

计算结构力学

秦荣著

(1) $\oplus_i \oplus_j = \oplus_i + \oplus_j$
(2) $\oplus_i \oplus_j = \oplus_j \oplus_i$
(3) $\oplus_i \oplus_i = 0$
(4) $\oplus_i^2 = \oplus_i \cdot \oplus_i = 0$
(5) $2\oplus_i = \oplus_i + \oplus_i$
(6) $\oplus_i \pm 0 = \oplus_i$
(7) $\oplus_i \cdot 0 = 0$
(8) $\oplus_i / \oplus_i = 1$
(9) $\oplus_i + a = \oplus_i$
(10) $\oplus_i \cdot \oplus_j = \oplus_i \cdot \oplus_j$
 $5\oplus_i = \oplus_i + \oplus_i + \oplus_i + \oplus_i + \oplus_i$
 $k\oplus_i = \oplus_i + \oplus_i + \dots + \oplus_i$
(为白数)

科学出版社

计算结构力学

秦 荣 著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书在科研的基础上,结合国内外有关成果介绍了结构工程分析的新理论、新方法。本书内容新颖,既有理论分析,又有实际应用,内容包括结构理论、弹性理论、非线性理论、结构动力学、结构稳定理论、广义变分原理、样条函数方法、半解析半离散法、耦合法及其工程应用等。

本书可供土木工程及水利工程方面的科技人员,尤其是从事结构分析、设计和研究的专业人员,以及高等院校相关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算结构力学/秦荣著. —北京:科学出版社,2001
ISBN 7-03-009278-3

Ⅰ. 计… Ⅱ. 秦… Ⅲ. 计算力学;结构力学 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 13745 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

绿露印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 6 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2001 年 6 月第一次印刷 印张:44
印数:1—2 500 字数:1 030 000

定价:84.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈杨中〉)

前 言

现代化建设中存在着许多复杂的力学问题。这些问题解决得好坏,直接影响着各种工程的安全及经济问题。目前,国内外分析工程中的力学问题,主要采用有限元法。

有限元法是从 20 世纪 50 年代开始发展起来的,是解决力学问题的有力工具,为解决工程中的力学问题开创了全新的局面,贡献极大。但在实践中,它也逐步暴露了自身难以克服的一些缺点,最突出的一点是所解问题的复杂性与经费及计算机能力之间的矛盾很大。如果利用有限元法分析工程中的复杂力学问题,则往往带来巨大的困难。因此,还需要另外创立一些经济有效的新理论、新方法。在有限元法建立之后,国内外在继续研究有限元法的同时,还致力于研究力学中的样条函数方法、半解析半离散方法及各种耦合法,改进了有限元法,创立了有限条法、边界元法、现代加权残数法、半解析法及样条函数方法,为解决工程中的力学问题开拓了新途径。

1978 年以来,作者结合土木、水利及建筑工程的研究任务,致力于研究工程科学及力学中的样条函数方法,提出了一些新理论和新方法:样条有限点法(1979)、样条加权残数法(1980)、样条边界元法(1980)、样条子域法(1980)、QR 法(1984)、样条边界元-能量配点法(1986)、样条边界元-QR 法(1988)及样条无限元-QR 法(1996)。这些方法不仅有有限元法、有限条法及边界元法的优点,而且还有样条函数方法的优点,创造性地集有限元法、有限条法、边界元法及样条函数方法的优点于一体,成功地克服了它们的缺点,突破了传统方法,开拓了结构力学新领域。这些成果已用于土木、水利、桥梁及建筑工程,分析过三维、断裂、复合、耦合、动态、波动、无限域、非线性等复杂问题,不仅计算简便,而且精度也高,为解决工程中的力学问题开拓了一个新途径,并荣获省部级科技进步二等奖 5 项及广西自然科学优秀成果一等奖 1 项。同行专家鉴定认为,这些成果为国内外首创,达到国际先进水平。这些成果大多数在国内外已公开发表,被引用很多,有些论文被世界著名权威文献 EI(美国)、PЖ(前苏联)、ISTP(美国)及 SCI(美国)收录,日本、美国、英国、意大利、保加利亚、新加坡、德国、前苏联、罗马尼亚、法国、以色列等国家有关学者也来函索取有关文献,在国内外学术界产生了广泛的影响。

