高等学校试用教材

数学分析

下册

吉林大学数学系编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是根据1977年10月理科数学教材编写大纲讨论会制定的"数学分析教材编写大纲"编写的. 可作为综合性大学数学专业和计算数学专业的教材，也可供高等师范院校有关专业使用.

本书比较重视基础理论和分析技巧的讲述，在章节安排上，由浅入深，逐步展开，便于教和学.

全书分上、中、下三册. 下册内容包括多元函数微积分，广义积分与带参变量的积分以及变分法.

数 学 分 析

下 册

吉林大学数学系编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

长春新华印刷厂印装

*

印数 000,001—210,000

1978年9月第1版　　1979年3月第1次印刷

书号 13012·0105　　定价 0.98元

目　录

第VI篇 多元函数的微分学

第十六章 多元函数的极限与连续性

§1 引 言

现在我们已经学完了一元函数的微积分. 我们会求直线上质点运动的速度和加速度，会求曲线的切线的斜率，会算平面图形的面积和旋转体的体积，会求变力沿直线所作的功等等. 确实学到了不少知识，但是还很不够. 要知道，研究一元函数，其实就是只考虑由一个因素来确定的事物. 然而"世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的."一般地说，研究自然现象总离不开空间和时间. 单看空间点的坐标(x, y, z)，这就有了三个变量，再加上时间变量t，所以一般物理量常常依赖于四个变量x, y, z, t. 在有些物理问题中，我们还需要考虑更多的变量. 具体如

例1 许多气体，如氢气、氮气、氧气、氩气等等，在通常的温度和压强之下，它们的性质都比较理想，可以认为它们符合气态方程：

$$p=\frac{RT}{V}$$

这里p, V, T依次代表气体的压强，体积，温度，R是与那种气体有关的常数. 对于给定的一种气体，如果知道T和V的值，那末根据气态方程，我们就能唯一地确定一个p值. 这里有两个独立的变量T和V.

例2 就是在同一时刻，物体在各点的温度也往往是不一样

的．例如夏季晴天中午的时候，靠近地面的空气层就比较热．同一天中午，长春、南京、哈尔滨的气温也各不相同．所以在同一时刻，物体在(x,y,z)点处的温度，由(x,y,z)点的位置而定．我们用符号

$$T=f(x,y,z)$$

来表示温度与位置的依赖关系，并称它为*温度场*．

晴天的黄昏，地面散热快，因而靠近地面的空气层较凉，这恰好与中午的情况相反．所以要刻划全天的气温，还应该考虑时间变量t，这样，温度T就该表示为

$$T=F(x,y,z,t)$$

它是随时间而变的温度场．

例 3　我们学过，一个面上的平均压强等于所受压力跟受力的面积之比．我们又知道在静止的液体里某一深度处，液体重量所引起的压强是与深度有关的，越深这种压强就越大．当然液体各点的总压强不仅与重量还与外力有关．外力一定，那末液体中每一点(x,y,z)处的总压强p就是确定的了．我们用符号

$$p=\varphi(x,y,z)$$

来表示压强与位置之间的依赖关系，并称它为*压力场*．

例 4　河里的水在每一点(x,y,z)处都有个速度$\mathbf{V}=(v_1,v_2,v_3)$，我们知道水在河的当中流得比较急，在靠近岸边的地方就流得比较慢，而河面窄的地方的水则往往要比河面宽的地方流得快些，等等．所以在给定的时刻，河里每一点处水流速度的三个分量v_1,v_2,v_3的大小，应该依赖于所考虑的位置，即

$$\mathbf{V}=(v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z))$$

人们把它叫做*速度场*．假如还考虑潮水的涨落等等，那末就还应该考虑时间的因素，每个速度分量就要依赖于四个变量(x,y,z,t)了．

例 5　把小磁针放在条形磁铁周围的某个地方，小磁针就会静止在一个方向上，这个方向就是磁针北极所受的磁场力 F 的方向．倘若小磁针放在不同的地方呢，那它就有着各种不同的方向，如图 VI-1 所示．这就是说力 $\boldsymbol{F}$ 要随着磁针所放的位置 (x, y, z) 而变，所以它的三个分量 f_1, f_2, f_3 应该依赖于 (x, y, z)，即磁场力

