科學圖書大庫

大衆機率與統計

譯者　趙文敏　校閱　郭汾派

徐氏基金會出版

517

科學圖書大庫

大衆機率與統計

譯者　趙文敏　校閱　郭汾派

徐氏基金會出版

校閱小言

面對複雜萬端之自然現象或層出不窮變化難測之社會現象，如何於其中提綱挈領地說明此等現象之可能，實有賴於“統計”。統計學原屬實用科學之一，凡屬實用科學叢書，其編纂自以能配合實際之應用爲貴。本書名爲“大衆機率與統計”，作者除力避深奧之理論，擷取與大衆生活有關之實用材料外，並於書中詳舉範例，於理論之介紹，皆以深入淺出之方式陳明之。縱初閱統計書籍者，對本書亦易吸收領會。故對初學者而言，本書實爲不可多得之入門良書；對一般已研習統計學者而言，本書更能增強其學習之興趣，並有助於其對基本原理更深入之認識。

譯者趙文敏君，師大數學系畢業，天資聰穎且勤奮好學。本書譯文讀來順暢無澀，堪稱“譯”“作”俱佳之好書，故本人樂於爲之校閱並推介。

郭汾派

五十九年九月

目　　錄

校閱小言 ……………………………………………… Ⅲ
第 一 章　一個充滿着偶然的世界 …………………… 1
第 二 章　樣本空間與事件 ……………………………… 4
第 三 章　機率模型 ……………………………………… 16
第 四 章　計數與計算 …………………………………… 34
第 五 章　與其他事件有關之事件 ……………………… 62
第 六 章　平均數與離均差 ……………………………… 84
第 七 章　相關 …………………………………………… 107
第 八 章　母全體與樣本 ………………………………… 129
第 九 章　僅有兩種可能結果之試行 …………………… 138
第 十 章　常態分配 ……………………………………… 154
第十一章　葡萄乾，星辰，飛彈 ………………………… 167
第十二章　自然界之偶發性 ……………………………… 173
參考書目 ………………………………………………… 177
習題解答 ………………………………………………… 178
索　　引 ………………………………………………… 192

第一章　一個充滿着偶然的世界

偶發性是一切事物之通性

“雖計劃極其周密，然一切仍難逆料”。Robert Burns（蘇格蘭詩人，1759-1796）一句話，正道出了偶發事件隨時會出現在日常生活中之眞相。吾人之所作所爲，即使是芝麻小事，**偶發**皆於其中扮演一份角色。甚至，更確切地說，偶發事件永遠地跟着吾人之脚步，由生而死。試看，**嬰兒之**出生，偶發性正是其因素之一。懷孕一事亦是一偶然事件，未出生之嬰兒之**爲男或爲女**，亦有各半之可能機會。機會甚至可幫助吾人選擇配偶，因爲多數之**婚姻**皆由偶然之邂逅而成。而就破壞方面而言，**車禍**，**火警**，**地震**，**及水災**等意外，不也正警告世人，偶發性甚至能決定結束吾人生命之時刻。

就工業活動而言，偶發事件或隨機事件也爲其中之重要角色。一部精心設計之機器固然是在多數時間內製造出優良產品，然而經常地亦有不良產品出現，而後者之產生事先可能毫無任何跡象，純粹是一種偶發性質。此一偶發事件之發生，固不爲吾人所喜然而却是無可避免。從另一方面言之，並非所有偶發事件皆不爲吾人所喜，如電話交換則不然。在平時，用戶使用電話之時間總是作隨機分佈，即散佈各時刻而不擁擠。總機也隨時愉快地爲用戶服務。而當暴風雪來臨總機已受干擾之際，用戶使用電話之時間也不再是任意分佈，幾乎是所有用戶皆在同一時刻使用。

