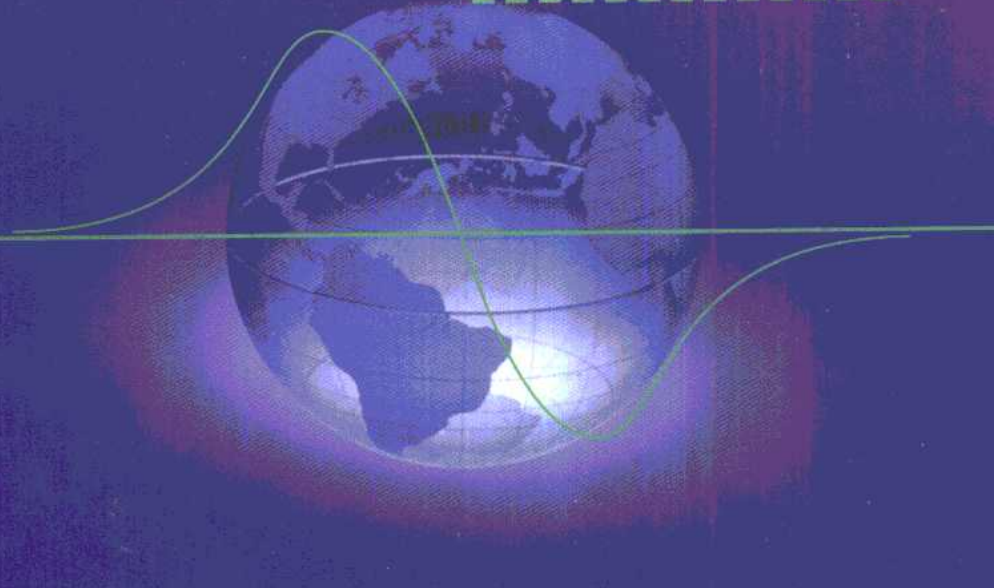
中国地质大学“创新工程”丛书

地球物理反演理论

王家映 编著



中国地质大学出版社

地球物理反演理论

王家映 编著

中国地质大学出版社

内容提要

本书系统地介绍了在地球物理学中广泛应用的线性反演理论及正在兴起的非线性反演方法。全书共五章，第一章：线性反演理论概述；第二章：线性问题的长度解；第三章：广义反演法；第四章：Backus-Gilbert 反演理论；第五章：非线性反演方法。前四章属线性反演理论，第五章简单介绍了目前常用的一些非线性反演技术。

本书既有各种反演方法的数学公式推导，又有物理概念分析，易于理解和掌握，具有较强的理论性和实用性，可供地球物理探测与信息技术专业的研究生和本科生以及其他从事地球物理、地球化学、数学地质、遥感等工作的科技人员和研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

地球物理反演理论/王家映编著.—武汉：中国地质大学出版社，1998.12

ISBN 7-5625-1375-9

Ⅰ. 地…

Ⅱ. 王…

Ⅲ. 地球物理学 - B-G 理论 - 反演计算方法

Ⅳ. P3

出版发行 中国地质大学出版社(武汉市喻家山 . 邮政编码 430074)
责任编辑 刘先洲 **责任校对** 胡义珍 **版面设计** 阮一飞
印　　刷 武汉测绘院印刷厂
经　　销 湖北省新华书店

开本 850×1168 1/32 印张 6 字数 160 千字
1998 年 12 月第 1 版 1998 年 12 月第 1 次印刷 印数 1—1 000 册
定 价：10.00 元
ISBN 7-5625-1375-9/P.497

前　　言

宇宙万物都在矛盾中存在着、运动着。任何事物都是一分为二的，对立统一的，既有正面，也有它的反面。在初等数学中有指数和对数，三角函数和反三角函数，双曲函数和反双曲函数等；在高等数学中有傅氏变换和傅氏反变换，拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换，褶积和反褶积等；在物理学中有正电子和负电子，质子和反质子，物质和反物质等；同样，在地球物理学中有正(演)问题和反(演)问题。

