21世纪高等院校选用教材

非数学专业

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

工科数学分析

上 册

哈尔滨工业大学数学系 组编

张传义 包革军 张 彪 编

4

科 学 出 版 社

21世纪高等院校选用教材(非数学专业)

哈尔滨工业大学工科数学教学丛书

工科数学分析

上册

哈尔滨工业大学数学系 组编
张传义 包革军 张 彪 编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系，根据数学教学改革成果而编写的系列教材之一．全书分上、下两册．本书为上册，包括四章，依次是：极限与连续，导数及其应用，一元函数积分学，微分方程．

与传统的高等数学教材相比，本书加强了基础理论的阐述，在内容上更加注重于对学生抽象思维和逻辑上严谨论证的训练，对于培养学生独立思考与创新意识的提高也有相应的要求．

本书适合作本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生的教材，也可作为准备考研人员和工程技术人员的参考书；若略去部分理论较强的内容，也可作为一般工科专业的微积分教材．

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析．上册/张传义，包革军，张彪编．—北京：科学出版社，2001.9

(21世纪高等院校选用教材(非数学专业))

ISBN 7-03-009642-8

Ⅰ．工…　Ⅱ．①张…②包…③张…　Ⅲ．数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第051568号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2001年9月第一版　开本：720×1000　1/16

2001年9月第一次印刷　印张：21

印数：1—7 000　字数：381 000

定价：54.00元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

编 者 的 话

多年来,我国高等学校工科的微积分课程几乎被一本高等数学教材所统治.由于各专业对数学要求的不同,要求打破一个模式教学的呼声越来越高.这种呼声同样来自优秀本科生群体和研究生."高等数学"的低水平要求,束缚了优秀本科生能力的发挥.改革开放20年来,我国的研究生教育已进入正轨,形成规模,为了提高研究生的理论水平,需要开设更高深的数学课,例如"泛函分析"等.在这些数学课程的教学中,师生们都明显地感到"高等数学"所提供的基础的薄弱.

知识经济的时代,对高等教育提出了更高的要求.进入21世纪,高等学校需要大规模地加速培养高素质人材.为此,我校根据不同专业对数学的要求,在分科教学方面进行了积极的探索和尝试.1994年,在部分优秀学生中实行了本、硕连读.在几年实验的基础上,1999年全面实行了分科教学,以系为单位在约占同级学生的三分之一的优秀本科生群体中开设了较深的数学课程.数学系的许多教师在这一教学体制改革及教材建设中进行了积极的实践.本教材就是在两次校内讲义(杨克劭编《高等数学》和包革军等编《工科数学分析》)和一次正式出版的同名教材(上册由包革军等编,下册由张传义等编)基础上,结合编者多年来从事数学分析和研究生教学的经验重新编写而成.

根据工科学生的特点,以及后继课程的需要,我们在编写这本教材时,将其难易程度定位于数学与应用数学专业的数学分析和工科专业的高等数学之间,但知识面要宽于数学专业的数学分析,在不降低传统工科高等数学的基本概念、基本运算要求的同时,对于数学分析的基本理论有较为严谨的阐述,以期学生通过本课程的学习,除了具有动手计算的能力外,能拓宽知识面,建立起正确的演绎推理的习惯,在归纳、创新和抽象思维能力方面有较大的提高.在编写过程中,作者力求语言通顺、概念清楚、论证严谨、计算准确,使其通俗易懂,方便学习.

杨克劭教授在繁忙的教学工作中抽空审阅了全书,提出了许多宝贵意见,为本书增色不少;科学出版社吕虹编辑辛勤运作,为本书的出版作了大量的工作,在此一并表示感谢.

本书可作为本、硕连读生和对数学有较高要求的非数学专业本科生的教材,也可作为报考硕士研究生的复习参考书,对于数学专业的学生也有参考价值.

受编者水平和经验所限，书中的缺点和疏漏在所难免，恳请同行、专家及广大读者批评指正.

