的。

高考名题 发散思维 通过精选高考名题和典型题，再经过对重点问题的多角度、多侧面、多层次的发散思维，透析、培养学生概念辨析、综合概括、转化变换、思维迁移、逆向运用、实验设计、探索开放、书写表达、多解多变的全方位能力。

基础性发散思维训练 能力性发散思维训练 可以帮助学生借此检验课堂学习效果；同时家长可借此考查学生对课本各章节知识的掌握程度。每章后附有参考答案。

另外，对解题方法及其注意事项和在解题时容易犯的错误，在题解结束后，增加了“点评”及“警示误区”，并指出其错误的缘由。

本书主要用到如下发散思维：

题型发散 是将典型问题，变换其题型的一种发散思维。

解法发散 是通过一题多法、多题一法进行变通训练的发散思维。

纵横发散 是通过两个或多个发散点间的联系以及发散点与其他知识点间的联系，借助例题形成发散思维。

转化发散 是通过保持原命题的实质而变换其形式的一种发散思维。

迁移发散 是利用数学公式、图形在不同学科中的不同含义与等价形式，把一个学科中的公式、定理、原则和方法，巧妙地迁移到另一个学科中，达到化难为易的目的。

构造发散 是通过逻辑思维和丰富的联想，恰当地构造出某些元素，使原有元素变成新元素，或新元素之间的一种新的组合形式。

逆向发散 是由目标至条件的定向思考的一种发散思维。

分类发散 对题中含有的参数，须进行分类讨论的一种发散思维。

综合发散 是通过教材各章发散点之间的联系，一个学科与



其他学科之间的联系综合思考的一种发散思维。

总之，本书由浅入深，精析多练，学练结合，阶梯训练，逐步提高，并揭示高考的测试规律，使学生的复习与应试实际更贴近，从而提高学生灵活运用知识，增强迁移应变能力和创造性思维能力。

由于本书编写时间紧迫和编者水平所限，不妥之处，祈望读者不吝赐教。

编者

2001年2月

目 录

第一章 直线和平面	1
学习目标 点睛示意.....	1
夯实三基 承袭导向.....	1
拓展思维 方法凸现	17
高考名题 发散思维	19
(一) 平面、空间两直线问题	19
(二) 空间直线与平面、空间两平面问题	54
基础性发散思维训练.....	104
能力性发散思维训练.....	114
参考答案.....	120
第二章 多面体和旋转体	146
学习目标 点睛示意.....	146
夯实三基 承袭导向.....	147
拓展思维 方法凸现.....	155
高考名题 发散思维.....	156
(一) 多面体问题.....	156
(二) 旋转体问题.....	196
基础性发散思维训练.....	233
能力性发散思维训练.....	244
参考答案.....	256



第一章 直线和平面

学习目标 点睛示意

- 一、掌握平面的概念及平面的性质。
- 二、掌握空间两直线的位置关系与异面直线的定义及异面直线所成角的定义。
- 三、熟练掌握线面平行和垂直关系的判定定理和性质定理。
- 四、熟练掌握三垂线定理及逆定理。
- 五、深刻理解两平面平行、垂直及二面角，二面角的平面角的概念。
- 六、准确掌握面面平行，面面垂直的判定定理和性质定理。
- 七、能够画出空间两条直线，两个平面、直线和平面的各种位置关系的图形，能根据图形想像它们的位置关系。

夯实三基 承袭导向

一、平面

1. 平面的概念

“平面”是一个只描述而不定义的最基本的原始概念，对这一概念应理解三点：

(1)“平面”是平的;

(2)“平面”无厚度;

(3)“平面”可以向四面八方无限延伸(与一条直线可以向两端无限延伸一样),因此,平面是无边界的.

2. 平面的表示

平面通常用一个平行四边形来表示,对水平位置的平面,一般是画一个锐角为 45° 、横边为邻边 2 倍的平行四边形来表示,这个平行四边形是表示它所在的整个平面,如图 1-1(a). 在画铅垂平面时,要有一组对边为铅垂线,如图 1-1(b). 画两相交平面时,一定要画出它们的交线,如图 1-1(c)、(d). 此时应注意,当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮住部分的线段画成虚线或不画,以加强立体感.

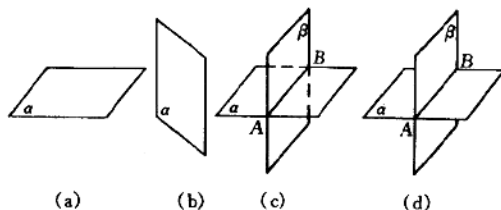


图 1-1

3. 平面的基本性质

(1)判定直线在平面内的依据:

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

(2)判定两平面有交线及交线位置的依据:

公理 2 如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

在确定平面截多面体所得截面形状时,常常利用这个公理.

