萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

代數學
冪法開法及無理數虛數

林鶴一 矢田吉熊著
黃元吉譯

商務印書館發行

代數學

冪法開法及無理數虛數

林鶴一 矢田吉熊著

黃元吉譯

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

代數學—冪法開法及無理數虛數

林鶴一　矢田吉熊著

黃元吉譯

發行人　王雲五　上海寶山路五〇一號

印刷所　商務印書館　上海寶山路

發行所　商務印書館　上海及各埠

中華民國二十年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

INVOLUTION, EVOLUTION AND IRRATIONAL NUMBERS, IMAGINARY NUMBERS

BY HAYASHI AND YADA
TRAN LATED BY HUANG YUAN CHI

PUBLISHED BY Y. W. WONG

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1931

四四一六分

目　　次

GWT 30/21

代　數　學

羃法，開法及無理數，虛數

第　一　章

羃　法

1.　定義.　同爲一數 a 而有 m 箇之集合以成乘積，此謂 a 之 m 乘羃，或稱 m 乘方，以 a^m 之記號表之，其 m 爲**指數**。

求某數或代數學式之若干乘羃，其計算謂之**羃法**。

由乘羃之定義及乘法，除法之法則，可得下列諸定理之證明，此諸定理，謂之指數之法則，乃學羃法前所常用者。

2.　定理.　就某數各種之乘羃而總求其乘積，卽係擴張其乘羃，故其積之指數，等於諸因數之指數之和。

如 m, n, p.........爲正整數。

則 $a^m \times a^n \times a^p \times \ldots\ldots = a^{m+n+p+\cdots}$.

此爲乘法之指數法則。

證明. 依乘羃之定義，

$a^m = a\times a\times a\times\ldots\ldots m$ 因數止，

$a^n = a\times a\times a\times\ldots\ldots n$ 因數止，

$\therefore a^m a^n = (a\times a\times a\times\ldots\ldots m$ 因數止$)(a\times a\times a\times\ldots\ldots n$ 因數止$)$

$= a\times a\times a\times\ldots\ldots(m+n)$ 因數止

$= a^{m+n}.$

又 $a^m\times a^n\times a^p = (a^m\times a^n)\times a^p$

$= a^{m+n}\times a^p$

$= a^{m+n+p}$

因數在三箇以上，其證明相同。

如 $a^m\times a^n\times a^p\times\ldots\ldots = a^{m+n+p\ldots\ldots}$

3. 定理. 某數之乘羃如 a^m 以其乘羃 a^n 除之，得商 $a^m\div a^n$ 即 $\dfrac{a^m}{a^n}$

$$若\ m>n\ 則\ \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$若\ m<n\ 則\ \frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$$

$$若\ m=n\ 則\ \frac{a^m}{a^n}\ 等於\ 1.$$

此爲除法之指數法則。

證明 m, n 爲正整數而 $m<n$.

則 $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a\times a\times a\times\ldots\ldots m\ 因數止}{a\times a\times a\times\ldots\ldots n\ 因數止}$

$= a\times a\times a\times\ldots\ldots(m-n)$ 因數止

$= a^{m-n}.$

次　$m<n$.

則 $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a\times a\times a\times\ldots\ldots m\text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\ldots\ldots n\text{ 因數止}}$

$$=\frac{1}{a\times a\times a\times\ldots\ldots(n-m)\text{ 因數止}}$$

$$=\frac{1}{a^{n-m}}$$

又 $m=n$ 則 $a^m=a^n$.

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^n}{a^n}=1.$$

别證. 若 $m>n$ 則依前節。

$$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}$$

$$=a^m,$$

$\therefore$ $$a^m\div a^n=a^{m-n}$$

次 $m<n$.

則 $$a^{n-m}\times a^m=a^{n-m+m}$$

$$=a^n.$$

$\therefore$ $$a^m=\frac{a^n}{a^{n-m}}$$

此等式之兩邊以 a^n 除之。

$$a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}.$$

又 $m=n$

則 $$1\times a^n=a^n=a^m$$

$\therefore$ $$a^m\div a^n=1.$$

4. 定理. 某數之 m 乘冪之 n 乘冪，等於其數之 mn 乘冪。

即 $$(a^m)^n=a^{mn}.$$

此為冪法之指數法則。

證. m, n 為正整數。

則 $$\begin{aligned}(a^m)^n&=a^m\times a^m\times a^m\text{……}n\text{ 因數止}\\&=a^{m+m+m+\text{………}n\text{ 項止}}\\&=a^{mn}.\end{aligned}$$