编　　者

2001 年 5 月于哈尔滨工业大学

目　　录

第一章 极限与连续

微积分主要包括微分学和积分学.积分学中定积分的思想早在2500年前就已萌生.例如阿基米德(Archimedes,公元前287～212,古希腊数学家、力学家)就已经会计算抛物线弓形等图形的面积.但由于落后、繁琐的计算方法和当时科学研究的局限,影响了他的思想发展.这也使得积分学的产生与发展十分迟缓.微分学的思想的萌生要晚得多,比积分学晚了近2000年,开始于讨论曲线的切线问题.到了17世纪中叶,在天文学和力学发展的刺激下,在总结前人工作的基础上,由牛顿(Newton,1642～1727,英国伟大的自然科学家、数学家和哲学家)和莱布尼兹(Leibniz,1646～1716,德国数学家)先后创立了微积分.这是继欧几里得几何之后,全部数学中的一个最伟大的创造.然而,微积分的发展道路并不平坦.当时创立微积分的大师们主要着眼于发展强有力的方法,使得微积分立刻被成功地应用于天文学、力学和物理学,解决了许多过去认为高不可攀的困难问题.但是,那个时代,函数和极限的概念还没有严格定义,使得他们未能将自己的方法建立在严密的逻辑基础之上.这引起了人们长达1个多世纪的争论与误解;同时,也推动了人们对极限、函数等基本概念的严格的探讨.经过许多数学家的努力,柯西(Cauchy,1787～1857,法国数学家)才以极限理论为微积分奠定下了坚实的基础.又经过半个多世纪的努力,由康托尔(Cantor,1845～1918,德国数学家)和戴德金(Dedekind,1831～1916,德国数学家)等人发现,极限理论的某些原理,实际上依赖于实数系的一个非常重要的事实——连续性.至此,人们才从理论到应用上弄清楚微积分学的全部,才形成一门成熟的数学分支——数学分析.

数学分析研究的对象是函数.微分学是从微观上(或局部的)研究函数的各种性态,积分学则从整体上研究函数的作用.而极限是研究函数的主要工具,数学分析的许多概念都是通过极限来定义的.本章要建立极限理论,研究函数的连续性及闭区间上连续函数的性质,所有这些都是在实数范围内进行的,都是以实数理论作为基础的,因此,首先介绍实数系.

§1.1 集合与实数系

1.1.1 集合和映射

为了今后学习方便,首先,简要地介绍一般集合论的基本知识.

把具有某种性质的对象的全体,称为集合,简称集.称组成集合的每个对象为集合的元素.习惯上,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.若元素 a 属于集合 A,则记为 $a\in A$;否则,记为 $a\notin A$,称 a 不属于 A.不含任何元素的集合,称为空集,记为 $\varnothing$.若 A 仅含有限个元素,则称 A 为有限集,或 A 是有限的;否则,称 A 是无限集,或 A 是无限的.

若 A 的元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,或 B 包含 A,记为 $A\subseteq B$,或 $B\supseteq A$.空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集,若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.若 $A\subset B$,且 $A\neq B$,$A\neq\varnothing$,则称 A 是 B 的真子集.

若集合 A 是由具有某性质 P 的元素所组成,则一般地,用

$$A=\{a\,|\,a\text{ 具有性质 }P\}$$

表示.

设 A 与 B 是两集合,可以通过下述四种方式,得出四个新的集合.

(1) 并集:$A\cup B=\{a\,|\,a\in A,\text{或 }a\in B\}$;

(2) 交集:$A\cap B=\{a\,|\,a\in A\text{ 且 }a\in B\}$;

(3) A 与 B 的差集:$A\setminus B=\{a\,|\,a\in A\text{ 且 }a\notin B\}$;

(4) 在某些理论和应用中,往往仅考虑某一确定集合 X 的元素及其子集 $A,B,C,\cdots$,此时,$X\setminus A$ 称为 A 的补集,或余集,记为 A^C,即

$$A^C=\{a\mid a\in X\text{ 且 }a\notin A\}.$$

若 $A\cap B\neq\varnothing$,则称 A 与 B 有非空交集,否则称 A 与 B 不相交.若 $A\neq\varnothing$,则称 A 为非空集.