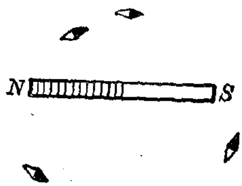

图　VI-1

$$\boldsymbol{F}=(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

上面所说的力 $\boldsymbol{F}$ 实际还与小磁针性质有关．注意相应于每个磁极（例如磁针的南极或北极）都有个强度，一般把它叫做磁极强度．实验表明，两个磁极间的引力或斥力是跟它们的磁极强度成正比的．假定上述小磁针的磁极强度恰好是一个单位，则相应的磁场力就叫做那个条形磁铁的磁场强度，并且把它记作

$$\boldsymbol{H}=(H_1(x, y, z), H_2(x, y, z), H_3(x, y, z))$$

人们还把通过磁针在各处静止方向所连成的线叫做磁力线，它是可以看得见的．例如把条形磁铁放在桌上，在磁铁上面放一块纸板，板上均匀地撒上一层铁屑．如果用手轻轻地敲纸板，使得铁屑可以自由转动，那末铁屑就会顺着磁力线排列起来．这样条形磁铁之磁场的形象就很清楚了．

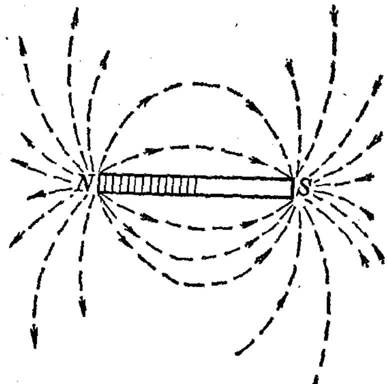

图　VI-2

例 6　一直到十九世纪末，人们还以为任何一种元素的原子都是不可分割的．但是 1897 年发现了电子以后，到了本世纪，我们对原子结构的认识就深刻得多了，并且把这个理论应用于工农

业生产和医药卫生等方面．现在已经弄明白，每一个原子都是由一个很小的核和一些电子组成的．不同的原子，核外的电子数是不同的．氢原子最简单，核外只有一个电子．可以假定原子核是不动的，所以核外电子的运动只涉及它的坐标 x, y, z 三个变量．氧原子可就复杂得多了，核外有 8 个电子．至于制造氢弹很重要的原料铀，在它的原子核外竟有 92 个电子．每一个电子就联系着三个坐标，要研究 8 个电子，以至 92 个电子的运动，该要有多少变量呀！研究多粒子的运动是近代物理学上也是数学上的大问题．所以我们的眼光不应该只限于 x, y, z, t 这四个变量．

举这么多例子，目的无非是要说明，一个变量的函数理论必须发展为多个变量的函数(简称多元函数)理论．

“马克思主义者认为人类的生产活动是最基本的实践活动，是决定其他一切活动的东西．”前面讲的压力场、流体的速度场、磁场等是流体力学和电磁学里主要的研究对象．而流体力学和电磁学却是和造船、航空、电力、无线电通讯等工业密切相关的．至于我们这个课程将要讨论的多元函数的概念，则又是从压力场、速度场等物理内容中抽象出来的．所以从一个变量到多个变量的发展，归根结蒂是由于生产实践的要求．

§2　多元函数

1. 多元函数的一般概念

前面我们举了些例子，粗略地讲到了多个变量，也讲到对应(或者依赖)关系，但是还没有舍去物理内容．为了一般地更明确地给出多元函数的定义，先介绍关于点集的概念．

所谓二维空间 R_2(即平面)中的一个点集 E，就是平面上满足某个条件 $\mathscr{D}$ 的一切点构成的集合．按照这个说法，点集 E 是由条件 $\mathscr{D}$ 确定的，不同的条件便产生不同的点集．因此人们常把 R_2 中

的点集E写成

$$\{(x,y);\mathscr{D}\}$$

的形式. 例如, 以原点为心, 以1为半径的圆的内部便是一个点集,它可表成

$$\{(x,y);x^2+y^2<1\}$$

现在我们来讲二元函数的定义.