本书是在上述基础上撰写成的,是作者 20 年来科研成果的总结,是一部科研成果专著。

本书共十八章,内容包含样条函数、变分原理、广义变分原理、现代结构控制理论、随机模糊力学、灰色力学、结构动力学、结构稳定性、结构非线性理论、结构与介质相互作用理论,以及各种样条函数方法及其在杆系结构、弹性力学、板壳、水工结构、高层建筑结构、大跨度桥梁结构、岩土工程中的应用。本书内容丰富、新颖、富有创造性,突破了传统方法,既有理论,又有应用,不仅可用于结构工程、桥梁工程、水利工程、地下工程、岩土工程、海洋工程,而且对航空、造船、矿山、机械、化工及国防工程也适用。因此,本书适用范围很广,通用性很强。

1978 年以来,作者研究过许多项目。这些项目分别获得国家自然科学基金委员会、广

西科委、广西教委、广西交通厅、广西水利厅、广西电力局、广西建设厅及广西大学资助,本书包含了这些资助项目的许多研究成果,现借此机会向他们表示衷心的感谢!

在本书的写作过程中,得到国内许多同行的热情关怀和大力支持,我的许多研究生用这些新理论、新方法算过许多例题并分析过不少工程,特此表示感谢!

本书由王道堂教授主审,他在审校中付出了辛勤劳动,提出了宝贵意见,特借此机会向他表示感谢!

由于作者水平有限,不妥之处在所难免,敬请批评指正。

秦荣

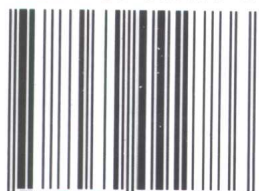
2000年9月于广西大学

(TU-0134.0101)

责任编辑: 杨家福

封面设计: 张 放

ISBN 7-03-009278-3



9 787030 092786 >

ISBN 7-03-009278-3/TU · 134

定 价: 84.00 元

目 录

前言

第一章 样条函数	1
1.1 基本概念	1
1.2 B 样条函数	4
1.3 B 样条函数的数值方法	9
1.4 样条基函数.....	13
1.5 B 样条内积的积分方法.....	16
1.6 非均匀分划的 B 样条函数	23
1.7 多维样条函数.....	28
1.8 附录.....	35
参考文献	45
第二章 杆系结构样条函数方法	47
2.1 变分原理.....	47
2.2 广义变分原理.....	51
2.3 样条梁子域.....	53
2.4 样条拱子域.....	60
2.5 样条厚梁子域.....	62
2.6 样条空间梁子域.....	65
2.7 样条厚梁子域的几种作法.....	68
2.8 带刚域的样条梁子域.....	76
2.9 高层框架分析的 QR 法.....	77
2.10 桁架拱分析的 QR 法	82
2.11 计算例题	82
2.12 附录	88
参考文献	91
第三章 弹性力学样条函数方法	93
3.1 变分原理.....	93
3.2 广义变分原理.....	97
3.3 样条有限点法	101
3.4 QR 法	108
3.5 样条子域法	110
3.6 样条平面子域	112
3.7 轴对称问题	117
3.8 应力公式	120

3.9	三维空间问题	120
3.10	样条三维子域	122
3.11	映射样条子域	129
3.12	样条边界元法	132
3.13	样条无限子域	139
3.14	计算例题	142
	参考文献	144
第四章	板壳样条函数方法	146
4.1	变分原理	146
4.2	广义变分原理	148
4.3	板壳分析的样条有限点法	150
4.4	板壳分析的 QR 法	156
4.5	板壳分析的样条子域法	161
4.6	样条薄板子域	162
4.7	样条扁壳子域	168
4.8	样条平板壳子域	173
4.9	开孔板壳的样条边界元法	175
4.10	计算例题	181
4.11	附录	182
	参考文献	186
第五章	厚板厚壳样条函数方法	187
5.1	广义变分原理	187
5.2	复合材料板壳分析的样条有限点法	191
5.3	厚板壳分析的样条有限点法	198
5.4	厚板厚壳分析的 QR 法	205
5.5	样条厚板厚壳有限点法的几种作法	210
5.6	厚板厚壳分析的样条子域法	223
5.7	样条厚板矩形子域	223
5.8	样条厚壳子域	236
5.9	计算例题	244
	参考文献	246
第六章	结构动力分析的新方法	247
6.1	瞬时变分原理	247
6.2	建立结构动力方程的新方法	255
6.3	结构动力特性的算法	263
6.4	结构动力响应的解法	281
6.5	算法稳定性	292
6.6	算法精度	295
6.7	超越现象	300

