高等学校教学参考书

网络图论简介

邱关源 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书
网络图论简介
邱关源 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 1.25 字数 101,000
1978 年 12 月第 1 版 1979 年 5 月第 1 次印刷
书号 15012·0105 定价 0.37 元

序 言

图论是一门古老的但又是目前十分活跃的数学分支，它的应用已经渗透到许多学科领域。本书侧重于图论在电网络分析中的应用，但也简略地涉及某些其他网络问题。

第一章介绍图论的一些基本概念和定义，对电路理论中常用的回路、树、割集等概念作了比较详细的解释。第二章介绍图的矩阵表示，对关联矩阵、回路矩阵、割集矩阵的有关重要性质及定理作了推导和证明。第三章首先讨论了电网络的独立变量，然后介绍网络方程(包括状态方程)的编写，对部分拓扑公式(即属于那些不包含互感和受控电源的电路的)作了介绍，并且讨论了网络行列式的不变性问题。这三章主要是介绍与电路理论密切相关的图的基础知识，其中某些问题的讨论可能比之一般电路教科书中所涉及到的要略深入一些。第四章概要地介绍 Mason 的信号流图和 Coates 流图。第五章则对网络的流、运输网络、通讯网络和最短路径等问题作了简短的叙述。书中包括这两章内容的主要目的是为了说明图论应用的广泛性。

本书可作为高等工科院校教师参考用，也可作为研究生、高年级学生和工程技术人员的参考读物。阅读本书需要一定的电路理论知识和数学基础。

限于编者的水平，书中有不妥和错误的地方望读者指正。

编 者

于西安交通大学，1978 年 10 月。

目　录

第一章　基本概念

§1-1　引言……1
§1-2　图……3
§1-3　抽象图……5
§1-4　描述图的局部结构的术语……8
§1-5　边的序列·路·回路……10
§1-6　连通性……11
§1-7　树和林……12
§1-8　割集……15
§1-9　断点·不可断图……19
§1-10　平面图……21
§1-11　有向图……26

第二章　图的矩阵表示

§2-1　引言……30
§2-2　关联矩阵……30
§2-3　回路矩阵……34
§2-4　割集矩阵……42
§2-5　节点-参考路径矩阵……47

第三章　电网络方程

§3-1　电网络方程……51
§3-2　节点法……55
§3-3　回路法……61
§3-4　割集法……65
§3-5　状态方程……70
§3-6　节点导纳行列式的拓扑公式……77
§3-7　回路阻抗行列式的拓扑公式……86
§3-8　网络行列式的不变性……88

第四章　信号流图和流图

§4-1　信号流图……98
§4-2　Mason 公式……102
§4-3　信号流图和状态方程……107
§4-4　Coates 流图……112

第五章　网络的流

§5-1　运输网络……115
§5-2　切割……117
§5-3　极大流-极小切割定理……119
§5-4　确定极大流的标记算法……122
§5-5　最短路径问题……124
§5-6　通讯网络……129

第一章 基本概念

§1-1 引 言

图论是数学家欧拉所创始的。1736 年欧拉解决了当时颇为闻名的一个难题，即肯尼希堡城的七桥问题。这个城镇的普雷格尔河中有二个小岛，共有七座桥与两岸以及彼此连通，如图 1-1 所示。问题是：从陆地或岛上任一地方开始，能否通过每座桥一次且仅仅一次就能回到原地。不难发现，无论如何这是做不到的。欧

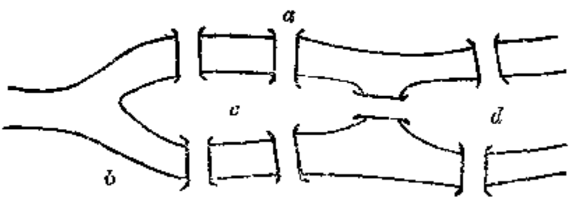


图 1-1 肯尼希堡的七座桥

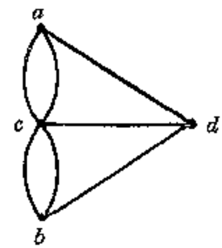


图 1-2 表示七桥问题的图

拉把这个难题化成了一个数学问题，他用一个顶点表示一个陆地区域，用联接相应顶点的线段表示各座桥，这样就得出了图 1-2 所示的一个图。于是，这个问题就变为：在这个图中，是否可能连续沿着各线段，从某一始点出发只经过各线段一次且仅仅一次而又回到出发点，即是否存在一条“单行曲线”。欧拉得出了一般结论，即存在单行曲线的必要和充分条件是：奇次顶点（所谓奇次顶点是联接于顶点的线段数为奇数）的数目是零。显然，图 1-2 的图不满足此条件。