如果我们用已知自变量 x 去求函数 $y=f(x)$ 的值，已知一个函数 $f(x)$ 去求其变换 $F=L(f(x))$，已知一个地球物理模型去求其响应函数这类问题叫正演问题的话，那么由 $f(x)$ 求 x，由 $L(f(x))$ 求 $f(x)$，由地球物理观测资料去反推地球物理模型，这类问题就统称为反问题，或者求反演问题。

反问题是对正问题而言的。比如，微分方程的正问题是研究如何描述与刻画物理过程、系统状态等现象(即建立微分方程)，以及根据过程与状态的特定条件(初始或边界条件)去求解这一定解问题，从而得到过程与状态的数学描述；而微分方程的反问题，是指从微分方程解的某些泛函去确定微分方程的系数(或其右端项)。很明显，这里有两类反演问题，第一类是确定过程的过去状态；第二类是借助解的某些泛函去确定微分方程的系数。

无论哪一类反问题，都是属于地球物理反演理论研究的范围。因此，“剔除”具体反演问题的物理内容，地球物理反演就可以概括为：地球物理学中的反演理论就是研究把地球物理学中的观测数据映射到相应的地球物理模型的理论和方法。

地球物理学涉及广泛的内容，有地震学、重力学、电磁学、热学、

地球年龄学等，即使在同一学科分支中也有各种不同的资料采集方法，如地震学中就有反射法和折射法、电磁法中有直流电法和交流电法（或电磁法）等。在各种方法中，又有许多变种，如交流电法中有人工源和天然源电磁法之分等等。尽管地球物理学家研究地球所依据的物性参数不同，方法各异，正演公式也千差万别，但是观测资料的反演方法却有许多共同之处。作为反演理论，本书只涉及各种地球物理观测数据反演方法之共同理论，反演中所遇到的共同问题，以及解决这些问题所必须采取的共同措施（假定读者已经熟悉各种地球物理的正演问题）。然而，为说明各种反演方法的实际效果，我们又不得不以某些具体地球物理问题为例，从而也不可避免地会涉及一些具体的正演问题。

绝大多数地球物理问题都是非线性问题。然而，在一定条件下非线性问题可以线性化，即把非线性问题化成线性问题。众所周知，地球物理反演问题有线性反演和非线性反演之分，前者指观测数据和地球物理模型之间存在线性关系（线性函数或线性泛函），而后者是非线性关系（非线性函数或非线性泛函）。线性反演法已经形成了完整、系统的理论，近 30 年来获得了广泛的应用。非线性反演法近年来发展迅速，日新月异，已成为反演理论家重点研究的领域。按照在实现反演映射时是否需要迭代，可把反演方法分为间接反演法和直接反演法，需要迭代的叫间接反演法，反之称直接反演法；按照应用的领域，人们又常把反演方法分为诸如地震反演法、重力反演法等，甚至有人以反演方法的提出人命名，如高斯-牛顿法，马夸特法等。

虽然反演理论已在地球物理的各个领域获得了广泛而成功的应用，但它毕竟是近 30 年才发展起来的地球物理学的新兴分支，还不能说它的理论（特别是非线性反演理论）已经完备，效果令人十分满意。和任何新兴学科或新生事物一样，它还有许多问题亟待解决，就是现有的方法和理论也还需要在实践中不断改进、补充和完善。

应该指出，既不应该把地球物理学中的反演理论当成与地球物

理问题无关的纯抽象的数学问题来学，也不应该把它看成是一种纯方法技术问题，忽视其理论性和一般指导原则，否则就是片面的。笔者认为，只有具备一定的数理基础，同时又较好地懂得地球物理学的人，才能更好地完成反演工作所面临的任务。

如果我们把地球物理问题分为资料采集、数据处理和反演解释三个阶段的话，那么，资料采集是基础，数据处理是手段，反演解释才是地球物理工作的目的。反演解释工作是地球物理工作中最重要的一个阶段。随着地球物理工作的不断深入和发展，随着科学技术特别是计算技术的发展，反演理论会日臻完善，会越来越显示出强大的生命力，为当今地球科学的发展作出自己的贡献！