系. 某數之 m 乘冪之 n 乘冪，等於其數之 n 乘冪之 m 乘冪。

即 $$(a^m)^n=(a^n)^m$$

蓋 $(a^n)^m=a^{nm}=a^{mn}$ 故也。

5. 定理. 若干因數之積之 m 乘冪，等於各因數之 m 乘冪之積。

即 $$(abc\text{……})^m=a^mb^mc^m\text{……}$$

證. m 為正整數。

則 $$\begin{aligned}(ab)^m&=ab\times ab\times ab\times\text{……}m\text{ 因數止}\\&=(a\times a\times a\times\text{…}m\text{ 因數止})(b\times b\times b\times\text{…}m\text{ 因數止})\\&=a^mb^m.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (abc)^m&=\{(ab)c\}^m\\&=(ab)^mc^m\\&=a^mb^mc^m.\end{aligned}$$

故凡因數之數多者，可依此類推。

如 $(abc\text{…})^m=a^mb^mc^m\text{……}$

6. 定理. 二數之商之 m 乘羃，等於二數之 m 乘羃之商。

即
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

證. m 爲正整數。

則$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\ldots m$ 因數止

$$=\frac{aaa\ldots\ldots m\text{ 因數止}}{bbb\ldots\ldots m\text{ 因數止}}$$

$$=\frac{a^m}{b^m}.$$

別證. 令 $\frac{a}{b}\times b=a.$

作此式兩邊之 m 乘羃，由前節之定理，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\times b^m=a^m,$$

$$\therefore\quad\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

注意. 本定理又可換言之如次：

分數之 m 乘羃，等於以分母子之 m 乘羃爲分母子之分數。

7. 由上證明得各公式如次：

$$a^m\times a^n=a^{m+n}. \qquad [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} m>n\text{ 則 } a^m\div a^n=a^{m-n} \\ m<n\text{ 則 } a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}.\end{array}\right\} \qquad [2]$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad [3]$$

$$(ab)^m = a^m b^m. \qquad [4]$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}. \qquad [5]$$

8. 單項式之羃法。

依前節公式〔3〕,〔4〕,〔5〕卽得其法則如次：

〔法則〕. 作單項式之 m 乘羃者，先作其數係數之 m 乘羃，而各因數之指數則附以 m 倍。

作分數式之 m 乘羃者，乃作以分母子之 m 乘羃爲分母子之分數。

例 1. 求 $-2a^2b^3$ 之五乘羃。

解 $(-2a^2b^3)^5 = (-2)^5(a^2)^5(b^3)^5 = -32a^{10}b^{15}$

例 2. 求 $-3xy^3z^5$ 之四乘羃。

解
$$(-3xy^3z^5)^4 = (-3)^4x^4(y^3)^4(z^5)^4$$
$$= 81x^4y^{12}z^{20}.$$

例 3.
$$\left(\frac{2ab^3}{3x^2y^4}\right)^6 = \frac{(2ab^3)^6}{(3x^2y^4)^6}$$
$$= \frac{64a^6b^{18}}{729x^{12}y^{24}}$$

例 4.
$$\{(-5x^4)^3\}^2 = \{-125x^{12}\}^2$$
$$= 15625x^{24}.$$

[問 1]　求下列之乘羃。

(一)　$(7ab^2)^2$.　　(二)　$(-2a^7c^2)^3$.

(三)　$(3a^2b^3)^4$.　　(四)　$(-a^2x)^6$.

(五)　$(-2x^2y)^5$.　　(六)　$(-\frac{1}{3}x^3)^7$.

(七)　$5a(-2a)^3(a^2)^4$.　　(八)　$(-3^6ax^2y^5)^n$.

[問 2]　求下列之乘羃。

(一)　$\left(\frac{3a^2b^3}{4c^5x^4}\right)^2$.　　(二)　$\left(-\frac{3x^5}{5a^3}\right)^3$.

(三)　$\left(\frac{2abc}{3m^2n^3}\right)^n$

[問 3]　下式試簡之。

(一)　$\{(2a^3)^2\}^4$.　　(二)　$3x\{(-x^2)^3\}^4$.

(三)　$-5\{(m^2n)^5(mn^2)^2\}^2$.