定义1 设D是R_2中的一个点集. 如果对于D中每一个点$P=(x,y)$, 按照某一确定的对应关系, 都恰有一个数值u和它对应;我们就说u是P的(二元)函数,记为

$$u=f(P) \quad \text{或者} \quad u=f(x,y)$$

一般都把x和y叫做自变量,u叫做因变量,D叫做函数的定义域.

当自变量x和y取定值时, 因变量u的相应值, 叫做函数值;所有函数值的全体,叫做函数的值域.

函数$u=f(x, y)$在(x_0, y_0)处的函数值记为$f(x_0, y_0)$. 例如对于

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\sin y+x^2e^y$$

有

$$f(0,0)=\sqrt{1-0^2-0^2}+\sin 0+0^2\cdot e^0=1$$

$$f\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{16-\pi^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\sin\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2e^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{23}+\sin\frac{1}{3}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{3}}$$

应当注意,在有些场合可能同时出现几个不同的函数,为了避免混淆, 对不同的函数就该用不同的记号. 例如前节所说流体速度场的三个分量,那是三个不同的函数,所以我们用

$$v_1(x,y,z), \quad v_2(x,y,z), \quad v_3(x,y,z)$$

把它们区别开来(注意,下标不同).

和一元函数一样，上述二元函数的定义包含着两个要点：一是对应关系，二是定义域. 后者在不致发生误解的情况下常常略而不写.

二元函数的定义域，即自变量 x, y 的取值范围，可以是整个 xy 平面，也可以是这个平面的一部分，这是随着问题的性质而定的.

例 1　矩形的面积 A 作为其长 x 和宽 y 的函数是

$$A=xy$$

其定义域是 xy 平面的第一象限,因为边长总是正的.

例 2　对于

$$u=\sqrt{1-x^2-y^2}+\sin y+x^2e^y$$

因为限于实数域,根号内不得取负值,所以它的定义域为

$$\{(x, y);\ x^2+y^2\leqslant 1\}$$

即是以原点为心,以 1 为半径的圆域.

例 3　还是因为限于实数域,根号内不得取负值,所以

$$u=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$$

的定义域是 xy 平面上两个同心圆周之间的环形部分 (图 VI-3):

$$\{(x, y);\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$$

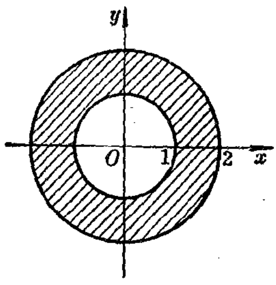

图　VI-3

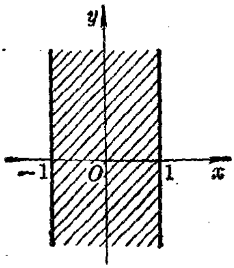

图　VI-4

例 4　函数

$$u=\frac{1}{x^2+y^2}$$

的定义域是除原点外的整个 xy 平面.

例 5 正如常数也可以看作函数一样，一元函数可以看作特殊的二元函数. 例如

$$u=\ln(1-x^2)$$

作为二元函数，其定义域是带形(图 VI-4):

$$\{(x,y);\ |x|<1,\ |y|<+\infty\}$$

2. 二元函数的几何表示

在一元微积分部分，我们已经看到，建立函数与平面曲线之间的联系，使得我们可以借助于几何直观来解决微积分学中的问题(例如，微分中值定理)，也使我们能用微积分方法来研究几何问题(例如，求曲线的切线、曲率，计算平面图形的面积等等). 现在我们也要考虑二元函数的几何图形.