基尔霍夫运用图论解决了电路理论中求解联立方程的问题，他引进了“树”的概念。可惜的是他的发现超越了时代而长期未被

重视。凯莱(Cayley)运用图论研究了有机化学的分子结构问题。早期图论与“数学游戏”发生密切联系，如哈密尔顿的周游世界问题，他用一个十二面体(具有 12 个五边形的面和 20 个顶点) 的顶点表示世界上的 20 个大城市(见图 1-3)，提出的问题是要求沿十二面体的边，走过每个城市一次且仅一次，最后仍回到原出发点。图 1-3 中所示的 a、$b\cdots s$、t、a 示出了这样的一个旅途。

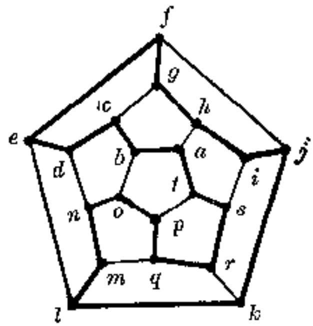


图 1-3　周游世界的闭合旅途

“四色问题”或“四色猜想”是图论，也可以说是数学中的一个著名难题。一张画在平面上或球面上的地图，相邻的国家如果涂以不同的颜色，只用四种颜色是否足够?(这里相邻的国家是指具有共同边界的国家，如果只在一点相连接，则不算是相邻的。)这个问题大约只要化几分钟时间就可以把它向任何一个不懂数学的人交待清楚，但是数学家化了一个多世纪的时间始终没有彻底解决；直至最近(1976 年)才有人①利用电子计算机，据说化费了大约 1200 小时的计算时间，证明了这个猜想是正确的，他们的证明中含有近 100 亿个逻辑判定。这个证明并不理想，但总算解决了这个难题，但是证明能否化简，是否不用计算机也能证明，尚待进一步研究。不过在企图解决这个难题的长过程中，发展了图论的许多方面。

二十世纪后，图论的应用渗透到许多学科领域，如物理学、化学、信息论、控制论、运筹学、博奕论、运输网络、通讯网络、计算机

① K. Appel, W. Haken, J. Koch 三氏。见“The Four-Color Conjecture: A Computer-Aided Proof”, Science, Vol 193(13, Aug. 1976), p564, 565 所载报道。

网络、社会学、经济学、生物学、语义学以及集合论、矩阵论等等。从50年代后，图论在电路理论中也日益获得重视，在网络分析、网络综合、多端网络和多端口网络、计算机辅助设计、大型网络的分析研究等方面都占有一定的地位，其他还可包括信号流图和流图、开关网络、时序网络等。可见，图论是一门很活跃的数学分支。

本书的范围则较狭，只涉及图论在电网络分析以及其他某些方面的应用。

本章介绍有关图论的基本概念和一系列定义。可惜的是图论的术语很不统一，几乎各个作者都有他自己的一套说法，看来一时也不会统一起来。本书在第一章采用图论中常用的名称，第二、三章则采用电路理论中常用的名称，这样做主要是为了便于叙述，其实差别不甚大，稍加注意，不会造成任何困难。

§1-2 图

本书所涉及到的图(Graph)与通常人们在解析几何或函数论中所熟知的图是很不相同的。从直觉上来说，一个图是一些点的集合和一些线段的集合，其中每一线段联接在两个不同的点(或一个相同的点)上。这些点称为顶点或节点，还有其他名称，例如，点，0-单形、0胞、元等。这些线段称为边或支路，还有其他名称，例如，弧，1-单形，元等。

