目　　录

第七章　矩阵……………………………………………………… 1

§1．矩阵的运算…………………………………………………… 1

§2．初等矩阵………………………………………………………… 21

§3．矩阵的分块…………………………………………………… 28

§4．特征多项式与最小多项式…………………………………… 34

第八章　线性空间………………………………………………… 45

§1．线性空间的定义与例子……………………………………… 45

§2．线性相关性…………………………………………………… 55

§3．有限维空间…………………………………………………… 62

§4．基底变换与坐标变换………………………………………… 69

第九章　线性空间上的线性函数………………………………… 77

§1．线性型、双线性型…………………………………………… 77

§2．线性变换……………………………………………………… 89

§3．线性函数在不同基底上系数阵的关系……………………… 104

第十章　二次型的标准形………………………………………… 110

§1．化二次型为标准形…………………………………………… 110

§2．实二次型的分类……………………………………………… 121

§3．恒正型………………………………………………………… 123

第十一章　线性变换的标准形…………………………………… 126

§1．特征向量……………………………………………………… 126

§2．λ一阵的等价（相抵）………………………………………… 133

§3. 初等因子…… 144
§4. 数元矩阵相似的判定…… 149
§5. 若当法式…… 160

第十二章 欧氏空间…… 167

§1. 欧氏空间的定义…… 167
§2. 法正交基底…… 174
§3. 正交变换与对称变换…… 184
§4. 欧氏空间二次型的标准形…… 198
§5. 酉空间…… 201

第十三章 近世代数简介…… 204

§1. 群的定义和例子…… 204
§2. 子群…… 215
§3. 环…… 222
§4. 域…… 228
§5. 同构…… 234
§6. 布尔代数…… 239

第七章 矩 阵

在第三章讨论一般线性方程组的理论时，我们看到了矩阵的工具作用．事实上，矩阵不仅在数学范围内是一个有力的工具，而且在理论物理、力学、工程技术等方面，也有着广泛的应用．

本章将在第三章的基础上，进一步讨论矩阵．介绍矩阵的运算、初等阵、分块阵，以及一些有关的性质．本章的内容是以后各章的基础，因此要求同学们必须透彻理解、熟练掌握．

§1. 矩阵的运算

我们在第三章§1定义中定义了矩阵的概念．一个$m\times n$矩阵指的是，由$m\times n$数所a_{ij}（$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$）排成的矩形表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

下面来规定矩阵的运算．首先指出二矩阵相等．对于两个同型矩阵$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，即此二矩阵的行数与列数都对应一样，当且仅当所有对应位置的元素都相等时：$a_{ij}=b_{ij}$，则说A与B是**相等**的，记作：$A=B$．

例如，若

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

则按矩阵相等的规定，必须

$$x_{11}=2,\ x_{12}=-1,\ x_{21}=1,\ x_{22}=3$$

定义 1　（矩阵加法）设 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，把 A 与 B 的对应元素相加所得到的矩阵：$(a_{ij}+b_{ij})$ 叫做 A 与 B 的和，记作：$A+B$。

例 1

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+0 & 3+(-1) \\ -1+1 & 2+3 & 4+(-5) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 不是同型矩阵，所以不能相加.

定义 2　（数乘矩阵）用数域 F 中的数 k 乘 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 中的每个元素所得到的矩阵：(ka_{ij}) 叫做 k 与 A 的积，记作 kA 或 Ak：$kA=Ak=(ka_{ij})$

例 2

(1) $5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times1 & 5\times2 & 5\times3 \\ 5\times1 & 5\times2 & 5\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$

(2) $-3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-3)\times2 & (-3)\times1 \\ (-3)\times1 & (-3)\times(-5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$

容易看出：

$$(-1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix}$$

一般地，若 $A=(a_{ij})$，则有

$$(-1)A=(-a_{ij})$$

我们把 $(-a_{ij})$ 记作 $-A$，叫做 A 的**负阵**. 所以

$$(-1)A=-A$$

特别是，把 $A+(-B)$ 记作 $A-B$，叫做 A 与 B 之差.