不僅以上諸例而已，偶發性其實是宇宙特有之性質。雖然星群係有規律地組合而成銀河，然而在太空中銀河卻是**任意**地分佈。儘管宇宙綫是均勻而穩定地由太空流向地球，然而却可能受地球磁場之影響而散亂地射向地球表面上某特殊地區，可以**任意**地擊中此特殊地區上之各處。經常地，有某些動物或植物生殖細胞內之遺傳因子被宇宙綫擊中而發生改變。如此，動植物之遺傳性**任意**地發生變化，造成了子體與親體之差異。又如一滴看似平靜之水滴中，其內部之分子却四面八方地**任意**跳動，此即是在顯微鏡下才可見之布

朗運動。人類可見之光綫皆由光子所組成，各光子所作小幅度之運動其分量是完全**任意**，而造成此運動者又是電子由原子內高位能區**任意**進入低位能區所致。

人類不僅無法預知將出生之嬰兒是男是女，亦無法預測機器將製成者是優良產品或不良產品。甚至，一粒灰塵被水滴中分子擊中後將如何運動也非吾人事先所能預料者。凡此種種皆因其爲偶發事件故不可預料。而且因偶發事件之普遍發生，吾人所能確實預知者只是；**在吾人之一切所見所爲中，經常會遇着意料以外之情況。**

偶發性仍具某些規則

前節吾人雖闡明偶發事件隨時發生，但須注意者是偶發性雖常發生，但其發生並非表示一切毫無次序。譬如說，固然無人能先知道將出生之嬰兒是男是女，但吾人却可確信：在一整年內出生之嬰兒，其中男女孩之數目幾乎各有一半。又如：電話總機固然無法知道在某一分鐘內將有多少用戶呼叫電話，却可知道同一瞬間內呼叫電話的用戶最大數目約爲多少，所以對此種情況大都有妥善之準備。又如：投擲一顆均勻骰子，吾人固然無法預知是否出現六點，但却可確信：在許多次投擲中，出現六點之次數約爲全部次數之六分之一。此數例代表之意義是：**對於一隨機事件，發生一次固然有各種無法預知之情況，然而在許多次之發生中，必可得出其中之某些規則。**亦就是說，在重複之過程中，紛亂之情況會引出某種次序。隨機事件之發生，也如同可決定結果之事件一般，受某種規則之控制。而機率論之要務即在找尋這些規則。依賴所得規則之助，數學家與統計學家已有一些方法，能對那些不可預知之事作合理之推測。

似非而是之學科

在前節中吾人曾說明機率論之目的是：從不可確知之事件中得出某些確定之結論。從決定此目的之時，已看出機率論之內容充滿着**似非而是**的論點。因此，讀者若在此科目中找出某些奇怪之論點不必感到驚奇。當吾人介紹機率論之概念並以之解答某些問題時，倘若所得之答案很令人驚奇，讀者不必因之驚訝不置。類似此種情形，只要經驗多次，讀者自會發現，在機率論中許多意料之外者才眞正是應預料將發生者。

機率論之啓蒙

機率論之數學理論起源於有關賭博之問題的研究。一位好賭博者，Chevalier de Méré ,曾將此種問題就教於法國數學家 Pascal (1623-1662) 氏曾於 1654 年將此等問題及其所作之解答與 Fermat (法國數學家，1601-1665) 討論，於是數學上一門嶄新的理論因之問世。此後，又有許多著名的數學家對此科目之進展貢獻甚大。時至今日，原只是一位法國郎中之偶然雅興却產生一門精密的科學，此科學不僅在物理學，生物學及社會科學各方面皆有廣泛之應用，甚至與當代哲學中某些深奧之問題也發生了關聯。

讀者難免想知道，Chevalier de Méré 所就教於Pascal 者是些什麼問題，在此吾人僅介紹其中一個稱爲**點數問題**者如下:甲乙二人各出 32 元作賭，每贏一場者稱其贏得一點。兩人相約先贏得三點者爲全勝 ,可得 64 元 。又假定在每場賭賽中各人贏得一點之機會相同 (如投擲一錢幣) 。依此條件，Chevalier de Méré 提出一個疑問，如果賭賽已開始而雙方都尙未贏得三點，但爲他故決定不再比賽，則 64 元應如何分配，始爲公平？