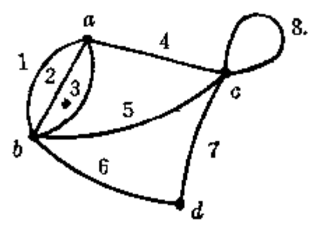


图 1-4 一个图

通常，可以把一个图画在平面上，顶点集合用平面上的一些点来表示，联接在顶点上的边或支路则用连续线段（可以是曲线或直线）来表示。例如，在图 1-4 所示的一个图中，顶点的集合为 $V=(a,b,c,d)$①，边的集合为 $E=(1,2,3,4,5,6,7,8)$。边

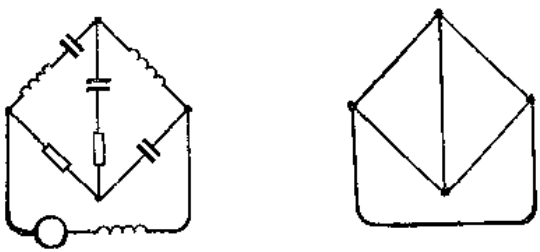
① 有关集合的符号将在下一节介绍。

1 联接顶点 a 和 b，我们说，边 1 与顶点 a 和 b 有关联，或者说，顶点 a、b 与边 1 有关联。边 1、2、3 都联接在顶点 a 和 b 上，这些边称为"并行的"，具有并行边的图有时称为多重图。与边 8 所关联的只有一个顶点 c，这种边称为自环。

一般说来，在画一个图时，顶点的位置并不重要，关键的是顶点与边是如何联接的。另外，各边除了它们所联接的顶点以外，并没有其他任何公共点。

上面所介绍的图，有时称为几何图。所以，一个(几何)图 G 可以定义为：图 G 是满足下列条件的一些顶点和边的一个集合，这些条件是：(1)每一条边恰好联接在两个(或一个)顶点上；(2)除了顶点以外，边没有任何公共点。

电路理论所依据的基尔霍夫电流定律和电压定律只与电路的拓扑性质有关，或者说，只决定于电路的联接性质，而与各个支路所含元件内容无关。因此任何具体电路都可以抽象为一个图，如图 1-5 所示，其中图 1-5b就是 1-5a所示电路的一个图，电路的每一条具体支路，用一条相应的边来代替。



(a)　　　　　　(b)

图 1-5　电路的图

不难理解，图还可以用来表示许多其他结构，例如一个公路系统，如果忽视道路的宽度而用边来表示各道路，并把各道路的交叉点当作顶点，那末这个系统就可以抽象为一个图。前面的图 1-2 又是一个例子。后面还将举出许多例子。

上面介绍了几何图，但是图的最本质的内容则是一种二元关系，或者说任一条边有两个顶点与它发生联系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线来表示则完全是不必要的。换言之，图的定义还可以进一步抽象化，下一节将介绍抽象图的概念。

§1-3 抽 象 图

为了一些定义和叙述的需要，将用到与集合论有关的符号和概念。这些符号不仅可以使思维简捷，而且形成了一种易于掌握的和有效的工具。下面简要地作一些说明，对于熟悉的读者，主要是了解一下以后所用的符号，不熟悉的读者只需化费不多时间，就可以掌握。

将用大写拉丁字母，如 A、B、G、X 等来表示集合，集合的点或元素则用小写拉丁字母 a、b、x（有时，只要含义明确，也用数字）等来表示。集合 A，其元素为a、b、c、d 则记为(a,b,c,d)。有时，属于一个集合的各个元素，其本身也是一个集合，这样就有一族集合。这种情况下，这些元素将用大写字母来表示。“没有元素”的总集，称为空集，记为ϕ。

设 A 和 B 是已知的两个集合。当 a 是集合 A 的元素时，就记为 $a\in A$，a 不是 A 的元素时，记为 $a\bar{\in} A$。如果 A 包含于 B 内，即 A 的每一元素都是 B 的元素，则 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$。当 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则 A等于 B，记为 $A=B$。若 A 不等于 B，则记为 $A\neq B$。如果 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，A 就真正包含于 B 内，这时 A 称为 B 的真子集，记为 $A\subset\subset B$。