9.　多項式之平方.　依乘法，得各公式如次：

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab,$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

依此結果，卽得其法則如次：

〔法則〕.　作多項式之平方者，作各項之平方，又作各項與其下各項相乘之積之二倍，統爲相加可也。

例 1.　$(x-y+z)^2=x^2+(-y)^2+z^2+2x(-y)+2xz+2(-y)z$
$=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz.$

例 2. $(1+2x-x^2)^2=1^2+(2x)^2+(-x^2)^2+2\times1\times(2x)$

$$+2\times1\times(-x^2)+2(2x)(-x^2)$$

$$=1+4x^3+x^4+4x-2x^2-4x^3$$

$$=1+4x+2x^2-4x^3+x^4.$$

例 3. $(5a^3-7a^2b+3ab^2-6b^3)^2$

$$=25a^6+49a^4b^2+9a^2b^4+36b^6$$

$$-70a^5b+30a^4b^2-60a^3b^3$$

$$-42a^3b^3+84a^2b^4$$

$$-36ab^5$$

$$=25a^6-70a^5b+79a^4b^2-102a^3b^3+93a^2b^4$$

$$-36ab^5+36b^6.$$

注意. 各項之平方恆為正，又 $(-a-b-c)^2=(a+b+c)^2$,

去多項式乘羃之括弧者，謂之**展開**，展開所得之式謂之**展開式**。

[問 4] 下式試展開之。

(一) $(a+b-c)^2$.　　(二) $(a-b-c)^2$.

(三) $\left(\frac{2}{3}x^2-x+\frac{3}{2}\right)^2$　　(四) $(1-x+x^2-x^3)^2$,

10. 二項式 $a+b$ 之乘羃。

如 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

此固所已知者，若欲求 $a+b$ 之四乘羃，則依乘法實算之如次：

$$\begin{array}{r}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
a+b \\
\hline
a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\
+\ a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
\hline
\end{array}$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

依此結果，知 $(a+b)^4$ 之展開式，其初項爲 a^4，末項爲 b^4，而其中間各項之文字則順次爲 a^3b, a^2b^2, ab^3，卽 a 之降羃而 b 之昇羃也。

其含 a^3b 之項，則 a^3 以 b 乘之，a^2b 以 a 乘之，相因而成者也，故其係數爲 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^3 之係數與 a^2b 之係數之和，如 $1+3$ 卽 4 是也。

又含 a^2b^2 之項，則 a^2b 以 b 乘之，ab^2 以 a 乘之，相因而成者也，故其係數爲 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^2b 及 ab^2 之係數之和，如 $3+3$ 卽 6 是也。

依同理，ab^3 之係數爲 $3+1$ 卽 4 是也。

$$\therefore\ (a+b)^4=a^4+(1+3)a^3b+(3+3)a^2b^2+(3+1)ab^3+b^4$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

依同理，由 $(a+b)^4$ 之展開式，可得 $(a+b)^5$ 之展開式，

卽 $(a+b)^5=a^5+(1+4)a^4b+(4+6)a^3b^2+(6+4)a^2b^3$
$$+(4+1)ab^4+b^5$$
$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

依此方法，順次作 $a+b$ 之六乘，七乘，八乘等之展開式，亦甚容易，玆明其法則如次：

〔法則〕. 二項式 $a+b$ 之 n 乘羃, 由 $(n+1)$ 項而成, 其初項爲 a^n, 第二項以下爲 a 之降羃 b 之昇羃, 其指數順次以 1 增減, 而 a 與 b 之指數之和, 恆等於 n, 其係數爲 $a+b$ 之 $(n-1)$ 乘羃之展開式中第一項第二項之係數之和, 又第二項第三項之係數之和順是類推以取之可也, 至最後之項則爲 b^n.

今將 $a+b$ 之十乘羃, 逐一展開之, 而取其係數, 列表如次:

$(a+b)^1$..........1, 1.

$(a+b)^2$..........1, 2, 1.

$(a+b)^3$..........1, 3, 3, 1.

$(a+b)^4$..........1, 4, 6, 4, 1.

$(a+b)^5$..........1, 5, 10, 10, 5, 1.

$(a+b)^6$..........1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

$(a+b)^7$..........1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

$(a+b)^8$..........1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.

$(a+b)^9$..........1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.

$(a+b)^{10}$.........1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

前表, $(a+b)^6$ 之初項末項之係數皆爲 1, 第二項之係數 6 卽 $(a+b)^5$ 之展開式中係數 1 與 5 之和, 又第三項之係數 15 卽 5 與 10 之和, 第四項之係數 20 卽 10 與 10 之和。

$$\therefore\quad (a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

注意. $(a+b)^n$ 之展開式, 其諸項之係數, 由初項順取之, 或由末項逆取之, 皆同也。