(3)确定平面的条件:

公理 3 不共线的三点确定一个平面.

推论 1 直线和这条直线外一点确定一个平面。

推论 2 两条相交直线确定一个平面。

推论 3 两条平行直线确定一个平面。

(4) 确定两直线平行的条件

公理 4 (三线平行公理) 平行于同一条直线的两条直线互相平行。

二、直线与直线(简称线线)、直线与平面(简称线面)、平面与平面(简称面面)的位置关系

1. 位置关系

(1) 线线:

共面直线 $\begin{cases} \text{相交直线——有且只有一个公共点;} \\ \text{平行直线——无公共点。} \end{cases}$

异面直线

(2) 线面:

直线在平面内

直线在平面外 $\begin{cases} \text{直线和平面相交} \\ \text{直线和平面平行——无公共点。} \end{cases}$

(3) 面面:

两平面平行——没有公共点的两个平面互相平行;

两平面相交——有一条公共直线。

2. 两条直线平行的判定法

(1) 在同一平面内, 没有公共点。

(2) 平行于同一条直线的两条直线互相平行。

(3) 如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的平面和这个平面相交, 那么这条直线就和交线平行。

(4) 如果两条直线同垂直于一个平面, 那么这两条直线平行。

(5) 如果两个平行平面同时和第三个平面相交, 那么它们的交线平行。

(6) 三个平面两两相交于三条直线, 如果其中两条平行, 那么

第三条也和它们平行.

3. 两条直线垂直的判定法

(1) 一条直线垂直于一个平面, 则必和平面内的任何一条直线垂直.

(2) 如果一条直线和两条平行直线中的一条垂直, 那么也和另一条垂直.

(3) 如果一条直线平行于一个平面, 那么这个平面的任何垂线都和这条直线垂直.

(4) 三垂线定理: 在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线的射影垂直, 那么它也和这条斜线垂直.

(5) 三垂线定理的逆定理: 在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线垂直, 那么它也和这条斜线的射影垂直.

4. 直线和平面平行的判定法

(1) 如果一条直线和一个平面没有公共点, 那么这条直线和这个平面平行.

(2) 如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行, 那么这条直线和这个平面平行.

(3) 如果平面外的两条平行线中有一条和平面平行, 那么另一条也和这个平面平行.

(4) 如果两个平面平行, 那么一个平面内的任何一条直线都平行于另一平面.

(5) 一个平面和不在这平面内的一条直线都垂直于另一个平面, 那么这条直线平行于这个平面.

5. 直线和平面垂直的判定法

(1) 如果一条直线和平面内的任何一条直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面.

(2) 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面.

(3) 如果两条平行线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于这个平面.

(4)如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

(5)如果两个相交的平面都垂直于第三个平面,那么它们的交线也垂直于第三个平面.

(6)如果三条共点直线两两垂直,那么其中一条直线垂直于另两条所确定的平面.

6. 平面和平面平行的判定法

(1)如果两个平面没有公共点,那么这两个平面互相平行.

(2)如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

(3)垂直于同一直线的两平面互相平行.

(4)平行于同一平面的两平面互相平行.

7. 平面和平面垂直判定法

(1)两个平面相交,如果所成二面角是直二面角,那么这两个平面互相垂直.

(2)如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.

(3)如果一个平面与另一个平面的平行线垂直,那么这两个平面互相垂直.

三、直线与直线、直线与平面、平面与平面的度量关系

1. 夹角

(1)两条异面直线所成的角:

①过空间任一点,分别作两条异面直线的平行线,所得两相交直线夹的锐角(或直角)[图 1-2(a)],叫做两条异面直线所成的角.

②连同共面的两条直线一并考虑,空间两条直线所成的角 θ 的范围是 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

(2)直线和平面所成的角:

①平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角,叫做这条直线和这个平面所成的角[图 1-2(b)].

②一条直线垂直于平面,我们说它们所成的角是直角.

③一条直线和平面平行或在平面内,我们说它们所成的角是 0° 的角.

④直线和平面所成的角 θ 的范围是 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

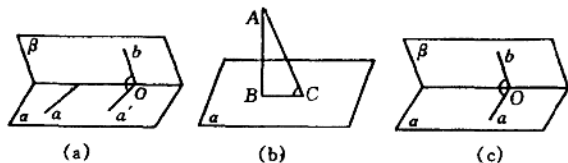


图 1-2

(3)二面角的平面角:

①以二面角的棱上任意一点为端点,在两个面内分别作垂直于棱的两条射线,这两条射线所成的角称作二面角的平面角[图 1-2(c)].