针对函数

$$u=f(x,y),\qquad (x,y)\in D$$

可引进空间直角坐标系 $Oxyu$，过定义域 D 内的任一点 $M(x,y)$，引 xy 平面的垂线，并在此垂线上截取一点 P，要求 P 的竖坐标 u 等于 $f(x,y)$ (图 VI-5)，当点 M 跑遍定义域 D 时，对应的点 P 的集合就构成一个“曲面”，它便是函数 $u=f(x,y)$ 的几何图形，而定义域 D 恰好就是这个曲面在 xy 平面上的投影.

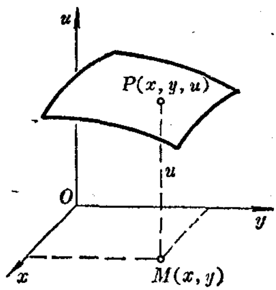

图 VI-5

回忆空间解析几何学，我们知道

$u=ax+by+c$ 是一个以$(a,b,-1)$为法向量的平面.

$u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 是以原点为心的单位球的上半球面.

$u=\sqrt{x^2+y^2}$是以原点为顶点,向上开口的圆锥面.

$u=f(x)$是母线平行于y轴的柱面.

3. n元函数的定义

§1例6表明,有必要引进n维空间和n元函数的概念. 所谓n维空间R_n就是一切n元有序数组

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

所构成的集合,X叫做R_n中的点或向量. 对于R_n中每两个点$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,定义$X=Y$当且仅当$x_1=y_1$,$x_2=y_2$,$\cdots$,$x_n=y_n$.

定义2 设D是R_n中的一个点集. 如果对于D中每一个点$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,按照某一确定的对应关系,都恰有一个数值u和它对应;我们就说u是X的(n元)函数,记作

$$u=f(X) \text{ 或者 } u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$叫做自变量,u叫做因变量,D叫做函数的定义域.

4. 场的概念

前面我们已经比较详细地讲述了多元函数的概念,以下我们来讲一讲和它密切相关的,所谓场的概念.

如果对于点集D上的每一点(x,y,z),都对应着一个标量(也就是数量)$f(x,y,z)$,那末所有这些标量合在一起就构成了一个所谓的标量场. 例如§1例2与例3中所说的温度场、压力场就是典型的标量场.

如果对于点集D上的每一点(x,y,z),都对应着一个向量

$$(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z))$$

那末所有这样的向量合在一起就构成了一个向量场. 例如§1例4与例5中所说的速度场、磁场就是典型的向量场.

注意温度、压强、速度、磁力都是些物理量. 综合起来看,场就是物理量在空间上的分布.

上面所说的场是不含时间因素，不随时间而变的，一般叫这种场为稳定场．在§1里讲到不同地区的气温固然不同，就是同一地区，早晚的气温也不一样，所以要描写全天气温的变化就该有四个变量，应该将温度T表为

$$T=f(x,y,z,t) \tag{1}$$

对于河水流动的速度，如果考虑到潮水的涨落，那末它的速度场也必须含有时间变量t，应该表为含t的向量：

$$(v_1(x,y,z,t),v_2(x,y,z,t),v_3(x,y,z,t)) \tag{2}$$

象(1)与(2)这样随着时间而变化的场就叫做非稳定场．

数学的许多概念是从物理模型中来的．物理学上各种各样的场正是多元微积分学的重要背景，我们将经常地(不是偶然地)注意到它们之间的联系．

习　　题

1. 设函数 $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$，试求：

   (1) $f(-2,3)$；　(2) $f\left(\frac{1}{x},\ \frac{2}{y}\right)$；　(3) $\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