定义 1.1　设 X 和 Y 是两个非空集,如果有一个对应关系(或法则)存在,对于 X 中的每一元素 x,有 Y 中惟一的一个元素 y 与之对应,则称给出了一个从 X 到 Y 的映射 f,记为 $f:X\to Y$,并写成 $y=f(x)$,或 $f:x\mapsto y$,表示 f 把 x 映成 y;称 y 是 x 在映射 f 下的像;称 x 是 y 在映射 f 下的原像;称 X 是 f 的定义域;称集合 $f(X)=\{f(x):x\in X\}$ 为 f 的值域.

若 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$,则由 $h(x)=g(f(x))$ 所确定的映射 $h:X\to Z$ 称为 f 和 g 的复合映射,以 $h=g\circ f$ 表示之(见图 1.1.1).

若在上述定义中,X 与 Y 都是数的集合,则称 f 为从 X 到 Y 的函数,这便是我们在中学所熟悉的函数的定义;在复合的情况下,便是复合函数的定义.

对映射 $f:X\to Y$,当 $f(X)=Y$ 时,称 f 是由 X 到 Y 上的映射或到 Y 的满射;如果对 X 中任意不同的两元素 x_1,x_2,均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为

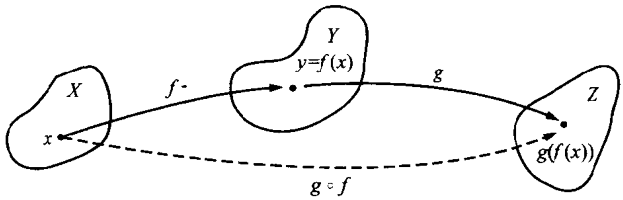

图 1.1.1

单射;如果 f 是满射又是单射,则称 f 为 X 到 Y 上的一一对应(见图 1.1.2),此时也称 X 与 Y 一一对应.

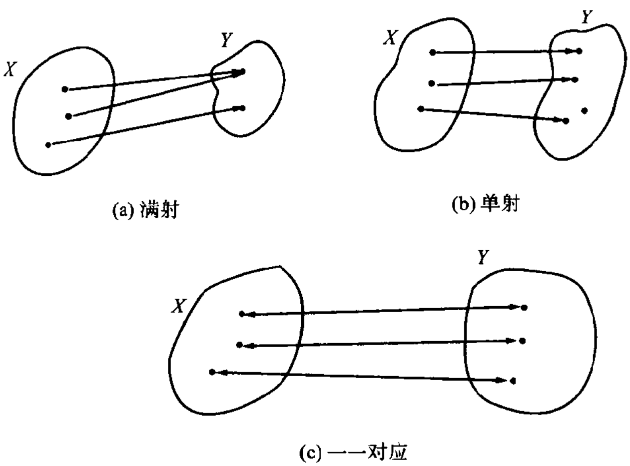

图 1.1.2

在单射的情况下,由 f 可导出一个从 $f(X)$ 到 X 的映射,称为 f 的逆映射,记为 f^{-1},即若 $y=f(x)$,则 $x=f^{-1}(y)$.若 f 是一函数,则 f^{-1} 便是其反函数.

1.1.2 实数系

以数为元素的集合称为数集.

我们约定:自然数是指正整数,自然数的集合记为 $\boldsymbol{N}$.整数是指正整数,负整数和零,整数的集合记为 $\boldsymbol{Z}$.有理数是一切形如 $\frac{p}{q}$ 的数,其中 $p\in\boldsymbol{Z}$,$q\in\boldsymbol{N}$,有理数集记为 $\boldsymbol{Q}$.实数是有理数和无理数(无限不循环小数)的统称,实数集又称为实数系,记为 $\boldsymbol{R}$.

如无特殊指明,本书所有的数都是实数.

取定了原点、长度单位和方向的直线称为数直线,或数轴.每一个实数,在数轴上有惟一的点与之对应;反过来,每一个数轴上的点,代表了惟一的一个实数.例如,对于每一有理数 $x=\frac{p}{q}$,以单位长度的 x 倍,在数轴上确定出相应的对应点(有理点).随着对实数理论的逐步阐述,读者会对无理数在数轴上的对应的含义有深入的理解.

今后,我们对实数和数轴上的点不加区别.