6.8	5次样条加权残数法	301
6.9	计算例题	305
	参考文献	307
第七章	结构稳定性分析的新方法	308
7.1	变分原理	308
7.2	板壳稳定性分析的样条有限点法	309
7.3	高层框架稳定性分析的 QR 法	312
7.4	结构几何非线性稳定分析的新方法	315
7.5	结构双重非线性稳定分析的新方法	317
7.6	结构材料非线性稳定分析的新方法	320
7.7	判断结构稳定性准则	321
7.8	结构初始缺陷	322
7.9	结构非线性稳定分析的算法	324
7.10	计算例题	327
7.11	附录	328
	参考文献	329
第八章	材料本构关系	330
8.1	屈服条件	330
8.2	常用的几种屈服条件	331
8.3	加载条件	334
8.4	弹塑性本构关系	338
8.5	弹粘塑性本构关系	350
8.6	弹塑性应变理论	354
	参考文献	356
第九章	结构材料非线性分析的新方法	357
9.1	广义变分原理	357
9.2	高层框架弹塑性分析的 QR 法	360
9.3	薄板弹塑性分析的样条函数方法	365
9.4	弹塑性二维问题	382
9.5	薄壳弹塑性分析的新方法	396
9.6	弹塑性样条子域	402
9.7	计算例题	405
9.8	附录	408
	参考文献	410
第十章	结构几何非线性分析的新方法	411
10.1	有限变形弹性理论	411
10.2	变分原理	415
10.3	梁的几何非线性问题	420
10.4	高层框架几何非线性问题	433

10.5	薄板几何非线性问题	437
10.6	薄壳几何非线性问题	449
10.7	三维弹性体几何非线性问题	456
10.8	摄动样条函数方法	459
10.9	计算例题	460
10.10	附录	461
	参考文献	461
第十一章	结构双重非线性分析的新方法	463
11.1	变分原理	463
11.2	梁的双重非线性问题	466
11.3	高层框架双重非线性问题	470
11.4	板壳双重非线性问题	472
11.5	薄壳双重非线性问题	478
11.6	考虑剪切变形的框架双重非线性	481
11.7	计算例题	489
	参考文献	491
第十二章	结构双重非线性动力分析的新方法	492
12.1	梁的双重非线性动力问题	492
12.2	高层框架双重非线性动力分析的 QR 法	494
12.3	板壳双重非线性动力分析的样条有限点法	496
12.4	非线性动力响应的算法	498
12.5	计算例题	500
	参考文献	502
第十三章	高层与超高层建筑结构分析的新方法	503
13.1	高层建筑结构分析的一些进展	503
13.2	常规结构体系分析的 QR 法	506
13.3	高层建筑结构分析的样条子域法	510
13.4	带转换层的高层建筑结构分析的新方法	514
13.5	巨型框架结构体系分析的新方法	516
13.6	高层建筑结构动力分析的新方法	516
13.7	高层建筑结构非线性分析方法	518
13.8	结构与地基耦合体系分析方法	519
13.9	计算例题	519
13.10	附录	525
	参考文献	533
第十四章	拱坝分析的样条函数方法	535
14.1	拱坝分析的 QR 法	535
14.2	水-拱坝-地基耦合体系的分析方法	540
14.3	拱坝非线性分析方法	546

14.4	计算例题	551
	参考文献	552
第十五章	钢管混凝土拱桥分析的新方法	554
15.1	钢管混凝土桁架分析的 QR 法	554
15.2	大跨度拱几何非线性分析的新方法	557
15.3	大跨度拱材料非线性分析的新方法	561
15.4	大跨度拱双重非线性分析的新方法	565
15.5	大跨度拱非线性稳定分析的新方法	569
15.6	大跨度拱非线性动力分析的新方法	571
15.7	钢管混凝土拱温度问题	573
15.8	计算例题	579
	参考文献	586
第十六章	耦合体系分析的样条耦合法	587
16.1	层状地基分析的样条子域法	587
16.2	弹塑性地基分析的 QR 法	596
16.3	岩土弹塑性分析方法	600
16.4	弹性地基薄板分析方法	604
16.5	弹性地基扁壳分析方法	610
16.6	结构与地基相互作用分析方法	613
16.7	桩与土相互作用分析的 QR 法	618
16.8	桩与桩相互作用分析的 QR 法	623
16.9	结构-基础-地基耦合体系分析方法	627
16.10	相邻结构相互作用分析方法	633
16.11	地下工程分析的样条无限元-QR 法	637
16.12	计算例题	639
	参考文献	645
第十七章	随机模糊力学	646
17.1	力学中的模糊因素	646
17.2	随机力学	648
17.3	模糊力学	649
17.4	随机模糊力学	651
17.5	灰色力学	653
	参考文献	659
第十八章	现代结构控制理论	660
18.1	基本概念	660
18.2	状态空间理论	663
18.3	最优控制理论	669
18.4	结构控制理论	679
18.5	随机最优控制理论	692
	参考文献	694