第一章　线性反演理论概述

§1　反演理论的目的和任务

目前，人类对地球内部的物理性质（包括速度、密度、电导率、温度等）以及矿产资源的分布已经有了不同程度的了解。这种知识多数来自于地表地质和地球物理、地球化学资料的反演和解释，而不是来自于钻井。对于地球表层的了解是如此，深层更是如此。通过大陆深钻和海洋深钻获取地壳深处的地质、地球物理信息是必要的，但是它毕竟耗资巨大，而且深度有限，所获得的资料也仅来自一孔之见。要少花钱多办事的唯一途径是应用地球物理和地球化学的方法，在采集到可靠的第一手资料后，加强资料的处理和反演解释，以获取更接近于真实的地球物理和地球化学模型！

由此可见，地球物理学中的反演理论的目的是根据观测数据求取相应的地球物理模型。所以，首先必须确定观测数据和地球模型参数之间的函数关系，使地球物理工作者既可根据给定的模型参数计算相应的观测数据（即实现正演计算），也可以根据观测数据求取地球物理模型的参数，实现反演映射。显然，正演是反演的前提和条件，只有解决了正演计算，不管是靠解析的方法还是数值的方法，才有可能实现反演映射。遗憾的是，并不是对所有地球物理问题，科学家都弄清了它们的机理，确定了它们的数学物理模型的，如天然地震预报、地磁场的起因和向西漂移等就是这类问题的典型代表。毫无疑问，对这类问题，目前反演是无能为力的。

但是，这并不是建立了正确的数学物理模型以后，反演问题就完全解决了。那种把反演问题和正演问题等同起来，以为反演理论没有

自身需要解决的特殊问题，显然也是不对的。

和其他学科一样，反演理论也有其需要解决的特殊问题。正如著名的反演理论家 R. Parker 在其有名的论文《Understanding Inverse Theory》中所概括的那样，反演理论必须解决四大问题。

(1)解的存在性：即给定一组观测数据后，是否一定存在一个能拟合观测数据的解或模型；

(2)模型构制：如果存在性是肯定的，如何求得或构制能拟合观测数据的模型；

(3)非唯一性：能拟合观测数据的模型是唯一的，还是非唯一的；

(4)结果的评价：如果解是非唯一的，如何才能从构制的模型中提取关于真实模型的地球物理信息。

在地球物理资料的反演中，解的存在性已被大量的理论文章和实际资料所证实。地球物理学家把存在性问题留给数学家们去研究，他们对此并不十分感兴趣。然而，这并不是说这个问题毫无意义。事实上，它是对所研究的地球物理问题的数学物理模型及其假设条件的正确性的检验，具有重大的理论意义和明显的实际价值。

关于模型构制，解的非唯一性和结果的评价，是本书要讲解的主要内容，以后几章中要详细研究。

值得提及的是，有的反演理论家将解的稳定性问题也作为反演理论必须研究的重要问题之一，我们也将在适当的章节中加以介绍。

§2 数学物理模型和响应函数的正演问题

在地球物理学中，将观测数据和地球的物理模型参数联系起来的数学表达式叫数学物理模型。不同的地球物理问题，其数学物理模型是不同的，就是同一个地球物理问题，其观测方式不同，近似条件有变化，其地球物理模型也不一样。

虽然地球物理问题千差万别，但把观测数据和物理模型参数联系起来的数学表达式却只有线性和非线性两大类。如以 x 表示模型

参数，y 表示观测数据，F 表示联系 x 和 y 的函数或泛函表达式，则满足

$$\begin{aligned}&(1)\qquad F(x_1+x_2)=F(x_1)+F(x_2)=y\\&(2)\qquad F(\alpha x)=\alpha F(x)=y\end{aligned}\tag{1.1}$$