同时属于 A 和 B 的那些元素所成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，见图 1-6a。属于 A 或属于 B 或同时属于二者的那些元素的集合，称为 A 与 B 的合集，记为 $A\cup B$，见图 1-6b。属于 A 但不属于 B 的那些元素的集合，称为 A 中 B 的余集，记为 $A-B$，

见图 1-6c。

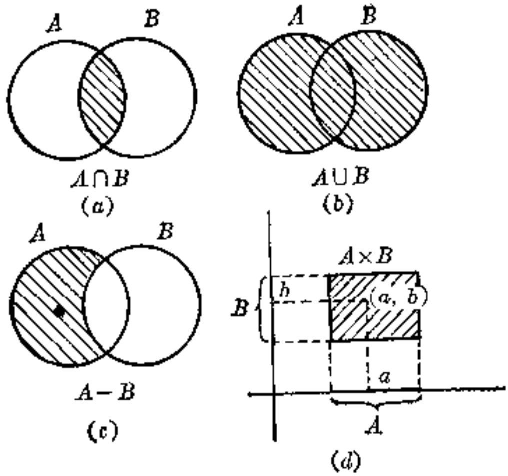


图 1-6　交集、合集、序积等

由 $a\in A$ 与 $b\in B$ 所组成的有序元素偶(a,b)构成的集合(见图 1-6d)称为 A 与 B 的有序积,记为 $A\times B$。一个集合 S 与它自身的有序积 $S\times S$ 将是有序元素偶(s,t)构成的集合,其中 $s\in S$, $t\in S$。除了 $s=t$ 以外,(s,t)与(t,s)显然是不同的。如果用$[s,t]$记集合 S 的无序元素偶,而全部无序元素偶的集合记为 $S\&S$, 那么后者将称为 S 与它自身的无序积。这里$[s,t]$与$[t,s]$将表示同一元素偶,且允许 $s=t$。

给定两个集合 X 和 Y, 又给定一个规律 σ, 使每一元素 $x\in X$ 恒对应于 Y 的一个确定元素(或子集),记为 σx, 这个规律叫做 X 在 Y 里的映射,或称为定义于 X 上而在 Y 里取值的函数。

有了以上的一些初步知识,抽象图(下面仍简称为图)可定义如下:图是由一个非空集合 V 和一个与 V 不相交的集合 E(E 可能是空集),以及一个 E 在 $V\&V$ 里的映射 σ 所组成。V 和 E 的元素分别称为图的顶点和边,而 σ 则称为与此图有关的关联映射。

如果 $e \in E$，v 和 w 为那些顶点使 $\sigma(e)=[v, w]$，则边 e 称为与顶点 v 和 w 关联，或反之。其余的顶点就认为与 e 无关联。与某一个边关联的顶点称为该边的端点，而且认为它们被该边所联接。

这样，一个图 G 可用 $G=(V,E,\sigma)$ 来表示，或者当关联映射隐含时，则可用 (V,E) 来表示。一般 V 和 E 都应当不是空集；只有某些特殊条件下才会产生 E 是空集的情况。

如果 V 和 E 都是有限集合，则 G 称为有限图；否则就称为无限图。本书只研究有限图。

这里介绍抽象图的目的，不仅是为了使图的概念脱开任何几何上的意义，主要是为了便于理解图的应用的广泛性。例如，设 V 是人的集合，边表示人与人之间的关系（如父子关系），那末亲族关系就可以用一个图来表示。当然，这个抽象图仍然可以用几何图来表示，如图 1-7 所示，但是，这里的顶点和边对于描述人与人之间的关系并没有任何实质的几何意义。不过，通过图 1-7 可以更形象地来理解这些关系，所以只要有可能，总是用几何图来表示一个抽象图。这是"图"的命名的由来，同时，这样做有助于我们理解图的许多有关性质。

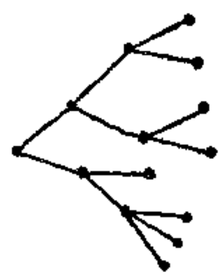


图 1-7　表示亲族关系的图

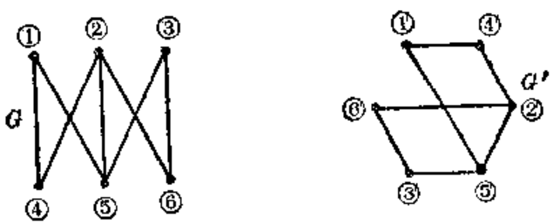
其他例子很多；例如，走棋的规律，一个工程的工序及其执行，语法上的关系，军事部门中指挥员和他的每一个部下的关系，等等，都可以用抽象图来描述。