例如，

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ -1 & 6 & 3\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ -1 & 6 & 3\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -4 & -5\\ 1 & -6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2 & 2-4 & -1+(-5)\\ 5+1 & 7-6 & 8+(-3)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1 & -2 & -6\\ 6 & 1 & 5\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

事实上，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$就是$\boldsymbol{A}$的元素减去$\boldsymbol{B}$的对应元素所组成的矩阵．所以以后在计算$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$时，不必象上例那样一步一步地去做，直接得出结果即可．

对于上面所引进的矩阵加法与数乘矩阵的运算，可以验证这两种运算具有下述一些基本性质：

1） 加法满足交换律：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

2） 加法满足结合律：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

由 1），2）可知，在任意有限多个$m\times n$矩阵求和时，可以不计它的前后位置和先后次序．

例 3

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 6 & -1 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -3 & -2\\ -5 & -1 & 2\end{pmatrix}\\
&=\left(\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -3 & -2\\ -5 & -1 & 2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 6 & -1 & 8\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 6 & -1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 6 & -1 & 8\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3） 所有元素全为 0 的$m\times n$矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

叫做零矩阵，记作 0．零矩阵与数 0 相似有下列性质：

$$0+A=A+0=A$$

4） $A+(-A)=0$

5） $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$

9） $k(A+B)=kA+kB$

7） $k_1(k_2A)=(k_1k_2)A$

8） $1\cdot A=A$

9） $kA=0\Rightarrow k=0$ 或 $A=0$

上述 8 条性质我们并不陌生，n 维向量的加法与数乘 n 维向量的运算，就具有上述 8 条性质．

其实，一个 n 维向量也可看作一个 $1\times n$ 矩阵；反之，一个 $m\times n$ 矩阵也可看作一个 $m\times n$ 维向量．

性质 1）— 8），只须按照矩阵运算的定义即可验证出来．作为习题自己去证明．

下面来规定矩阵的乘法．矩阵的乘法与矩阵加法以及数乘运算相比，要复杂得多．先看一个具体例子．

设 x_1，x_2 与 y_1，y_2，y_3 有如下关系式：

$$\begin{cases}x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3\\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3\end{cases},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

而 y_1，y_2，y_3 与 z_1，z_2 有如下关系式：

$$\begin{cases}y_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2\\ y_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2\\ y_3=b_{31}z_1+b_{32}z_2\end{cases}\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{32} & b_{32}\end{pmatrix}$$

事实上，上面二关系式由矩阵 A 与 B 所确定．

下面我们来看一下，x_1，x_2 与 z_1,z_2 的关系．为此，把 y_i 的表示式代入 x_j 的表示式，整理之有

$$\begin{cases}x_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})z_1\\ \quad+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})z_2\\ x_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})z_1\\ \quad+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})z_2\end{cases}$$

$$C=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}$$

分析矩阵C的构成情况，可以看出：

矩阵C是2×2矩阵，其行数与A相同，列数与B相同.

另一方面，上述两个关系式所反映的是x_1，x_2与y_1，y_2，y_3；y_1，y_2，y_3与z_1，z_2的关系，所以A的列数与B的行数是相同的.

另外，C的4个元素是由A与B的元素之积构成的：

C的1行1列元素＝A的第1行元素与B的第1列对应元素作积取和；

C的1行2列元素＝A的第1行元素与B的第2列对应元素作积取和.

C的2行1列元素＝A的第2行元素与B的第1列对应元素作积取和；

C的2行2列元素＝A的第2行元素与B的第2列对应元素作积取和；

矩阵C叫做A与B之积，记作：$C=AB$.

例如，

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot3+1\cdot1+(-1)\cdot2 & 3\cdot(-1)+1\cdot5+(-1)\cdot1\\ 2\cdot3+1\cdot1+5\cdot2 & 2\cdot(-1)+1\cdot5+5\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8 & 1\\ 17 & 8\end{pmatrix}$$

一般地，$m\times n$矩阵A与$n\times s$矩阵之B积规定如下.

定义3　（矩阵乘法）.设$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$，$n\times s$矩阵$B=(b_{ij})$，以

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \qquad (1)$$

为 i 行 j 列元素的 $m\times s$ 矩阵 $C=(c_{ij})$ 叫做 A 与 B 之积，记作：$C=AB$.

