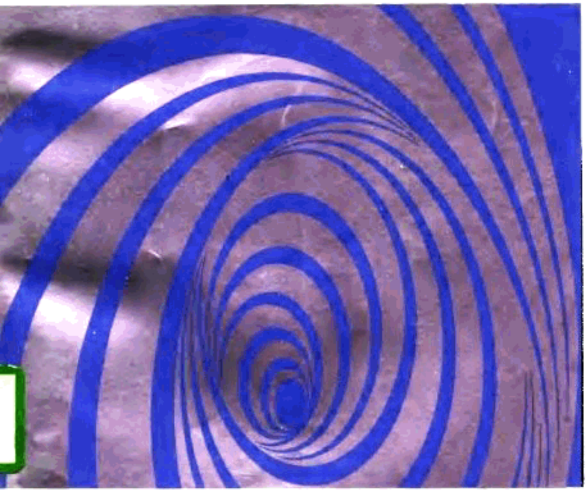
经济数学基础

Jingji Shuxue Jichu

丁正中　主编



浙江科学技术出版社

经济数学基础

Jingji Shuxue Jichu

丁正中 主编

浙江科学技术出版社

（浙）新登字第3号

责任编辑：盛有根
封面设计：孙　菁

经济数学基础
丁正中主编
*
浙江科学技术出版社出版
浙江印刷集团公司印刷
浙江省新华书店发行
开本：850×1168　1/32　印张：15.25　字数：382000
1996年8月第一版
1996年8月第一次印刷
ISBN 7-5341-0884-5/O·19

定　价：17.50元

前　言

我国现代化建设的迅速发展，需要造就一大批掌握现代经济理论与现代管理知识的专门人材. 在现代经济学与现代管理科学中，由于日益强调定量分析，因此大量引进了近代数学的概念、理论及其方法. 几乎在每一本现代经济理论的书籍中，都可找出一大堆近代数学的符号与公式. 可以说，不懂得近代数学，特别是经济应用数学，在现代经济领域里将寸步难行.

大学中的经济应用数学通常包括应用数理统计、运筹学和计量经济学等基本课程，而作为这些课程的共同基础是以微积分为主体的高等数学知识. 由于高等数学具有高度的抽象性与严密的逻辑性等特点，故对于刚入学的文科本、专科学生来说，历来是一门较难学好的课程. 这个问题还反映在至今还没有一本公认的比较有特色的适合于经济管理类本、专科学生使用的经济数学基础教科书. 多年来的教学实践，使我们深切地体会到这方面的迫切要求. 为此，我们试编了这本教材，以期起到抛砖引玉的作用.

在编写这本教材时，我们在以下几个方面作了一些尝试：

(1)注意对基本概念作深入浅出的描述. 在基本概念的引入时，例如在介绍极限、导数、弹性、微分等概念时，我们对它们的背景问题以及这些概念的实质都作了详尽的阐述，以希望学生不仅

知道这些概念的抽象数学定义，并且还能透过这些字眼知道为什么要这样下定义，从而能够学到一点如何对实际问题进行数学定量化刻划的思想与方法.

(2)增大理论在实际中应用的部分的篇幅.考虑到文科本、专科学生的特点以及高等数学在经济管理类系科中的作用，我们对数学理论部分的内容作了较大限度的压缩，一些并非必要的理论证明和应用意义不大的内容，都被作了删略，以便有较多的篇幅来叙述应用方面的知识.例如，我们加强了对函数最大、最小值问题的讨论，增加了导数以及与之相关的“边际”、“弹性”等概念在经济学上应用的例子等.

(3)对于普通教科书上一些常见的概念性错误及易混淆之处，例如复合函数、反函数、反正弦函数等，作了必要的澄清与纠正.

(4)注意与中学知识的衔接.例如，近年来中学数学教学中对于文科学生均删去了有关反三角函数的知识，我们特地作了专节介绍，以使前后知识不脱节.