实数集区别于许多其他集合的一个显著特点是有序性:任何两个相异的实数 a,b 都可以比较大小,$a<b$ 或 $a>b$;在数轴上,a 位于 b 的左侧或右侧.

设 $a,b\in\boldsymbol{R}$,$a<b$,下述集合是今后经常用到的.

开区间:$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

闭区间:$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

无穷区间:$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$;

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$;

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

类似地,还有左闭右开区间 $[a,b)$ 及左开右闭区间 $(a,b]$.显然,$\boldsymbol{R}=(-\infty,+\infty)$.

设 $\delta>0$,称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$,它是以 x_0 为中心,长为 2δ 的开区间(见图 1.1.3).有时,我们不关心 δ 的大小,常用"邻域"或"x_0 附近"代替 x_0 的 δ 邻域,此时记为 $U(x_0)$.

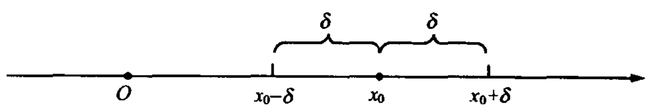

图 1.1.3

称集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为 x_0 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$.

我们知道,有理数的和、差、积、商仍为有理数(当然 0 不准用作除数),从而使 $\boldsymbol{Q}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中稠密:对于任意的 $x_0\in\boldsymbol{R}$ 和任意的 $\delta>0$,邻域 $U(x_0,\delta)$ 必含一个(因而无数个)有理数:事实上,取 $p,q\in\boldsymbol{Q}$ 使 $U(x_0,\delta)\subset[p,q]$.将闭区间 $[p,q]$ n 等分,每一等分点均为有理点.当等分的长度小于 δ 时,必有一个

等分点落在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中.

无理数也在 $\boldsymbol{R}$ 中稠密,请读者自行证之.

定义 1.2 对于数集 A,若有常数 $M(m)$,使得对任意的 $x\in A$,有

$$x\leqslant M \quad (x\geqslant m),$$

则称 A 为有上(下)界,并称 $M(m)$是 A 的一个上(下)界.

既有上界又有下界的数集称为**有界数集**,否则称为**无界数集**.

显然,若一数集有上(下)界,则必有无数多个上(下)界.事实上,凡是大于(小于)上(下)界 $M(m)$的数,都是该数集的上(下)界.在数轴上看,凡是位于 $M(m)$右(左)侧的点都是其上(下)界.但是,最小(大)的上(下)界,却只能有一个.我们把实数系的这一重要事实表述成一条公理.

公理 任何非空的有上界的实数集 A,必存在最小上界;称此最小上界为 A 的**上确界**,记为 $\sup A$.

注意,公理所说的上确界未必属于 A.例如,$A=\{x\mid x\in \boldsymbol{Q},x^2<2\}$是有上界的,上确界显然是$\sqrt{2}$,但$\sqrt{2}\notin A$.众所周知,$\sqrt{2}$是无理数而不是有理数,我们将在本节末尾的附录中给以证明.

若 A 的上确界属于A,则称 A 为上确界可达.此时,上确界显然便是 A 中最大的数.

显然,$\mu=\sup A$ 等价于:

(1) 对 A 中的每一个x,有 $x\leqslant\mu$;

(2) 对于任意小的正数 ε,都存在属于 A 的x_0,使 $x_0>\mu-\varepsilon$.

(1) 是说 μ 是A 的一个上界,(2)则说 μ 是A 的最小上界.

关于有下界的数集,由公理很容易得出下面的结果.

推论 任何有下界的非空实数集 A,必存在最大下界,称为 A 的**下确界**,记为 $\inf A$.

实数 a 的绝对值$|a|$,在数轴上是点 a 与O 的距离.

$$|a|=\begin{cases} a, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

从绝对值的定义可以直接证明,对任何 $a,b\in\boldsymbol{R}$ 有下述三角不等式成立:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

从而也就有

$$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|,$$

其中 c 是任意的实数.

上述三角不等式是本教程常用的、基本的不等式,读者应尽快地、熟练地掌握它.