两个条件时，称 F 为线性函数或线性泛函，其中 α 为常数。

不言而喻，凡是不满足(1.1)式的函数或泛函就是非线性的了。在地球物理学中，绝大多数观测数据和模型参数之间都不满足线性关系。但是，在一定近似条件下均可简化或近似简化为线性关系。因此，线性反演问题是地球物理学家最关心的问题之一，也是本书要论述的重点。

不管是在线性反演法中，还是在非线性反演法中，都涉及到地球响应函数(或理论观测值)的计算。正演是反演的前提和条件，只有准确地计算出地球的响应函数，才有可能求得可靠的地球物理模型。

如果观测数据和地球物理模型之间存在着确定的函数关系，这种正演计算在计算机程序中是不难实现的。但是，在许多情况下，如二维、三维时，观测数据和地球物理模型之间并不存在明显的函数关系，这时就应借助于数值的方法，比如用有限差分，有限单元，积分方程等方法来实现正演计算。

§3 非线性问题的线性化与连续模型的离散化

如前所述，将非线性问题线性化，使非线性反演问题简化为线性反演问题，是当今解决非线性反演问题的一个重要途径和方法。下面将简单介绍一些非线性问题线性化的方法。

1. *参数置换法*

所谓参数置换法，就是通过参数置换将非线性的地球物理方程线性化，以便于应用线性反演方法求解模型的参数。

例 1 某地[其坐标为(x,y,h)]发生天然地震后，在其附近的地震观测站[其坐标为$(x_k,y_k,0)$]观测到直达波 P 的走时 t_{Pk}，这里 $k=$

1,2,…,n;n 为观测站的数目。假定地球介质是均匀的,发震时刻为 t_0,则下列方程存在:

$$(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+h^2=(t_{Pk}-t_0)^2V_P{}^2 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

这里 V_P(或 v_P)为介质中地震波的传播速度。

对地震参数(x,y,h,t_0,V_P)而言,上式是一个非线性方程。

设:$a_{k1}=1$,

$a_{k2}=-2x_k$,

$a_{k3}=-2y_k$,

$a_{k4}=-t_{Pk}^2$,

$a_{k5}=2t_{Pk}$,

$b_k=x_k{}^2+y_k{}^2$

以及

$\rho_1=x^2+y^2+h^2-t_0^2V_P^2$,

$\rho_2=x$,

$\rho_3=y$,

$\rho_4=V_P^2$,

$\rho_5=t_0V_P^2$。

则上式可化为

$$a_{k1}\rho_1+a_{k2}\rho_2+a_{k3}\rho_3+a_{k4}\rho_4+a_{k5}\rho_5+b_k=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.2}$$

由于以上方程的系数矩阵$\{a_{ki}\}$和常数项 b_k 可以根据第 k 个观测点的地理坐标(x_k,y_k)和地震波的走时 t_{Pk}求得。因而,只要 $n>5$,则 $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4,\rho_5$ 就不难用线性反演理论求得,从而地震参数(x,y,h,t_0,V_P)就可迎刃而解了。

例 2 用统计法求取弹性介质的吸收系数。

大家知道,从震源发出的地震波在到达接收点时,其振幅会发生变化。在无色散系统中,振幅的变化主要来源于波前面的扩散和介质

的吸收。前者与距离 r 成反比，后者与距离 r 呈负指数的关系，即

$$\begin{aligned}A_i &= cr_i^{-1}e^{-\alpha r_i}\\ &= at_i^{-1}e^{-bt_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