第一章 样条函数

样条函数是现代函数逼近的一个十分活跃的分支,是计算方法的重要基础之一,应用很广,用它可以创造出一些新的结构分析方法。样条函数的种类很多,但目前以 B 样条函数为优。本章主要介绍 B 样条函数的一些基本理论及构造方法^[1]。

1.1 基本概念

样条函数来源于实际中的样条曲线。本节从梁的微分方程出发来定义样条函数。梁的微分方程为

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (1.1)$$

式中 $q(x)$ 为梁上的横向分布荷载, w 为梁的挠度函数。梁上荷载 q 与剪力有关系

$$q = Q_{,x} \quad (1.2)$$

式中 $Q_{,x}$ 为 Q 对 x 的一阶导数。

图 1.1 是一个悬臂梁。如果悬臂梁在 $x=0$ 处受一个单位集中荷载 ($P=1$) 作用,则这个梁的剪力方程为

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (1.3)$$

在 $x=0$ 处的左极限为 0,右极限为 1。因此这个悬臂梁的剪力图在集中荷载作用点 ($x=0$) 发生一个突变。描述这种突变现象的函数 $\sigma(x)$ 叫做单位跳跃函数。 $x=0$ 是 $\sigma(x)$ 的间断点。

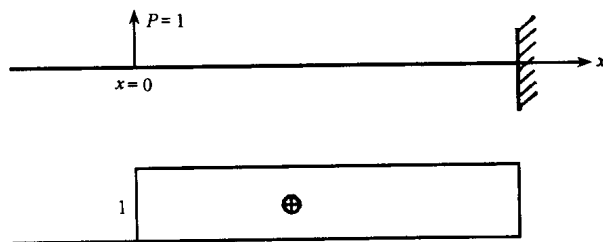


图 1.1 悬臂梁 σ 图

如果悬臂梁在 $x=0$ 处作用一个集中荷载 P ,则这个梁的剪力方程为

$$Q(x) = P\sigma(x)$$

这时,式(1.1)中的 $q(x)$ 为

$$q(x) = Q_{,x} = P\sigma'(x) \quad (1.4)$$

在古典意义下, $\sigma(x)$ 在 $x=0$ 处的导数不存在。但是导数是差商的极限,因此可以从研究 $\sigma(x)$ 的差商入手。规定 $\bar{\Delta}$ 为步长 h 的对称差分算子,则

$$\bar{\Delta}\sigma(x) = \sigma\left(x + \frac{h}{2}\right) - \sigma\left(x - \frac{h}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{当 } |x| > \frac{h}{2} \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } |x| < \frac{h}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

因此, $\sigma(x)$ 的差商为

$$\delta_h(x) = \frac{\bar{\Delta}}{h}\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } |x| > \frac{h}{2} \text{ 时} \\ \frac{1}{h} & \text{当 } |x| < \frac{h}{2} \text{ 时} \end{cases}$$

当 h 趋于 0 ($h \rightarrow 0$) 时, 上式便变为

$$\delta(x) = \sigma'(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \\ \infty & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (1.5)$$

这就是 $\sigma(x)$ 对 x 的导数。 $\delta_h(x)$ 和 $\delta(x)$ 的图形如图 1.2 所示。

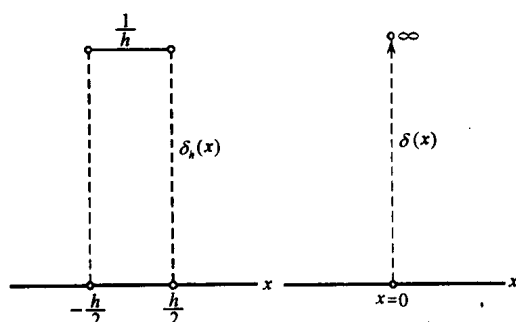


图 1.2 $\delta_h(x)$ 和 $\delta(x)$ 的图形

因为在古典意义下, $\sigma'(x)$ 在 $x=0$ 处没有意义, 因此式 (1.3) 是一种形式导数。这个导数就是 Dirac 的 δ 函数。由此可知, δ 函数是单位跳跃函数的广义导数。考虑到微分与积分互为逆运算, 则 $\delta(x)$ 的积分为