注意定义 3 所规定的矩阵乘法，并非对任意二矩阵都有意义．而是要求第一个“因子”的列数与第二个“因子”的行数必须相等，才可以相乘.

例 4　设　$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-1&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

计算：AB，BA，BC.

〔**解**〕

因为 A 的列数与 B 的行数都为 3，所以 A 与 B 可以相乘．由定义 3 中（1）

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot(-1)+3\cdot(-2) & 1\cdot3+2\cdot5+3\cdot(-1)\\(-1)\cdot1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot1 & (-1)\cdot2+2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot3+2\cdot5+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&-6&10\\-4&-2&8\end{pmatrix}$$

因为 B 的列数为 3 A 的行数为 2，所以 B 与 A 不能相乘，故 AB 无意义.

而 B 与 C 可以相乘，其积 BC 为 3×1 矩阵：

$$BC=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&-1&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3\\(-1)\cdot1+(-1)\cdot2+5\cdot3\\1\cdot1+(-2)\cdot2+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\12\\-6\end{pmatrix}$$

例 5　　$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 0\end{pmatrix}$$

下面来讨论矩阵乘法运算的性质．由定义 3 知，矩阵乘法是通过数的加法与乘法按一定规律结合起来而引出的．通过例 4 与例 5 可以看出，通常对于数与多项式的运算所满足的交换律，对于矩阵乘法来说已不满足．不仅 AB 与 BA 的结果不同（如例 5），既使在 A 与 B 可乘的情况下，A 与 B 交换后 BA 都无意义．（如例 4）

因此对于结合律与分配律都得重新加以考虑．

命题 1 （1）**矩阵乘法满足结合律：**

$$(AB)C=A(BC)$$

（2）**矩阵的乘法对加法满足分配律：**

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

3） $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

证明 命题中各个结论的证明是完全类似的．只须按照矩阵运算和相等的规定，指出等式两端矩阵的对应元素相等即可．

下面只证结合律，分配律与 3）的证明作为习题．

在命题中 $(AB)C$ 的写法下，A 与 B 是可乘的，而 (AB) 与 C 也可乘．所以可设

$A=(a_{ij})$ 为 m 行 n 列矩阵，$B=(b_{ij})$ 为 n 行 s 列矩阵，这时 AB 应为 m 行 s 列矩阵．从而须设 $C=(c_{ij})$ 为 s 行 p 列矩阵．

由矩阵乘法定义可知：$(AB)C$ 为 m 行 p 列矩阵，$A(BC)$ 也为 m 行 p 列矩阵．

下面只须指出：$(AB)C$ 与 $A(BC)$ 的第 i 行第 j 列元素对应相等，$(AB)C=A(BC)$ 即得证．

由定义，$(AB)C$ 的 i 行 j 列元素为 AB 的第 i 行元素与 C 的第 j 列对应元素之积取和．为此去求出 AB 的第 i 行元素与 C 的第 j 列元素．

由定义 3 AB 的第 i 行第 1 列元素为 A 的第 i 行元素：$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 与 B 的第 1 列元素：$b_{11},, b_{21}, \cdots, a_{n1}$ 对应作积取和：

$$a_{i1}a_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{in}b_{n1}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k1}.$$

同理，AB 的第 i 行第 2 列元素为：

$$a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22}+\cdots+a_{in}b_{n2}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k2}$$

……………………………………………………

AB的第 i 行第 s 列元素为：

$$a_{i1}b_{1s}+a_{i2}b_{2s}+\cdots+a_{in}b_{ns}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ks}$$

而C的第 j 列元素为：

$$c_{1j},\ c_{2j},\cdots,c_{sj}$$

所以，$(AB)C$第 i 行第 j 列元素为：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j}+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j}+$$
$$+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ks}\right)c_{sj} \quad (2)$$

对于$A(BC)$ 的第 i 行第 j 列元素，同理可知应为A的第 i 行元素与 BC 的 j 第列对应元素之积取和.