上面提到了抽象图用几何图来表示的问题。这就是说，一个抽象图与一个相应的几何图具有"同构"的性质。同构性（isomorphism）可以定义如下：如果图 $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$ 的 V 和 V' 及 E 和 E' 之间在保持关联性质的条件下为一一对应，则 G 和

G'称为同构。换言之，当且仅当图 G' 中的相应边 e' 和顶点 v' 关联，则图 G 中的边 e 和顶点 v 关联。如果抽象图 G 与几何图 G' 同构，则 G' 称为 G 的"几何实现"。显然，几何图彼此之间也可以具有同构性。

今后，我们所研究的主要将是几何图，且简称之为图。

如果把一个图 G 的顶点和边标以适当的号码(或字母)，则 G 称为标号图。今后，讨论的主要是标号图，至于是否具体标号则视情况而定。为了便于区分起见，顶点的标号在图示中有时将带有一个小圆圈。图 1-8a 为一标号图 G，图 1-8b 则为与 a 同构的另一个图 G'。这两个图表面上看来截然不同，但不难说明它们是同构的。如以 $V=$(①,②,③,④,⑤,⑥) 表示 G 的顶点集合，$V'=$(①',②',③',④',⑤',⑥')表示 G' 的顶点集合，则容易看出这两个图的对应边与对应顶点关联，就是说，关联性质被保持。



(a) (b)

图 1-8 同构的标号图

§1-4 描述图的局部结构的术语

为了说明一个图的结构特点，引进下列一些术语，某些在前面已引用过。

当一条边 e 与两个顶点 v 和 w 有关联，v 和 w 称为 e 的端点。为了叙述方便，以顶点 v 和 w 做端点的边记为 $e=[v,w]$。如果 $v=w$，则 v 是 e 的唯一端点，e 称为自环。如果两条边 e_1 和 e_2 与顶

点 v,w 关联，即 $e_1=[v,w]$和 $e_2=[v,w]$，则 e_1 和 e_2 称为并行边。两个自环与同一顶点关联也称为并行边。前已指出，如果图中存在并行边，则称此图为多重的。

如果顶点 v 和 w 之间至少存在一条边 e，则 v 和 w 称为相邻的顶点。同样，如果两条边 e_1 和 e_2 至少有一个共同的顶点，则 e_1 和 e_2 称为相邻的边。注意，相邻的性质是指相同元素（边或顶点）之间的关系，而关联性质则指不同元素之间的关系。

与一个顶点 v 关联的边的数目称为 v 的次数（若 v 上有一个自环，则作为 2 计算），记为 $d(v)$。如果 $d(v)=0$，即没有任何边与 v 关联，顶点 v 称为孤立点。如果一个图的全部顶点都为孤立的，此图称为退化图。

一个图 $G=(V,E)$的子图 $G_s=(V_s,E_s)$是这样的一个图，其 V_s 和 E_s 分别为 V 和 E 的子集。如果 $V_s\subset\subset V$ 和 $E_s\subset\subset E$，即 V_s 和 E_s 分别为 V 和 E 的真子集，则 G_s 为 G 的真子图。如果 $V_s=V$，则子图 G_s 称为 G 的生成[①]子图。