2. 确定下列函数的定义域，并画出定义域的图形：

   (1) $f(x,y)=\ln[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)]$

   (2) $f(x,y)=\sqrt{6-(2x+3y)}$

   (3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$

   (4) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2xy}}$

3. 画出下列函数的图形：

   (1) $z=12-3x-2y$　　$(x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0)$

   (2) $z=x^2+y^2-1$　　$(x^2+y^2\leqslant 1)$

§3 多元函数的极限

1. 极限的定义和运算

为简单起见，今后把 R_2 中的点 $X=(x_1,x_2)$，$Y=(y_1,y_2)$ 之间的距离 $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ 记作 $\|X-Y\|$。这样，三角形任两边之和总大于第三边这个事实，用上面的符号来表达，即对于 R_2 中任意三点 X,Y,Z 都有

$$\|X-Z\|\leqslant\|X-Y\|+\|Y-Z\|$$

这是分析学中最基本、最重要的不等式——三角不等式，我们以后要经常用到它.

下面先引进邻域和聚点的概念.

给定一点 $X_0=(x_0,y_0)$ 及正数 δ，点集

$$U=\{X;\|X-X_0\|<\delta\}$$

叫做 X_0 的 δ 邻域.

定义 1　设 E 为 R_2 中的点集，X_0 为 R_2 中的点. 如果 X_0 的任何邻域中都含有在 E 中且异于 X_0 的点，则称 X_0 为点集 E 的聚点.

由上述定义，可以证明：在 E 的聚点 X_0 的任何邻域 U 中都含有无穷多个在 E 中且异于 X_0 的点. 否则，设 U 中只含有有限多个在 E 中且异于 X_0 的点

$$X_1,X_2,\cdots,X_N$$

现在取正数 $\rho<\min\{\|X_1-X_0\|,\|X_2-X_0\|,\cdots,\|X_N-X_0\|\}$，则在 X_0 的邻域

$$U_\rho=\{X;\|X-X_0\|<\rho\}$$

中便没有在 E 中且异于 X_0 的点了，这与聚点的性质是矛盾的.

定义 2　设 D 为 R_2 中的点集，$f(X)$ 是定义在 D 上的函数，X_0 是 D 的聚点*)，A 是一个定数. 如果不论正数 ε 怎样小，总有这样一个正数 δ 存在，使得对于 D 中的任意一点 X，只要

$$0<\|X-X_0\|<\delta$$

*) X_0 是 D 的聚点的假设，是为了保证点集 $\{X\in D;\ 0<\|X-X_0\|<\delta\}$ 非空.

便有

$$|f(X)-A|<\varepsilon$$

我们就说当 $X\to X_0$ 时，函数 $f(X)$ 以 A 为极限，并且记作

$$\lim_{X\to X_0} f(X)=A$$

或者

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

对于 $X_0=(x_0,y_0)$，点集

$$U_\delta=\{X;\|X-X_0\|<\delta\}$$

就其几何意义来说，可以把它叫做 X_0 的圆形 δ 邻域；而点集

$$V_\eta=\{X;|x-x_0|<\eta,\ \ |y-y_0|<\eta\}$$

则可叫做 X_0 的方形 η 邻域. 显然，任何圆形邻域都包含着一个方形邻域，而任何方形邻域也一定包含着一个圆形邻域（图 VI-6）. 因此也可以利用方形邻域来描写极限概念.

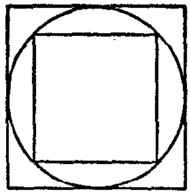

图 VI-6

定义 2′ 设 D 为 R_2 中的点集，$f(X)$ 是定义在 D 上的函数，X_0 是 D 的聚点，A 是一个定数. 如果不论正数 ε 怎样小，总有正数 η 存在，使得对于 D 中任意一点 $X\neq X_0$，只要 $|x-x_0|<\eta$，$|y-y_0|<\eta$，便有

$$|f(X)-A|<\varepsilon$$

我们就说当 $X\to X_0$ 时，函数 $f(X)$ 以 A 为极限.