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx \quad (1.6)$$

将式 (1.6) 代入式 (1.4) 可得

$$q(x) = P\delta(x) \quad (1.7)$$

由此可知, 如果梁上作用几个集中荷载 (图

1.3), 则

$$q(x) = \sum_{i=1}^{N-1} P_i \delta(x - x_i) \quad (1.8)$$

这时梁的剪力方程, $Q(x)$ 为

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{N-1} P_i \sigma(x - x_i) \quad (1.9)$$

它是一个阶梯函数 (图 1.3), 其中 x_i 为 $Q(x)$ 的间断点。在间断点处, $Q(x)$ 的左右极限都

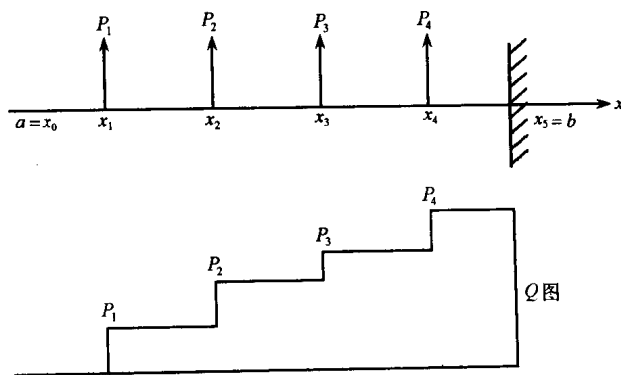


图 1.3 悬臂梁 Q 图

存在,但不相等。它们之差叫做剪力的跳跃量,即

$$[Q(x_i)] = Q(x_i + 0) - Q(x_i - 0) = P_i \quad (1.10)$$

式中

$$\sigma(x - x_i) = (x - x_i)_+^0 = \begin{cases} 1 & \text{当 } x - x_i > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x - x_i < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (1.11)$$

如果悬臂梁在 $x = x_i$ 处作用一个集中力偶 m ,则这个梁的弯矩方程为

$$M(x) = m[1 - \sigma(x - x_i)] \quad (1.12)$$

因为梁上荷载 q 与弯矩 M 有关系

$$q(x) = -m\delta'(x - x_i) \quad (1.13)$$

因此式中 $\delta'(x - x_i)$ 为 $\delta(x - x_i)$ 对 x 的导数。

设 $EI = 1, w(x) = S(x)$, 则式(1.1)便变为

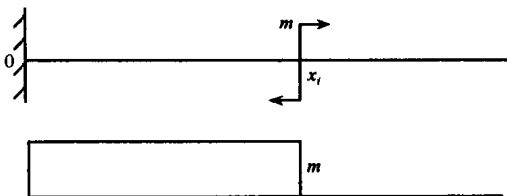


图 1.4 悬臂梁 M 图

$$S^{(4)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} P_i \delta(x - x_i) \quad (1.14)$$

式中 $S^{(4)}(x)$ 为 $S(x)$ 对 x 的 4 阶导数。 P_i 向上为正, 向下为负。式(1.14)是一个四阶常微分方程, 它的一般解为

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \sum_{i=1}^{N-1} b_i \frac{(x - x_i)_+^3}{3!} \quad (1.15)$$

式中 $b_i = P_i$, $(x - x_i)_+^n$ 称为截断单项式, 对于任一正整数 n , 定义为

$$(x - x_i)_+^n = \begin{cases} (x - x_i)^n & \text{当 } x - x_i \geq 0 \\ 0 & \text{当 } x - x_i < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

如果以悬臂梁全跨为给定区间 $[a, b]$, 则式(1.15)有下列性质:

(1) 在每个子区间 (x_i, x_{i+1}) 上, 它是三次多项式。

(2) $S(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ 。这里 $C^2(-\infty, \infty)$ 表示整个实轴上具有二阶连续导数的全体函数的集合, 符号 $\in$ 表示属于的意思。