(5)重视练习题的配备.一套精心编写的练习题往往可以使一本教材增色不少.数学的特点决定了学生必须通过演算一定量难易适当的习题，才能真正领会概念，掌握定理及公式，故我们在习题编写方面作了不少努力，以期达到上述目的.除了在每一节后面按照常规配备了一些练习题之外，我们在每一章后面还编写了复习题.这些复习题分为：客观性习题、基本计算题、应用题及少量证明题 4 大部分，每章后的这部分题目主要是供学生学完该章后进行系统复习或准备阶段测验和期末考试之用的.

本教材是针对每周时数为 4 学时，共 33～34 教学周数的本科少学时或专科教学需要而编写的.为了便于教师的教学以及学生的自学，我们尽量按 2 个学时的讲授内容作为一节进行章节划分.全书一共分 8 章，第 1 章和第 2 章由丁正中教授编写，第 3 章和第 4 章由翁嫱娣讲师编写，第 5 章和第 6 章由王海敏讲师编写，第 7

章和第8章由朱灵讲师编写，最后由丁正中教授总纂各章．在编写过程中，我们主要参考了杭州商学院1988年至1994年内部所用的两版同名教材．由于有那一本教材的基础，我们得以在较短的时间里完成此书的编写．上两版教材编写时，还有王淑茜副教授、王爱娟副教授、谈善宝副教授和朱晓航讲师的辛勤劳动．

由于编者的水平有限，错误不妥之处在所难免，恳切希望广大读者批评指正．

编　者

1995年2月

目　　录

第一章 函 数

§1.1 变 量

一、变量概念

我们在观察各种经济现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量. 这些量在我们考察过程中常常会不断变化，例如某种商品的市场需求量，某种股票的股市价格等等. 这种量，我们称之为“**变量**”.

在数学上，我们总是抽去变量的具体含义来研究它们在某一过程中的数值变化情况，并且常常用小写字母 $x,y,z,\cdots$ 简练地称呼各种所要研究的变量. 需要注意的是，为了数学研究的方便，上述变量的概念应广义地理解. 这里提到变量的所谓“**变化**”，并不排斥变量在某一过程中始终保持一个数值的情况. 这就是说，可以有一种“特殊”的变量，它在某一阶段(甚至整个过程)中所取的数值并不起变化. 例如，市场经济下某种商品的价格是一个变量，但在某个时期内这个价格恒定不变.

确定一个变量的要素在于确定它的**变化范围**，也就是指出该变量的取值范围. 本书研究的变量的变化范围均为实数集合中的某一个子集. 变量的变化范围通常是用大写字母 X、Y、D、Z，$\cdots$ 来表示之.

变量的取值可以是**离散型**的. 例如，某个给定变量 x 的所有取值为 $1,2,3,\cdots,6,7$. 又如，某个给定变量 y 的所有取值为 1，

$1/2,1/3,\cdots,1/n,\cdots$（$n$ 为自然数）. 根据前面的规定，这两个例子分别可以叙述为："给定（离散型）变量 $x\in X=\{1,2,3,\cdots,6,7\}$"和"给定（离散型）变量 $y\in Y=\{1,1/2,1/3,\cdots,1/n,\cdots\}$（$n$ 为自然数）".

变量的取值也可以是**连续型**的. 例如，给定变量 x 的取值为满足不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的一切实数 x，或者说："给定（连续型）变量 $x\in X=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

二、区间与邻域

连续型变量是本教材的主要研究对象. 通常，它的变化范围可表示为一个或几个所谓的"**区间**". 本教材中采用的各类区间的名称、意义及记号介绍如下：

设 a、b 为两个实常数，且 $a<b$.