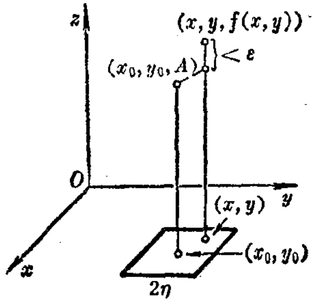

图 VI-7

关于二元函数极限的运算，我们有下面的结果.

定理 1 设 D 为 R_2 中的点集，$f(X)$，$g(X)$ 都是定义在 D 上的函数，并且 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)$，$\lim\limits_{X\to X_0} g(X)$ 都存在，则

(i) $\lim\limits_{X\to X_0}[f(X)+g(X)]=\lim\limits_{X\to X_0}f(X)+\lim\limits_{X\to X_0}g(X)$

(ii) 对于任何常数 C,

$$\lim_{X\to X_0}C\cdot f(X)=C\cdot\lim_{X\to X_0}f(X)$$

(iii) $\lim\limits_{X\to X_0}[f(X)\cdot g(X)]=\lim\limits_{X\to X_0}f(X)\cdot\lim\limits_{X\to X_0}g(X)$

(iv) 更假定 $\lim\limits_{X\to X_0}g(X)\neq 0$, 则

$$\lim_{X\to X_0}\frac{f(X)}{g(X)}=\frac{\lim\limits_{X\to X_0}f(X)}{\lim\limits_{X\to X_0}g(X)}$$

(V) 设 $\lim\limits_{X\to X_0}f(X)=A$, 并且对于 X_0附近*)的 D 中的点 $X\neq X_0$ 时, $u=f(X)\neq A$, 又设 $\varphi(u)$ 在 $f(X)$ 的值域上有定义, 且 $\lim\limits_{u\to A}\varphi(u)=B$, 则

$$\lim_{X\to X_0}\varphi[f(X)]=B$$

证明　且以(i)为例. 设 $\lim\limits_{X\to X_0}f(X)=A$, $\lim\limits_{X\to X_0}g(X)=B$. 根据极限的定义, 我们要证明, 对任给的正数 ε, 可以找到正数 δ, 使得当 $0<\|X-X_0\|<\delta$ 时, 有

$$|[f(X)+g(X)]-(A+B)|<\varepsilon \tag{1}$$

由三角不等式, 我们有

$$\begin{aligned}&|[f(X)+g(X)]-(A+B)|\\&=|[f(X)-A]+[g(X)-B]|\\&\leqslant|f(X)-A|+|g(X)-B|\end{aligned} \tag{2}$$

因此要想(1)式成立, 只须 $|f(X)-A|$ 和 $|g(X)-B|$ 都小于 $\frac{\varepsilon}{2}$.

根据 $\lim\limits_{X\to X_0}f(X)=A$ 的定义, 我们可以找到正数 δ_1, 使得当 $0<\|X-X_0\|<\delta_1$ 时, 有

---

*) 一点的附近指的是该点的某邻域.

$$|f(X)-A|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

根据 $\lim\limits_{X\to X_0} g(X)=B$ 的定义，我们可以找到正数 δ_2，使得当

$$0<\|X-X_0\|<\delta_2$$

时，有

$$|g(X)-B|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $0<\|X-X_0\|<\delta$ 时，(3)，(4)两式同时成立，从而由(2)式知(1)式成立．这就是所要证明的．

这和一元函数相当结果的证明真是一模一样．本定理之其他各项的证明也都如此，所以我们就不一一写下去了．

例 1 显然

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x=a,\qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y=b$$

运用极限运算法则，就得到

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} Cx^m y^n=Ca^m b^n$$

这里 m,n 是非负整数，C 是一常数；于是对于任何二元多项式 $P(x,y)$，有

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x,y)=P(a,b)$$

同样运用极限运算法则，对于二元有理分式 $R(x,y)$，有

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} R(x,y)=R(a,b)$$

当然这里 $R(x,y)$ 的分母必须在点 (a,b) 处不为零．

例 2 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

显然

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x=1,\qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} e^y=1$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x+e^y)=2$$