問題已提出，讀者可能想獨自解答此問題。有此意者且在未讀完本章之前立刻試著去作。而讀完第五章之後可再試着解答一次。Pascal 對此問題之答案及其推理方法吾人列於書末習題解答，讀者可參看比較之。

統計之機率

機率問題之研究與發展，至於今日，已有兩種不同之觀點。其一爲**主觀性機率**，此觀點中所謂機率是：對於證據不足之結論，所謂**此結論爲眞之機率**就是吾人對此結論之信賴程度的一種**測度**。另一觀點爲**物理性機率**或**統計之機率**。此觀點中所謂機率則是：對於某實驗之一可能之結果，此**可能結果發生之機率**乃是當此實驗重覆許多次時，該可能結果發生之**相對次數** (發生之次數與實驗次數之比) 。至於**純數學觀點中之機率論**，則係由統計之機率中抽象化而得，當然又與前二者不同。與近世代數，近代幾何相同地是，最新形式之機率論也以集合論爲其基礎。此種統計之機率的進展，本世紀前廿五年內以 *R . A.* Fisher 與R. von Mises 二人之貢獻最大 。至於將集合論應用於機率論中,則是 1933 年 A.Kolmogoroff之成就。本書所要介紹的是：以集合論爲基礎之機率論與統計之機率的應用等初步概念 。另於第十二章中，對於前述兩種機率的關係作了一番說明。

第二章　樣本空間與事件

樣本空間

投擲一骰子是一種會產生偶然事件的簡單實驗，當骰子靜止下來，其頂端之面必出現 1，2，3，4，5 或 6 等六者之一。如果吾人提出一問題，“此骰之頂面出現什麼數？”則此問題有六種可能的答案。每一個可能的答案都是此實驗之可能的結果之一。則集合 {1，2，3，4，5，6，} 稱爲此實驗之**樣本空間**。其中每一元素代表實驗之一可能結果。

如果吾人換另一問題，“出現於骰子頂面者是偶數或奇數？”此問題只有兩種可能的答案。於是，對於此問題，此實驗只有兩種可能的結果。則投擲一骰之實驗中，集合 { 奇數，偶數 } 亦爲一個樣本空間。倘若吾人再換一個問題，“出現於骰子頂面者是不是么點? ”則對於此問題，吾人又可得出此實驗的第三個樣本空間，{么點，非么點}。

吾人不必取一骰子做投擲之實驗來研究其可能之結果。僅須以想像代之可矣！假想一骰已被擲下而（針對吾人心中已想妥之問題）將可能之結果予以逐項分開即可。因此，所謂實驗只是概念性而已。依此觀念，吾人得下一定義：**一個實際的或概念性的實驗之樣本空間乃是表示此實驗之一切可能結果的符號新成之集合**，其中每一可能之結果都是針對某一特別問題之一可能答案，而作一實驗其所得之結果必是此集合之一且僅一個元素。

前述擲骰之例說明了一實驗可有許多不同之樣本空間。而各樣本空間之建立一方面是依吾人作實驗時心中想妥之問題，他方面也受另一種因素之影響。舉例言之，若吾人以 {奇數，偶數} 作爲擲一骰子之樣本空間，亦即每一次擲骰記下其爲奇或偶。則對於此一問題“每擲一次其頂面出現何數？”。前述之記錄遂無法作答。反言之，若吾人以 {1，2，3，4，5，6} 作爲樣本空間，即每一次擲骰吾人記下其頂面出現之數値。則此記錄却可回答類似“出現於頂面者是偶數或奇數？”之問題。故對於擲一骰子之實驗，以

{1，2，3，4，5，6}爲樣本空間實較{奇數，偶數}爲佳。因前者可用以回答更多的有關實驗的問題。**一樣本空間之各可能結果分類愈細，此樣本空間之用途愈大**。因此在討論有關實驗結果之機率的問題時，吾人必選取一足夠精細之樣本空間，使之可用以回答一切可能被提出之問題。

其次，並非將一實驗之**某些**可能結果列出就可構成一樣本空間。例如，集合{1，2，3，4，5，}不是擲一骰子之實驗的樣本空間，因爲儘管6是此實驗之一可能結果，此集合中却無元素與之對應。而集合{奇數，偶數，么點}也不是此實驗之一樣本空間，因爲結果之一的1與集合中兩個元素對應，即，**奇數**與**么點**。