利用绝对值,x_0 的 δ 邻域可表示为

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\};$$

去心 δ 邻域可表示为

$$\mathring{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

附录　$\sqrt{2}$是无理数的证明

用反证法.设存在一个有理数 p/q 满足

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

这里我们假定 p 与 q 没有公因子.上式等价于

$$p^2 = 2q^2 \tag{1.1}$$

因此 p^2 是一偶数;而这只有 p 本身是偶数才会如此,设 $p=2k$,代入(1.1),有

$$2k^2 = q^2.$$

和前面一样,我们得出 q 是偶数,这使得 p 与 q 都是偶数,与 p 与 q 没有公因子的假设相矛盾.这就证明了$\sqrt{2}$是无理数而不是有理数.

习题　1.1

1. 证明下列集合等式:

(1) $A\cup B=B\cup A$;

(2) $A\cap B=B\cap B$;

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

(4) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

2. 设 $X=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,4\}$,$B=\{1,2,5\}$,$C=\{2,4\}$,确定下面的集合:

(1) $A\cup B$;　(2) $A\cap B$;　(3) $C\setminus A$;　(4)A^C.

3. 设 $f:x\longmapsto x^2+1, x\in\mathbf{R}$,$g:y\longmapsto\sqrt{y}, y\in(0,+\infty)$,试求 $g\circ f$ 与 $f\circ g$ 的定义域,并求 $g\circ f$ 与 $f\circ g$.

4. 用 $\mathbf{R}^2$ 表示 xy 平面,称映射 $p:(x,y)\to x$ 为$\mathbf{R}^2$ 到 x 轴的投影,问 p 是否为单射或

满射.

5. 凡是与 $\boldsymbol{N}$ 一一对应的集合称为可数无限集,简称为可数集(或可列集).证明:

(1) 正偶数集与正奇数集都是可数集;

(2) 整数集 $\boldsymbol{Z}$ 是可数集.

6. 证明:数集 $Q(\sqrt{2})=\{a\sqrt{2}\mid a\in \boldsymbol{Q}\}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 一一对应.

7. 设 $f:A\to B$ 与 $g:B\to C$ 都是到上的一一对应,证明:

(1) $g\circ f$ 也是到上的一一对应;

(2) $(g\circ f)^{-1}=(f^{-1})\circ(g^{-1})$.

8. 设 $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$. 求 $\sup A$ 与 $\inf A$,向上、下确界是否可达?

9. 证明:A 为有界数集等价于:存在 $M>0$,使任意 $x\in A$,有 $|x|\leqslant M$.

10. 设 A、B 是非空有界数集,证明:若 $A\subset B$,则

$$\inf B\leqslant \inf A\leqslant \sup A\leqslant \sup B.$$

11. 设 $A\subset \boldsymbol{R}$,是非空有界集,令 $-A=\{x\mid -x\in A\}$,则

$$\inf A=-\sup(-A)\text{ 和 }\sup A=-\inf(-A).$$

12. 证明公理的推论.

13. 设 $a,b\in \boldsymbol{R}$,证明三角不等式成立:

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$;(2) $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

§1.2 数列与极限

所谓数列是指按先后顺序列出的数串

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

简记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{a_n\}$. 数列中的每个数,称为数列的项,具有代表性的第 n 项 a_n 称为数列的通项.

数列 $\{a_n\}$ 也可看成映射 $f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{R}$,其中 $a_n=f(n)$.

我们研究数列,主要是研究数列的项(随着 n 的增大)的变化趋势.例如,考查下列数列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \tag{2.1}$$

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots \tag{2.2}$$

$$1,0,1,0,\cdots,\frac{1-(-1)^n}{2},\cdots \tag{2.3}$$

$$1,\sqrt{2},\cdots,\sqrt{n},\cdots \tag{2.4}$$

数列(2.1)和(2.2)虽然变化的方式很不相同,随着 n 的增大,前者从正的方向逐渐变小,而后者是正负相间地跳动,但两数列随着 n 的无限增加,都与常数 0 无限接近.数列(2.3)是 1 与 0 的简单重复,不会接近于任何常数.数列(2.4)随着 n 的增大而越来越大,因而不会趋近于任何常数.在上述四个数列的分析中,我们使用了"n 无限增加"及"与常数无限接近"这些描述性语言,这只是可以理解却含糊不清的语言.为了在数学上精确地刻画,我们给出下面的定义.