式中：c 是比例常数；$a=cv^{-1}$，$b=\alpha v^{-1}$，α 是吸收系数。

从上式不难看出，观测数据 A_i 和待求系数 a 和 b 之间是非线性关系。但是，如将上式两端同取对数，则有：

$$\ln A_i=\ln a-\ln t_i-bt_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$y_i=u-bt_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中：

$$y_i=\ln A_i+\ln t_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.3}$$

$$u=\ln a$$

只要 $n>2$，解线性方程组(1.3)，不难求得 u 和 b，因而就很容易求出 c 和吸收系数 α 了。

2. 台劳级数展开法

级数理论告诉我们，任何一个函数 $f(x)$，如果满足条件：

(1)在点 a 的某邻域 $|x-a|<\delta$ 内有定义；

(2)在此邻域内从 1 阶一直到 $(n-1)$ 阶的导数 $f'(x)$，…，$f^{n-1}(x)$ 存在；

(3)在 a 处有 n 阶导数 $f^{(n)}(a)$，那么 $f(x)$ 在点 a 的邻域内可表成如下台劳级数：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+o(|x-a|^n)$$

其中：$o(|x-a|^n)$ 为高阶无穷小。如果仅取前两项作为 $f(x)$ 的一阶近似，则有：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o'(|x-a|) \tag{1.4}$$

忽略上式中的一阶无穷小，则有：

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a) \tag{1.5}$$

如果 $\boldsymbol{x}$ 是 N 维向量,则有:

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial a_i}(x_i-a_i) \tag{1.6}$$

式中:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_N\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_N\end{bmatrix}$$

将(1.6)式应用于非线性地球物理问题,则有:

$$d_j=d^\circ_j+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_i}{\partial m_i}\right)^\circ\Delta m_i,\qquad (j=1,2,\cdots,M)$$

或

$$\Delta d_j=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial m_i}\right)^\circ\Delta m_i \tag{1.7}$$

式中:d_j 为第 j 个观测数据,且

$$d_j=f(\boldsymbol{m},\lambda_j)\qquad (j=1,2,\cdots,M)$$

是一个非线性函数,$\boldsymbol{m}$ 是 N 维模型向量;$\left(\frac{\partial f_j}{\partial m_i}\right)^\circ$代表在起始模型 $\boldsymbol{m}^\circ$ 处,第 j 个观测值 f_j(或 d_j)对第 i 个模型参数 m_i 之偏导数;$\Delta m_i=m_i-m^\circ_i$,即第 j 个模型参数之增量;$\Delta d_j=d_j-d^\circ_j$ 之差,是第 j 个观测数据 d_j 和在 $\boldsymbol{m}^\circ$处的理论数据 d°_j 之差,即观测数据之增量。

将(1.7)式改写为矩阵方程,即有:

$$\Delta\boldsymbol{d}=\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{m} \tag{1.8}$$

式中:

$$\Delta\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}\Delta d_1\\\Delta d_2\\\vdots\\\Delta d_M\end{bmatrix},\qquad \Delta\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}\Delta m_1\\\Delta m_2\\\vdots\\\Delta m_N\end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial m_1}\right)^{\circ} & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial m_2}\right)^{\circ} & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial m_N}\right)^{\circ}\\ \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial m_1}\right)^{\circ} & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial m_2}\right)^{\circ} & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial m_N}\right)^{\circ}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \left(\dfrac{\partial f_M}{\partial m_1}\right)^{\circ} & \left(\dfrac{\partial f_M}{\partial m_2}\right)^{\circ} & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_M}{\partial m_N}\right)^{\circ}\end{bmatrix}$$

由此可见，将非线性地球物理响应函数线性化，可以得到形如(1.8)所示的矩阵方程。到此，不难用线性反演理论，经反复迭代求出拟合观测资料的一个模型。

将(1.6)式应用于目标函数(或方差函数)，将非线性的目标函数线性化，也可利用线性反演理论，实现观测资料的反演。

设目标函数

$$\Psi=\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{d_j-d^{\circ}{}_j}{d_j}\right)^2 \qquad (j=1,2,\cdots,M) \tag{1.9}$$

将它在初始模型 $\boldsymbol{m}^{\circ}$附近按台劳级数展开，并略去三次以上的高阶项，则有：

$$\Psi=\Psi^{\circ}+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial m_i}\right)^{\circ}\Delta m_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_i\partial m_l}\right)^{\circ}\Delta m_i\Delta m_l$$