二面角的大小,可以用它的平面角度量.

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

②设二面角的平面角为 θ ,则 θ 的范围是 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ (构成二面角的两个半平面在同一平面时,二面角是 180° 的二面角,但一般不研究此情况).

③两个平面平行,我们说它们所成的角是 0° 的角.两个平面相交构成四个二面角,其中相对的两个二面角的平面角可以成为对顶角,因此空间两个平面所成的角 θ 的范围是 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

2. 垂直(如表 1-1 所示)

表 1-1

	线 线	线 面	面 面
定义	如果两条直线所成的角是直角,就说这两条直线互相垂直.	如果一条直线和一个平面内的任意一条直线都垂直,就说这条直线和这个平面垂直.	两个平面相交,如果所成的二面角是直二面角,就说这两个平面互相垂直.
判定	①根据定义判定. ②三垂线定理:在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直. ③三垂线定理的逆定理:在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线的射影垂直. ④垂直于两条平行线中的一条,也一定垂直于另一条. ⑤平面几何中所有判断垂直的法则.	①如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面. ②如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于同一个平面.	如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.
性质	如果两条直线互相垂直,那么这两条直线所成的角等于 90° .	①和一个平面垂直的直线,垂直于这个平面内的任一直线. ②两条不重合直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行.	两个平面垂直,那么:①在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面;②经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线,在第一个平面内.



3. 距离

(1) 两条异面直线的距离:

① 两条异面直线的公垂线——和两条异面直线都垂直且相交的直线.

② 两条异面直线的距离——两异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度.

(2) 直线和平面的距离:

一条直线和一个平面平行, 这条直线上任意一点到平面的距离, 称作这条直线和平面的距离.

(3) 两个平行平面的距离:

和两个平行平面同时垂直的直线, 称作两个平行平面的公垂线; 它夹在这两个平行平面间的部分, 称作这两个平行平面的公垂线段. 公垂线段的长度称做两个平行平面的距离.

四、空间图形的表示

1. 空间图形和平面图形

空间图形是由空间的点、线、面所构成, 也可以看成是空间点的集合. 例如, 长方体、圆柱、圆锥等, 都属于空间图形.

平面图形是由同一个平面内的点、线所构成的图形.

平面图形是空间图形的一部分; 空间图形是由平面图形表示的.

立体几何的研究对象是空间图形; 但对空间图形的研究是通过表示它的平面图形, 并借助于平面几何知识来实现的.

2. 立体几何中空间想象能力的含义

空间想象能力指的是人们对客观事物的空间形式进行观察、分析和抽象的能力. 在立体几何中, 这种能力具体表现在三个方面:

(1) 根据对空间图形的感觉, 按规定在平面上画出表示它的图形;

(2) 根据对表示空间图形的平面图形的分析, 复原出空间图形的形象;



(3)根据语言或式子,勾画空间图形的形象,并画出表示它的平面图形.因此从本质上看,在立体几何中,空间想象能力正是实现表示空间图形的平面图形和空间图形相互转化的能力.

3. 空间图形的表示

表示空间图形的平面图形,如果画得好,能使我们获得较强的立体感.

(1)用直观图表示空间图形:

直观图是空间图形的标准表示法,能使我们获得最强的立体感,初学者要花一些时间熟悉它的画法.

(2)空间图形的平面草图:

解立体几何问题,不需要每次都画出空间图形的直观图,常常只要画个草图.因为人们在解题时遇到最多的是草图,因此,要注意增强草图的立体感.为此:

①要尽可能熟练掌握一些接近直观图画法的标准画法.

例如,练习以下两相交平面的画法(图 1-3).

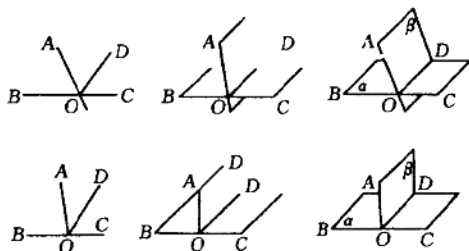


图 1-3

从图中不难发现,当 AO 与 BC 斜交时,给人以平面 α 和 β 斜交的印象;当 $AO \perp BC$ 时,给人以平面 α 和 β 垂直的印象.

②利用理性认识,强化立体感.

用平面图形表现空间图形,毕竟曲解了空间图形的本来面貌.因此,应努力加强理性认识,烘托图形的立体感,并避免可能产生的错误.比如,仅靠直观,往往把图 1-4(a)中的 a 、 b 两直线