當吾人投擲一錢幣，此幣可能出現正面於其上，亦可能出現反面。當然也可能發生錢幣豎立或靠上某物使之未俯倒之情形，後者之情形吾人不予攷慮而重作投擲。因此，投擲一錢幣之實驗只有兩種可能之結果。若以H代表正面，以T代表反面，則集合{H，T}乃爲此實驗之樣本空間。

若吾人重複的投擲一錢幣，直至出現正面爲止；顯然地正面可能在第一次投擲就出現，或第二次，第三次，等等。這些可能之結果吾人分別記爲H，TH，TTH，等等。甚至亦可能根本未出現正面。後者吾人記爲$TTT\cdots$，此處之三個逗點乃表示反面重複的出現。則此實驗之正確樣本空間應爲{$TTT\cdots$，H，TH，TTH，$\cdots$}，括弧內最後之三逗點表示此集合之元素可繼續地書出。於是此例提供了**一實驗可能造成無限之樣本空間的事實**。不過，於本書中所使用之樣本空間幾乎都是有限樣本空間。所以往後使用"樣本空間"一詞，如無特別聲明，一律視爲有限樣本空間。

樣本空間之事件

吾人再攷慮投擲一骰子之實驗。以集合{1，2，3，4，5，6}作爲樣本空間，並以大寫字母S表示此集合，於是可寫成$S=\{1，2，3，4，5，6\}$。吾人投擲此骰而觀察此一**事件**："出現之數爲偶數"。只要出現之數爲2，或4，或6，**此事件即稱爲發生**。亦即，若實驗之結果是集合$E_1=\{2，4，6\}$之一元素，此事件即爲發生，此處E_1只爲了說明方便而用以表示此集合之記號。集合E_1是集合S之一部分集合，亦即，E_1之每一元素皆屬於S。

其次，假設吾人觀察另一事件，"出現之數是3之倍數"。只要實驗之結果是集合$E_2=\{3，6\}$之一元素，此事件即爲發生，E_2也是S之一部

分集合。若吾人觀察之事件爲“出現之數爲完全平方”，則只要實驗之結果是$E_3=\{1,4\}$之一元素，此事件即爲發生。若吾人觀察之事件爲“出現之數爲質數”，則當實驗之結果爲$E_4=\{2,3,5\}$之一元素時，此事件始發生。由此可知，當實驗進行了，由每個可能發生之事件皆可得出S之一部分集合。而且，吾人可選取S之任意一部分集合而得一事件，例如，部分集合$E_5=\{1,3,4\}$，可用以觀察一事件，“骰子之頂面出現1，3，或4”。此論點使吾人得下述定義：**所謂一實驗之樣本空間之一事件乃指此樣本空間之一部分集合。而當實驗之結果爲此部分集合之一元素時即稱此事件發生。**

爲求對此定義更加清楚明白，吾人必須將**部分集合**一詞略加解釋。依上面所述，吾人所謂S之部分集合乃是指其元素皆屬於S之任意集合。一個集合如果包含S的某些元素而沒包含不屬於S之元素則此集合爲S之一部分集合，依此，則因S之每個元素皆爲S之元素，故S本身亦爲S之一部分集合。故一樣本空間之一事件包含此空間之所有或一部分元素。

必然事件

於樣本空間S中，事件S因包含樣本空間之所有元素顯然地與其他事件有所不同。倘若吾人作擲一骰子之實驗，且重複多次，則事件E_1僅於其中數次能發生。如出現之數爲奇數，則事件E_1就不發生。然而事件S則不同，因爲每個可能結果皆屬於S，故事件S每次實驗皆發生。因此之故，吾人稱事件S爲樣本空間S之**必然事件**。也就是說，每作一次實驗，此事件必然發生。