为了说明上述的定义，参阅图 1-9。图 1-9a 为一个图 G。顶

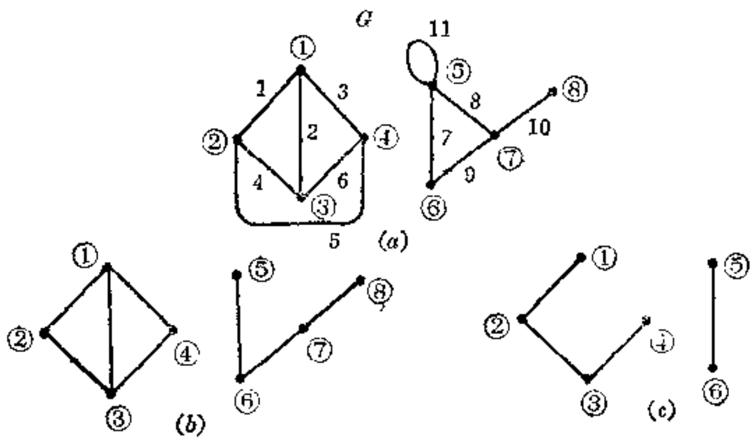


图 1-9　图 G 及其子图

① Spanning

点①,②;①,③;①,④;⑤,⑥;等为相邻的,但是顶点①,⑤;⑤,⑧;等是不相邻的。边1,2,3;8,9,10为相邻的;但是边1,6;3,4等为不相邻的。

顶点①的次数d(①)=3,顶点⑧的次数d(⑧)=1,其他如d(⑥)=2,d(⑤)=4。

图1-9b为G的生成子图,因为它包含G的全部顶点。图1-9c为G的一个(真)子图。

§1-5 边的序列·路·回路

直观上不难理解,有可能从一个图的某一顶点出发,沿着一些边连续移动,从而达到另一指定的顶点,或回到原来的出发点。这种由边的序列构成的路径在图论中占有重要地位,例如人们熟悉的回路就是一个例子。

下面是有关边的序列的正式定义。对于图G的n个边$e_1, e_2, \cdots, e_n$,如果存在$n+1$个顶点序列$v_0, v_1, \cdots, v_n$,使得$e_k=[v_{k-1}, v_k]$,$k=1,2,\cdots,n$,则这些边构成了一个边的序列,换言之,每一条边e_k和e_{k-1}以一个端点相衔接,和e_{k+1}以另一个端点相衔接。在这个定义中,并没有规定边必须是相异的。同样,也没有规定顶点必须是相异的。这种边的序列称为链。

当$v_0=v_n$时,此边的序列或链是闭合的,而当$v_0 \neq v_n$时,则是开的。在后一种情况下,此链是从顶点v_0到v_n,v_0称为链的起点,v_n称为链的终点。链中含有n条边时,则称它的长为n。任一条边可看作是长为1的链。

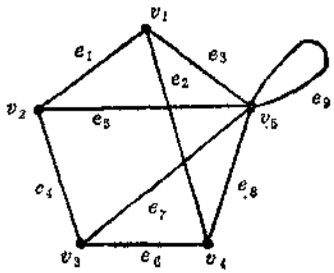


图1-10 边的序列

为了说明上述定义,可参阅图1-10。边的序列e_1, e_3, e_9, e_7,

e_6 是长为 5，从顶点 v_1 到 v_4 的一条链；相应的顶点序列为 $v_1, v_2, v_5, v_5, v_3, v_4$。边的序列 $e_2, e_6, e_7, e_8, e_6, e_4, e_1$ 是长为 7 的闭合链。

如果链中所用到的边都相异，则称为单纯链，如果链中每个顶点的出现不超过一次（显然，这时用到的边都将相异），则称为初等链。

一条开的，初等的链称为路（path）。如果一条路用的顶点数为 $n+1$，则用到的边数为 n，这条路的长为 n。

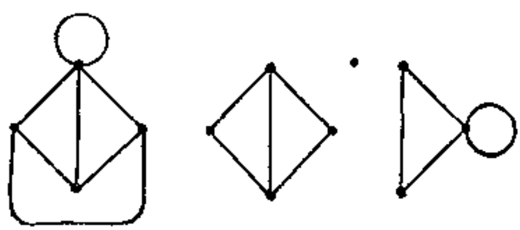
一条闭合的，初等的链称为回路（这里沿用了电路理论中常用的名称）。所以回路是一条起点和终点重合的初等链。

为了说明上述定义，参阅图 1-10。边的序列 $[v_1, v_2]$，$[v_2, v_3]$，$[v_3, v_4]$，$[v_4, v_5]$，即 e_1, e_4, e_6, e_8，构成的一条长为 4 的路。边的序列 $[v_1, v_4]$，$[v_4, v_5]$，$[v_5, v_2]$，$[v_2, v_1]$，即 e_2, e_8, e_5, e_1，是一个回路；但是 $[v_1, v_4]$，$[v_4, v_5]$，$[v_5, v_2]$，$[v_2, v_3]$，$[v_3, v_5]$，$[v_5, v_1]$ 虽然是闭合链，但不是初等的，所以不是一个回路。