1. 闭区间 $[a,b]$

我们把满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体，叫做"**闭区间**"，记为 $[a,b]$. 换言之，

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

2. 开区间 (a,b)

我们把满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体，叫做"**开区间**"，记为 (a,b). 换言之，

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

3. 半开区间（也称"半闭区间"）$[a,b)$ 或 $(a,b]$. 它们的意义是：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上各种情况中，均称 a,b 为区间的"**端点**"，而 $b-a$ 叫做区间的长度. 在无需辨明端点是否在内时，以上各种情况可以统一简称为"**区间**". 它们的图示如下：

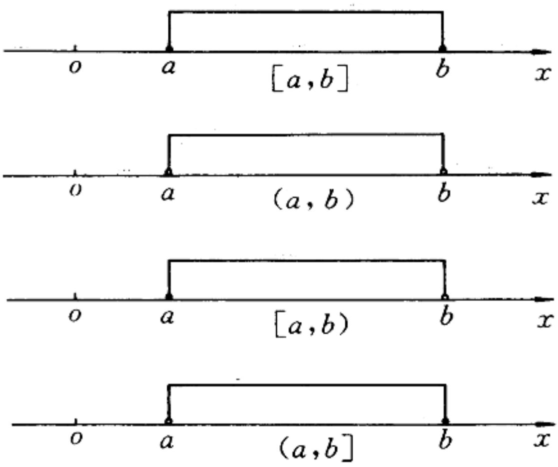


图 1-1

4. 无穷型区间

我们把满足不等式"$x \geqslant a$"的一切实数的全体,叫做"**(半)无穷区间**",记为$[a,+\infty)$. 也就是,

$$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}.$$

类似地还有"**(半)无穷区间**"$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$和$(-\infty,b)$,分别规定如下:

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\},$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid -\infty<x \leqslant b\},$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty<x<b\}.$$

另外还有"**无穷区间**"$(-\infty,+\infty)$,它的意义是全体实数集合.

它们的图示如下:

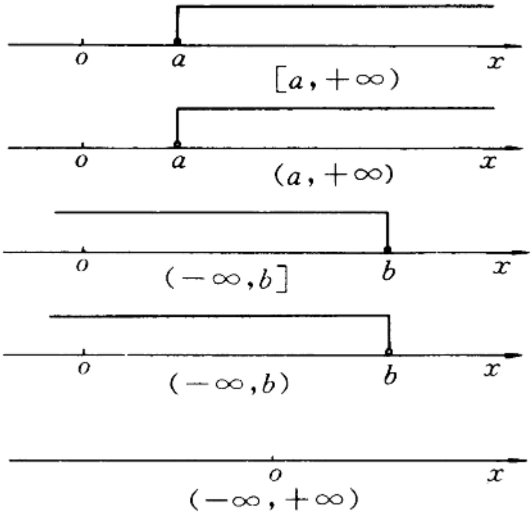


图 1-2

5. 邻域

设 a 为实常数，δ 为正常数，我们把满足不等式“$|x-a|<\delta$”的一切实数的全体，叫做**“以 a 为中心，以 δ 为半径的邻域”**，或简称为**“a 的 δ 邻域”**，记为：

$$(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

类似地，把满足不等式“$0<|x-a|<\delta$”的一切实数的全体，叫做**“以 a 为中心，以 δ 为半径的去心邻域”**，或简称为**“a 的 δ 去心邻域”**，记为：

$$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

把满足不等式“$-\delta<x-a<0$”的一切实数的全体，叫做**“以 a

为中心，以 δ 为半径的左邻域"，或简称为"**a 的 δ 左邻域**"，记为：

$$(a-\delta,a)=\{x\mid-\delta<x-a<0\}.$$

同时，把满足不等式"$0<x-a<\delta$"的一切实数的全体，叫做"**以 a 为中心，以 δ 为半径的右邻域**"，或简称为"**a 的 δ 右邻域**"，记为：