A的第 i 行元素为：$a_{i1},\ a_{i2},\cdots,a_{in}$

而 BC 的第 j 列元素为：

$$b_{11}c_{1j}+b_{12}b_{2j}+\cdots+b_{1s}c_{sj}=\sum_{t=1}^{s}b_{1t}c_{tj}$$

$$b_{21}c_{1j}+b_{22}c_{2j}+\cdots+b_{2s}c_{sj}=\sum_{t=1}^{s}b_{2t}c_{tj}$$

$$\vdots$$

$$q_{n2}c_{1j}+b_{n2}c_{2j}+\cdots+b_{ns}c_{sj}=\sum_{t=1}^{s}b_{nt}c_{tj}$$

所以，$(AB)C$的第 i 行第 j 列元素为：

$$a_{i1}\left(\sum_{t=1}^{s}b_{1t}c_{tj}\right)+a_{i2}\left(\sum_{t=1}^{s}b_{2t}c_{tj}\right)+$$
$$+\cdots+a_{in}\left(\sum_{t=1}^{s}b_{nt}c_{tj}\right) \quad (3)$$

利用$\sum$的性质或直接将（2）式与（3）式展开，整理之，即可看出（2）与（3）是相等的. 由此即得：

$$(AB)C=A(BC)$$

如同数与多项式的情形一样，可将命题1以及矩阵加法的性质2)，推广到若干个矩阵的情形．因此，在若干个矩阵相加或相乘时，不必加括号可直接写为：

$A+B+\cdots+C+D$ 或 $AB\cdots CD$.

特别是，把 $\underbrace{A+A+\cdots+A}_{m}$ 记作 mA，

把 $\underbrace{AA\cdots A}_{m}$ 记作 A^m.

在矩阵的乘法下，下型的 n 阶方阵：

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

与数1具有类似的性质．即，对于任意 $m\times n$ 矩阵 A 或 $n\times s$ 矩阵 B 总有：

$$AE_n=A,\ E_nB=B$$

特别是当 A 为 n 阶方阵时，有

$$AE_n=E_nA=A$$

成立．

下型的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

即对角线上的元素皆为 a，其余元素皆为0的 n 阶方阵，称为**纯量阵**．

由数乘矩阵的运算，显然有

1) $$aE_n=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

2) $(aE_n)A=a(E_nA)=aA$

2)表明，用纯量阵 aE_n 左乘 $n\times s$ 矩阵 A，相当于，用 a 乘 A.

形如：

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

的 n 阶方阵称作对角形阵.

显然，单位阵与纯量阵都是对角形阵.

为简明起见，略去对角形阵的 0，只写出对角线上的元素，把对角形阵写作：

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

由矩阵的加法与乘法可知，二对角形阵之和与积仍为对角形阵：

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & & & \\ & a_2+b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n+b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{pmatrix}$$

如同在加法下考虑一个矩阵的负阵那样，现在来考虑矩阵的“逆阵”.

定义 4　设 A 是 n 阶方阵，如果有 n 阶方阵 B 使

$$AB=BA=E \tag{4}$$

则称 B 为 A 的逆阵，并称 A 为非奇异矩阵，或满秩阵.

当 B 为 A 的逆阵时，则由（4）式有

$$AB=BA=E$$

上式也可写为：

$$BA=AB=E$$

所以由定义 4 对于 B 来说，A 为 B 的逆阵.

例 6

(1) $E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的逆阵是其本身.

(2) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的逆阵为 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

事实上，

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} -7 & -4 & 6 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$互为逆阵.

(4) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 没有逆阵.

这是因为，对于任意三阶方阵：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{pmatrix}$来说，

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以对于A不存在3阶方阵使

$$AB=BA=E$$

成立. 因此$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$没有逆阵.

下面来讨论一下逆阵的性质.

命题 2　若A有逆阵，则A的逆阵只有一个.

证明　设B、C都是A的逆阵，则由定义有：

$$AB=BA=E,\ AC=CA=E$$

为证明$B=C$，在等式$AB=E$的两边从左同乘以C，（也可在等式$BA=E$的两边从右同乘以C）则有：

$$C(AB)=CE=C$$

而
$$C(AB)=(CA)B=EB=B$$

所以有：$B=C$

由此命题在n阶方阵A有逆阵时是唯一的，所以把A的逆阵记为A^{-1}.