(3) 在 x_i 处, $S(x)$ 的三阶导数的左右极限存在, 但不相等, 它们之差为

$$b_i = S^{(3)}(x_i + 0) - S^{(3)}(x_i - 0)$$

式中 b_i 称为 $S(x)$ 在 x_i 处三阶导数的跳跃量。

(4) 当 $b_i = 0$ 时, 则式(1.15)就退化为普通的三次多项式。

因此, 式(1.15)与普通的三次多项式不同, 是一个分段光滑函数。根据这些特性, 人们提出一个样条函数。

样条函数在数学上有严格的定义: 对于给定区间 $[a, b]$ 的一个分划

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

如果 $S(x)$ 满足下列条件, (1) $S(x)$ 在每个子区间 (x_i, x_{i+1}) 是 n 次多项式, (2) $S(x)$ 及其 $1, 2, \dots, (n-1)$ 阶导数在 $[a, b]$ 上连续, 则称 $S(x)$ 是对应于分划 Δ 的 n 次多项式样条函数, 简称 n 次样条函数。其中 x_i 为样条结点。

由上述可知, 式(1.15)是一个三次样条函数。因此在集中荷载作用下, 梁的挠度函数就是我们定义的三次样条函数。

对于给定区间 $[a, b]$ 的一个分划 Δ , 由 $n+1$ 阶微分方程

$$S^{(n+1)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} b_i \delta(x - x_i) \quad (1.17)$$

可以建立 n 次样条函数, 即

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^k}{k!} + \sum_{i=1}^{N-1} b_i \frac{(x - x_i)_+^n}{n!} \quad (1.18)$$

它有下列性质:

(1) 在每个子区间 (x_i, x_{i+1}) 上它是 n 次多项式。

(2) $S(x) \in C^{n-1}(-\infty, \infty)$ 。这里 $C^{n-1}(-\infty, \infty)$ 表示整个实轴上有 $n-1$ 阶连续导数的全体函数的集合。

(3) $S^{(n)}(x)$ 在 x_i 点的左右极限存在, 但不相等, 有跳跃量

$$[S^{(n)}(x_i)] = S^{(n)}(x_i + 0) - S^{(n)}(x_i - 0) = b_i$$

式中 $S^{(n)}(x)$ 是 $S(x)$ 对 x 的 n 阶导数。

(4) 当 $b_i = 0$ 时, 则式(1.18)退化为普通的 n 次多项式。

因此, 式(1.18)符合样条函数的定义, 是一个 n 次样条函数。由于样条函数是一个分段多项式, 利用这样的函数去逼近任意函数, 自然具有更大的灵活适应性, 使许多问题获得了满意的解决。

1.2 B 样条函数

如何构造 B 样条函数呢? 因为样条函数与 δ 函数有着密切的内在联系, 因此可以利用 δ 函数来构造 B 样条函数。为此, 先介绍一些 δ 函数的性质。

1.2.1 δ 函数的一些性质

(1) δ 函数是一个偶函数, 即 $\delta(-x) = \delta(x)$ 。

(2) 将 $\delta(x)$ 积分一次, 则有

$$\int \delta(x) dx = \sigma(x) = x_+^0$$

对上式再积分一次, 则有

$$\iint \delta(x) dx dx = x_+ + 1 \text{ 次多项式}$$

对上式再积分一次, 则有

$$\iiint \delta(x) dx dx dx = \frac{1}{2} x_+^2 + 2 \text{ 次多项式}$$

如果对 $\delta(x)$ 作 $n+1$ 次积分, 则有

$$\int \int \int \dots \int \delta(x) dx \dots dx dx dx = \frac{x_+^n}{n!} + n \text{ 次多项式} \quad (1.19)$$

由此可知, 对 $\delta(x)$ 每积分一次, 函数的光滑性就提高一阶。

(3) 如果 $a < 0 < b$, 则 $\int_a^b \delta(x) dx = 1$ 。

(4) 如果函数 $f(x)$ 在 x_i 处连续, 则

$$\int_a^b \delta(x - x_i) f(x) dx = \begin{cases} f(x_i) & a < x_i < b \\ 0 & x_i < a < b \end{cases} \quad (1.20)$$

它的证明见文献[1](p.10)。

1.2.2 B样条函数的构造方法

如何构造B样条函数,在文献[1]中有详细介绍,本节只作简单介绍。由文献[1]可知, n 次B样条函数可用下式确定:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{(x - x_k)_+^n}{n!} \quad (1.21)$$