和以前一样，角标“°”仍表示在初始模型处之值。若将上式写成矩阵，则得

$$\Psi=\Psi^{\circ}+\Delta\Psi^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{m}+\Delta\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\Delta\boldsymbol{m} \tag{1.10}$$

式中：

$$\Delta\Psi=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial m_1}\right)^{\circ}\\ \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial m_2}\right)^{\circ}\\ \vdots\\ \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial m_N}\right)^{\circ}\end{bmatrix};\qquad \Delta\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}\Delta m_1\\ \Delta m_L\\ \vdots\\ \Delta m_N\end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$$Q=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_1\partial m_1}\right)^\circ & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_1\partial m_2}\right)^\circ & \cdots & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_1\partial m_N}\right)^\circ \\ \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_2\partial m_1}\right)^\circ & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_2\partial m_2}\right)^\circ & \cdots & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_2\partial m_N}\right)^\circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_N\partial m_1}\right)^\circ & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_N\partial m_2}\right)^\circ & \cdots & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial m_N\partial m_N}\right)^\circ\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2} \tag{1.12}$$

目标函数(1.10)极值存在的必要条件是

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\Delta \boldsymbol{m}}=0,$$

故(1.10)变为

$$\Delta\Psi=\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{m} \tag{1.13}$$

显然,(1.13)和(1.8)完全相同。应该指出,对线性方程(1.8)和(1.13)求解可以得到 $\Delta\boldsymbol{m}$,即求得参数的校正向量。它们还不是待求的模型参数 $\boldsymbol{m}$,还必须对初始模型进行校正,校正后的模型也不一定就是待求的模型(不一定能拟合观测数据)。因此,还必须以校正后的模型作为初始模型,重复上述步骤,反复迭代,直至拟合观测数据为止。

除以上两种非线性函数线性化的方法外,在地球物理资料反演中,还有许多种其他方法,读者可参考有关文献。

在连续介质情况下,如果观测数据与连续模型之间呈非线性泛函关系,也可以在一定近似条件下,用各种不同的方法,将非线性泛函化为线性泛函,这已成了近年来解决非线性泛函反演问题的重要途径。

其实,在观测数据和模型之间呈线性泛函,即当:

$$d_j=\int_0^\infty g(z,\tau_j)m(z)\mathrm{d}z \qquad (j=1,2,\cdots,M) \tag{1.14}$$

时,也可以将连续模型 $m(z)$ 离散化,实现观测数据的反演。(1.14)中 d_j 是第 j 个观测数据;$m(z)$ 是地球物理模型,是 z 的连续函数,它可

是电阻率、速度、密度、温度以及其他任何待求的地球物理参数，$g(z,\tau_j)$是核函数，它既是 z 的函数，也是参数 τ_j 的函数。

如将线性积分方程(1.14)中的模型 $m(z)$离散化，将它分为 N 个区间，并假设每个区间中的模型 $m_i(z)$是一个常量，则(1.14)可写为

$$d_j=\sum_{i=1}^{N}G_{ji}m_i \qquad (j=1,2,\cdots,M) \tag{1.15}$$

式中：

$$G_{ji}=\int_{z_{i-1}}^{z_i} g(z,\tau_j)\mathrm{d}z \qquad (j=1,2,\cdots,M) \tag{1.16}$$

显然(1.15)可以表示为矩阵方程，则有：

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{Gm} \tag{1.17}$$

式中：

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_M \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{m}=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

且

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & & & \\ G_{M1} & G_{M2} & \cdots & G_{MN} \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

由矩阵代数不难求得(1.17)式的解。这里，需要着重说明的是，(1.17)和(1.14)式是线性反演理论中最为重要的两个方程。线性反演理论就是研究解这两个方程的理论、方法，以及由此而引申的一系列问题。