按上述定义，可见图 G 的一个回路是 G 的一个子图，其每个顶点的次数恰好是 2。

§1-6 连 通 性

一个图，如果它的每两个相异顶点之间总存在自一顶点联到另一顶点的一条路，则这个图是连通的。直观上，一个连通图本身构成了一个整体部分。图 1-11a 为一个连通图，1-11b 是非连通



(a) (b)

图 1-11 连通图与非连通图

的或分离的。

一个非连通图可以看作是由几个连通的部分所组成的，每一这种连通部分称为该图的一个分离部分或简称一个部分。所以图的一个部分是该图的一个包含极大边数的连通子图。一个孤立顶点也算作一个部分。图 1-11b 的图包含三个部分，其中有一个部分只有一个孤立顶点。

如果一个连通图中包含回路，则移去回路的任一条边后，剩下的子图仍将是连通的。

§1-7 树 和 林

树的概念在图论中占有重要地位。前曾指出，图论中许多术语的命名很不统一，但“树”却几乎是所有图论著作中唯一所通用的命名。

一个连通图 G 的一个子图，如果满足下列条件就称为 G 的一个树，即此子图：(1)是连通的，(2)没有回路，(3) 包含 G 的全部顶点。例如，对于图 1-12a 所示的图 G，它的几个树分别示于同图 b、c、d 中，但 e 和 f 则不是它的一个树，因为 e 包含一个回路，f 则是不连通的。

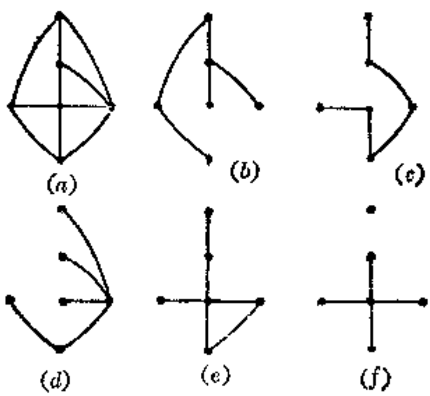


图 1-12 树

上述关于树的定义是电路理论中所常用的。这种树称为图G的生成树，因为它包含了G的全部顶点。在图论中，树的一般定义则比较广义一些，即凡是一个连通的且无回路的图定义为一个树。按照这个定义，图1-12f包含一个树和一个顶点，但不是G的生成树。所以这两个定义略有差别。今后我们谈到树，若不加说明，则指生成树。

同一连通图G具有许多不同的树，一个图的全部相异树的总数之多是惊人的。后面将介绍树的计数方法。

一个非连通图的各个部分，各自都有它们的树。这样就构成一个林。一个由k个分离的连通部分所组成的，且不包含任何回路的图，称为一个具有k个树的林。

树具有许多重要的性质。在一个树的两个顶点之间，必然存在一条且仅有一条路。前一点是由于树的连通性质所决定的；后一点则是由于树不包含回路所决定的，因为如果两顶点之间存在两条路，则将有回路出现。

把一个树的任一边移去，将使图变成不连通的，这是因为被移去的边是联接其两个端点的唯一条路。反之，对于任何连通的且不是一个树的图，总有可能移去它的某些边(即包含在回路中的边)而仍保持图的连通性。所以一个树是由那些恰好足够把全部顶点联接起来的边所构成；或者说，在某种意义上，树是一种极小的连通图，即它不包含任何包括全部顶点但又连通的真子图。

在一个图里，若只有一条边与顶点x关联，则x称为悬挂点。一个树至少有两个悬挂点。这可以证明如下：设T是一个树，并假设它没有或只有一个悬挂点。设想一个旅游者，在图上沿着边旅游，自任一点出发(对第一种情况来说)，或者自悬挂点出发(对第二种情况来说)；若规定不使用同一边两次，由于T没有回路，他就不能遇到同一顶点两次。但是另一方面，当旅游者到达一点v之