定义 2.1 设$\{a_n\}$为一数列,若存在一个常数 a,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \tag{2.5}$$

则称数列$\{a_n\}$收敛或收敛于 a,并称 a 为数列$\{a_n\}$的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a(n\to\infty).$$

不收敛的数列称为发散数列.

数列(2.1)和(2.2)都是收敛数列,其极限都是 0;数列(2.3)和(2.4)都是发散数列.

式(2.5)等价于

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \tag{2.6}$$

在数轴上,这意味着,对于任意给定的邻域 $U(a,\varepsilon)$,只可能有有限项(在前 N 项之中),在此邻域之外(见图 1.2.1).

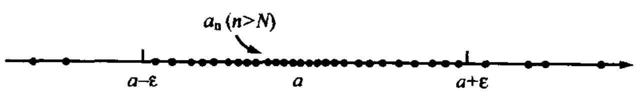

图 1.2.1

定义 2.1 用 ε 和 N 分别对"无限接近"和"无限增大"的含义给予精确地刻画.习惯上,称之为"$\varepsilon - N$"语言.

在学习极限概念时,应正确理解正数 ε 的两重性,一方面 ε 是任意给的,另一方面,一旦给出后,ε 就是确定的了.这便是定义 2.1 中"任意给定"的真实含义.在 ε 确定后,自然数 N 是根据$|a_n - a|<\varepsilon$ 的需要而确定的.因此,N 是依赖于ε 的.为了表示 N 对ε 的依赖关系,有时也将 N 写成N_ε 或$N(\varepsilon)$.还要注意,当 ε 给定之后,N 并不是惟一的,在证明极限的过程中,只要能找到一个这样的 N 就可以了,至于 N 的数值大一些或者小一些是无关紧要的.理

解这些,对于初学者,至关重要.

在应用中,还常常遇到证明$\{a_n\}$不收敛于 a 的问题,用“$\varepsilon-N$”语言,便应该是:存在 $\varepsilon_0>0$,对于任意大的 $N\in\mathbf{N}$,总有 $n_N\in\mathbf{N}$, $n_N>N$,使得

$$|a_{n_N}-a|\geqslant\varepsilon_0. \tag{2.7}$$

在 1.4 节,我们要学习子数列的概念.那时,读者将会对上述“$\varepsilon-N$”语言描述不收敛于 a 有进一步的理解.

为了书写简便,引进两个符号,$\forall$ 表示“任意”、“全体”或“每一个”;$\exists$ 表示“存在”、“有”.

例 2.1 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

证 对于$\forall\varepsilon>0$,欲使

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立,只须 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,这里$[x]$是取整函数,表示小于或等于 x 的最大整数.当 $n>N$ 时,便有

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon.$$

由定义 2.1,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

例 2.2 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^a}=0\quad(a>0)$.

证 对于$\forall\varepsilon>0$,欲使

$$\left|\frac{1}{n^a}-0\right|=\frac{1}{n^a}<\varepsilon\text{ 或}n^a>\frac{1}{\varepsilon}$$

成立,只须 $n>\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$.取 $N=\left[\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}\right]$.当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{1}{n^a}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0\quad(a>0).$$

例 2.3　若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

证　由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,对于$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1$,当$n>N_1$时,

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\left|\frac{(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$<\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<I+\frac{\varepsilon}{2},$$

其中

$$I=\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|.$$

欲使$I<\frac{\varepsilon}{2}$,只须$n>\left|\frac{2\{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\}}{\varepsilon}\right|$.令

$$N_2=\left[\left|\frac{2\{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)\}}{\varepsilon}\right|\right].$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,这里$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$表示括号里$n$个实数中最大的一个.当$n>N$时,有$I<\frac{\varepsilon}{2}$.从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

例 2.4　求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

我们要证的是只要使n充分大,便可使$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$任意小,现在令$h_n=\sqrt[n]{n}-1$.于是$\sqrt[n]{n}=h_n+1$,从而

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots+h_n^n>\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2.$$