§4 模型构制

现在将讨论模型构制，即平常所讲的“反演方法”问题，这是本书

将要研究的重点。在这一节中，我们将简要地介绍一下模型构制的基本思路和基本方法，让读者有一粗略了解，为后面几章的学习打下基础。

让我们回到(1.17)，且设

$$\underset{(M\times 1)}{\boldsymbol{d}} = \underset{(M\times N)}{\boldsymbol{G}}\underset{(N\times 1)}{\boldsymbol{m}}$$

其中：$\boldsymbol{d}$ 是 $M\times 1$ 维向量；$\boldsymbol{G}$ 是 $M\times N$ 阶矩阵；$\boldsymbol{m}$ 是 $N\times 1$ 维向量。显然，这里有四种情况：

(1)当 $M=N=r$，且 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 存在时，方程(1.17)有唯一解。这里 r 是矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的秩，而 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 表示矩阵的逆；

(2)当 $M>N=r$ 时，方程(1.17)是超定方程，无常规意义下的解，但有最小方差解；

(3)当 $N>M=r$ 时，方程(1.17)是欠定方程，也无常规意义下的解，但有 $|\boldsymbol{m}|=\min$ 意义下的最小长度解；

(4)当 $\min(M,N)>r$ 时，方程(1.17)的问题是混定问题。这时，只有同时在两种限制条件(即最小方差和模型最小长度条件)限制之下，方程才有解。

这里讲的方差或模型长度都是指在 L_2 范数意义下的欧基里德空间的长度。当然，也可以在其他测度($L_1, L_3, \cdots, L_\infty$)为最小的意义下估算模型参数。测度定义不同，对模型参数和观测数据加权方式不同，就会派生出各种不同的反演方法。

以上讨论了地球物理模型参数为离散情况下(包括将连续模型离散化以后的情况)模型构制的基本思路和基本方法。下面，将介绍在连续介质条件下如何反演。

介质的物性是空间坐标的连续函数，有以下三种情况：

(1) $m=m(z)$，即介质的物性仅是一个空间坐标，比如说深度 z 的函数，即一维模型；

(2) $m=m(x,z)$，即介质的物性是两个空间坐标 x、z 的函数，即二维模型。这时，我们常称水平坐标方向 y 为二维模型的走向，x 为

倾向。

(3)$m=m(x,y,z)$，是三维介质，这时介质没有明显的走向。实际的地球物理模型都是三维的，只是在一定近似条件下方可视为二维，甚至一维的。为什么要把实际地球物理模型近似为二维和一维的呢？因为一维、二维的正演公式简单，计算方便。这种近似，在较小的空间范围内和一定精度意义下是允许的。

在连续介质情况下，欲根据有限个观测数据 $d_j(j=1,2,\cdots,M)$，求取无限个未知数的连续函数，无疑是不可能的，必须附加一些已知的限制条件或先验信息，附加的条件越多、越严格，求得的模型越接近于真实情况。这一点，我们还要在以后的章节中详细加以论述。

由上面的讨论可以看出，在模型构制时，如何处理观测数据和模型参数，有三种不同的观点和方法：

第一，把观测数据和模型参数(既可是离散模型，也可以是能用有限个参数表征的连续模型)都看成是随机变量，通过研究它们所遵循的概率分布对观测资料进行反演。

第二，把观测数据视为随机变量，把模型看成是由一些确定参数所决定的。反演的任务就是估算这些待定的参数以及它们可能具有的误差，这是本书介绍的各种反演方法所持的主要观点。

第三，视观测数据为随机变量，模型为连续函数，形成一套连续介质的反演理论和方法，这就是著名的 Buckus-Gilbert 反演法，这是本书讨论的又一重点。

§5 解的非唯一性

正如前面所指出的，解的非唯一性是地球物理资料反演中最重要的问题之一。对所有地球物理问题都存在，只是程度不同而已。有的非唯一性问题小，有的非唯一性问题大。反演中的非唯一性问题，已经引起地球物理学家，特别是反演问题专家的严重关切。

非唯一性从何而来？反演理论之父——Buckus 和 Gilbert 认为：