命题 3　若n阶方阵：A_1，$A_2,\cdots,A_m$都有逆阵，则$A_1A_2\cdots A_m$也必有逆阵，而且$A_1A_2\cdots A_m$的逆阵为：$A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$，

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m)^{-1}=\mathbf{A}_m^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$$

证明 用数学归纳法作证明.

1) 当$m=2$时,

因为$(A_1A_2)(A_2^{-1}A_1^{-1})=A_1(A_2A_2^{-1})A_1^{-1}=A_1EA_1^{-1}=A_1A_1^{-1}=E$

$(A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2)=A_2^{-1}(A_1^{-1}A_1)A_2=A_2^{-1}EA_2=A_2^{-1}A_2=E$

所以 $A_2^{-1}A_1^{-1}$ 为 A_1A_2 的逆阵,即:

$$(A_1A_2)^{-1}=A_2^{-1}A_1^{-1}$$

2) 归纳假定命题对$m-1(\geqslant 2)$成立,即

$$(A_1\cdots A_{m-1})^{-1}=A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$$

去证:命题对m也成立,即要证:

$$(A_1A_2\cdots A_{m-1})^{-1}=A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

因为

$$\begin{aligned}(A_1A_2\cdots A_{m-1}A_m)^{-1}&=((A_1A_2\cdots A_{m-1})A_m)^{-1}\\&=A_m^{-1}(A_1A_2\cdots A_{m-1})^{-1}\end{aligned}$$

所以由归纳假定有

$$\begin{aligned}(A_1A_2\cdots A_{m-1}A_m)^{-1}&=A_m^{-1}(A_{m-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1})\\&=A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}\end{aligned}$$

于是命题得到证明.

此命题也可以如下去作证明:

去证: $(A_1A_2\cdots A_m)(A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1})=E$

$(A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2\cdots A_m)=E$

所以,由定义4,

$$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

下边我们来讨论,如何去判断一个n阶方阵是否有逆阵,在存在逆阵的情况下,给出逆阵的求法.

为以后讨论方便,我们给出下面的

定义 5 把$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$的行、列互换所得到$n\times m$的矩阵叫做A的转置矩阵,记作A':

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

关于矩阵的转置有以下的基本性质：

1) $(A')' = A$

2) $(A+B)' = A' + B'$

3) $(kA)' = kA'$

4) $(AB)' = B'A'$

1)～3) 是显然的．下面来证明4）式成立．

设$A=(a_{ij})$ 为$m \times n$矩阵，$B=(a_{ij})$ 为$n \times s$矩阵．则AB为$m \times s$矩阵，从而$(AB)'$为$s \times m$矩阵．

另一方面，由A为$m \times n$矩阵，所以A'为$n \times m$矩阵，同理B'为$s \times n$矩阵．因此，$B'A'$为$s \times m$矩阵．

要证：$(AB)'=B'A'$ 只须具体算出$(AB)'$与$B'A'$的对应元素相等即可．

因为$(AB)'$的第i行第j列元素为AB的第j行第i列元素，所以由矩阵乘法即得$(AB)'$的第i行第j列元素为：

$$a_{j1}b_{i1} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni} \qquad (5)$$

而$B'A'$的第i行第j列元素为B'的第i行与A'的第j列对应元素作积取和，亦即为B的第i列与A的第j行对应元素作积取和：

$$b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn} \qquad (6)$$

因为（5）与（6）相等，所以$(AB)'=B'A'$ 得证．

设$A=(a_{ij})$ 为n阶方阵，若令A_{ij}为A的行列式$|A|$中a_{ij}的代数余子式，如下的矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

叫做A的**伴随矩阵**．

由矩阵乘法和行列式展开的性质有

$$A\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{n1}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=|A|E$$

同理，

$$\tilde{A}A=\begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}=|A|E$$

所以 $\quad A\tilde{A}=\tilde{A}A=|A|E \qquad (7)$

定理　n阶方阵A有逆阵$\Leftarrow|A|\neq 0$

证明　当$|A|\neq 0$时，由（7）式

$$A\tilde{A}=\tilde{A}A=|A|E$$

所以

$$\frac{1}{|A|}(A\tilde{A})=\frac{1}{|A|}(\tilde{A}A)=E$$

将上式变形，则有

$$A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)=\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A=E$$