$$(a,a+\delta)=\{x\mid 0<x-a<\delta\}.$$

各种邻域的图示如下：

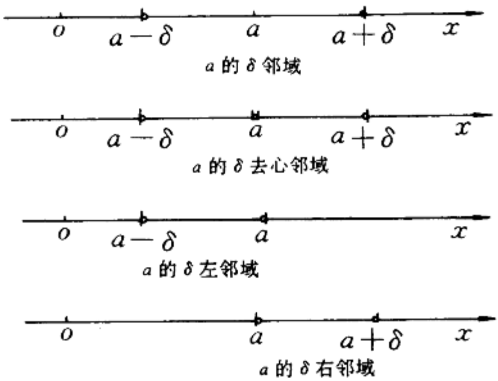


图 1-3

显然，"a 的 δ 邻域"是一个开区间，其长度为 2δ. "a 的 δ 去心邻域"是两个开区间的并集，每个开区间的长度均为 δ. 这两个开区间，分别就是"a 的 δ 右邻域"和"a 的 δ 左邻域".

例 1 某地某天，最高温度为 30℃，最低温度为 20℃. 这样，这天的气温 t 是一个变量，它的变化范围是 $20\leqslant t\leqslant 30$. 也就是变量 $t\in[20,30]$.

例 2 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 1$

(2)$|x+1|\leqslant 1$

(3)$|x-a|<\varepsilon$ (a,ε 为常数,$\varepsilon>0$)

(4)$|x|>b$ ($b>0$ 为常数)

(5)$|x+2|>3$

(6)$x^2<9$

解 (1) 由$|x|\leqslant 1$,利用绝对值知识,可得

$$-1\leqslant x\leqslant 1,$$

于是

$$\{x \mid |x|\leqslant 1\}=[-1,1].$$

(2) 由$|x+1|\leqslant 1$,可得$-1\leqslant x+1\leqslant 1$

或 $-2\leqslant x\leqslant 0$,于是

$$\{x \mid |x+1|\leqslant 1\}=[-2,0].$$

(3) 由$|x-a|<\varepsilon$,可得$-\varepsilon<x-a<\varepsilon$

或 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$,于是

$$\{x \mid |x-a|<\varepsilon\}=(a-\varepsilon,a+\varepsilon).$$

所求集合即为“以 a 为中心,以 ε 为半径的邻域(a 的 ε 邻域)”.

(4) 由$|x|>b$,可得 $x>b$ 或 $x<-b$.

因此

$$\{x \mid |x|>b\}=(-\infty,-b)\cup(b,+\infty).$$

(5) 由$|x+2|>3$,可得 $x+2>3$ 或 $x+2<-3$. 即 $x>1$

或 $x<-5$.

因此

$$\{x \mid |x+2|>3\}=(-\infty,-5)\cup(1,+\infty).$$

(6) 由 $x^2<9$,可得$|x|<3$,故有

$$\{x|x^2<9\}=(-3,3).$$

习 题 1.1

1. 用区间表示满足下面不等式的变量的变化范围：

(1) $-2<x\leqslant 4$； (2) $y\leqslant 0$；

(3) $z^2\leqslant 16$； (4) $|x-2|<3$；

(5) $|3y-2|\geqslant 1$.

2. 用区间表示下面的邻域：

(1) 1 的 0.01 邻域； (2) -2 的 1000 邻域；

(3) 0 的 0.1 去心邻域； (4) -1 的 2 左邻域；

(5) x_0 的 ε 右邻域($\varepsilon>0$).

§1.2 函数概念

一、函数的定义

在中学数学中，我们已接触过函数这一概念. 这里，我们作一简要的复习，并着重指出其中一些要点.

在同一个经济现象中，往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 现在我们先就两个变量的情况(多于两个变量的情形以后在第 7 章再讲)举出几个例子.

例 1 考虑工厂生产某种产品的总成本 c 与该产品生产数量 q 之间的相依关系. 它们之间的关系可以由公式

$$c=c_0+aq$$

给定. 这里 c_0 是生产该产品的固定成本，它与生产出多少产品无关，为一常数；a 是每生产一个单位产品的成本，也为一个固定的常数. 当生产数量 q 在$(0,+\infty)$内任意取定一个整数值时，由上式就可以确定此时的总成本的相应数值.