式中 x_k 为样条结点,即

$$x_k = k - \frac{(n+1)}{2}$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \quad 0! = 1 \quad (1.22)$$

当 $n=0$ 时,由式(1.21)可得

$$\varphi_0(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)_+^0 - \left(x - \frac{1}{2}\right)_+^0$$

由此可得

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\varphi_0(x)$ 称为0次B样条函数[图1.5(a)]。

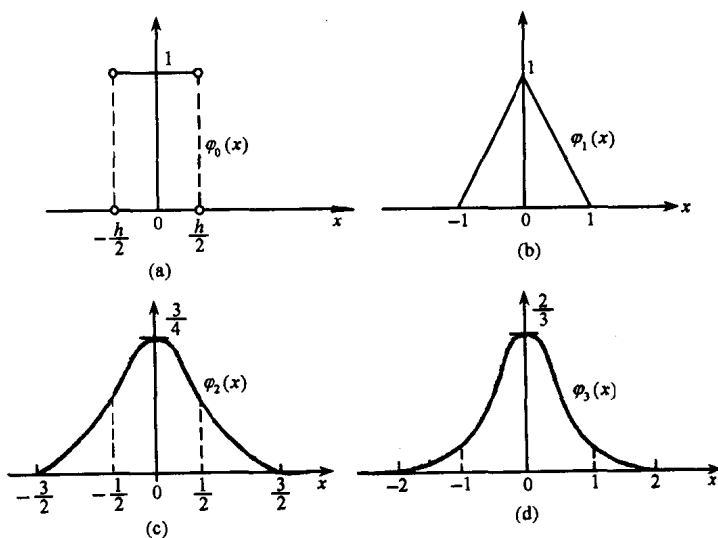


图 1.5 $\varphi_0(x)$ - $\varphi_3(x)$ 图形

当 $n=1$ 时,由式(1.21)可得

$$\varphi_1(x) = (x+1)_+ - 2x_+ + (x-1)_+$$

由此可得

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1+x & x \in [-1, 0] \\ 1-x & x \in [0, 1] \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$\varphi_1(x)$ 称为1次B样条函数[图1.5(b)]

当 $n=2$ 时,由式(1.21)可得

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \frac{3}{2} \right)_+^2 - 3 \left(x + \frac{1}{2} \right)_+^2 + 3 \left(x - \frac{1}{2} \right)_+^2 - \left(x - \frac{3}{2} \right)_+^2 \right]$$

由此可得

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \left(\frac{3}{2} + x \right)^2 & x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right] \\ \left(\frac{3}{2} + x \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{2} + x \right)^2 & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \\ \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \\ 0 & |x| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\varphi_2(x)$ 称为2次B样条函数[图1.5(c)]。

当 $n=3$ 时,由式(1.21)可得

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{6} [(x+2)_+^3 - 4(x+1)_+^3 + 6x_+^3 - 4(x-1)_+^3 + (x-2)_+^3]$$

由此可得

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (x+2)^3 & x \in [-2, -1] \\ (x+2)^3 - 4(x+1)^3 & x \in [-1, 0] \\ (2-x)^3 - 4(1-x)^3 & x \in [0, 1] \\ (2-x)^3 & x \in [1, 2] \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases} \quad (1.23)$$

$\varphi_3(x)$ 称为3次B样条函数[图1.5(d)]。

当 $n=5$ 时,由式(1.21)可得

$$\begin{aligned} \varphi_5(x) &= \sum_{k=0}^5 (-1)^k \binom{6}{k} (x - x_k)_+^5 / 5! \\ &= \frac{1}{120} \left[(-1)^0 \binom{6}{0} (x+3)_+^5 + (-1)^1 \binom{6}{1} (x+2)_+^5 \right. \\ &\quad + (-1)^2 \binom{6}{2} (x+1)_+^5 + (-1)^3 \binom{6}{3} x_+^5 + (-1)^4 \binom{6}{4} (x-1)_+^5 \\ &\quad \left. + (-1)^5 \binom{6}{5} (x-2)_+^5 + (-1)^6 \binom{6}{6} (x-3)_+^5 \right] \end{aligned}$$

由此可得

$$\varphi_5(x) = [(x+3)_+^5 - 6(x+2)_+^5 + 15(x+1)_+^5 - 20x_+^5 + 15(x-1)_+^5 - 6(x-2)_+^5 + (x-3)_+^5] / 5!$$

由上述可得