不可能事件

假設吾人自集合S，每次減少一元素，直至最後一元素被移去，則此集合變成一無所有。或者有人認爲最後所得已不再是一集合。但是吾人將會發現如果一致同意可以有一個不含任何元素之集合，則可使許多論證變得非常簡單。而此一集合可以想像成爲，以兩個括弧所成：{ }，宛如前述各集合中用以表列其元素所使用者，只是此時二括弧之間沒有元素而已。此集合吾人稱之爲**空集合**，並以記號ϕ表之。並依下述之定義，**將空集合視爲樣本空間S之一部分集合**。此定義是：所謂S之一部分集合乃是未包含或包含全體或一部分S之元素之集合，而且此集合如含有元素，則每一元素皆屬於S。

爲明瞭空集合之廣泛應用，試攷慮下一問題：對應於下一事件之部分

集合爲何？“出現於骰子頂面之數是完全平方且是質數”。顯然地，只有當出現之數同爲E_3與E_4之元素時，此事件始爲發生。但是仔細檢查此二個S之部分集合之元素卽知道S中沒有屬於E_3與E_4之元素。換言之，由屬於E_3與E_4二者的S之元素所成之集合是空集合。其意義乃說明此事件不可能發生。因此關於S之部分集合可以作如此分類：當投擲一骰子時，每一個可能發生之事件皆對應於一個S之非空部分集合，而每一個不可能發生之事件則對應於空集合。爲此，吾人有時把空集合稱爲**不可能事件**。

簡單事件

在S之部分集合中，其中有一部分僅含一個元素。這些部分集合共六個，卽：$E_6=\{1\}$，$E_7=\{2\}$，$E_8=\{3\}$，$E_9=\{4\}$，$E_{10}=\{5\}$，$E_{11}=\{6\}$。在機率理論中，所有的可能事件皆由這種一元素之事件中取適當者聯合而成，因此後者是很重要之事件。例如，欲得E_3則聯合E_6與E_9。欲得E_4則聯合E_7，E_8及E_{10}。這些一元素之事件既很重要，吾人乃給予特殊之名稱。一樣本空間中僅含一元素之事件稱之爲此空間之一**簡單事件**。

集合與部分集合

因爲一樣本空間乃是（由一實驗之可能結果所成之）一個集合，而事件則爲此集合之部分集合。於是吾人引用數學上集合論之一些概念，記號及結論可使往後之說明更清楚。依照前述吾人使用“集合”一詞之方法，很易了解所謂集合乃是一些實際的或概念性的物品所成之一個群體，而此集合之物品則稱爲其**元素**。欲表達一個有限集合，吾人使用兩個括弧作爲其元素之容器，將元素表列於二括弧之間。或是利用一個能明確決定其元素的規則來定義一集合亦可。舉例言之，集合S之元素共有1，2，3，4，5，及6，則吾人可寫成$S=\{1,2,3,4,5,6\}$。或者是說明S爲由大於0而小於7之整數所成之集合。兩個集合稱爲相等之充要條件是二者所含之元素完全相同。

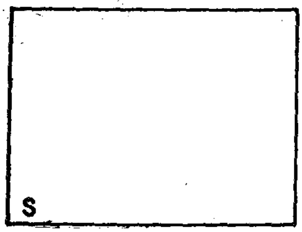
前此吾人已定義了部分集合，並介紹了空集合之觀念。空集合是每一個集合之部分集合，以下吾人利用記號$\subset$來表示“是‧‧‧‧之一部分集合”的關係。卽若F爲E之一部分集合，吾人寫成$F\subset E$。下面列出之三集合就是不含元素，含一元素，及包含二元素者：

$$\varnothing = \{\ \} \qquad R = \{a\} \qquad T = \{x, y\}$$

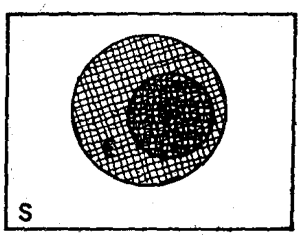
集合ϕ只有一部分集合：ϕ。集合R則有二部分集合：ϕ及R. 集合T有四部分集合：ϕ，$\{x\}$，$\{y\}$，及T。

對於投擲一骰子之實驗，以$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$作爲其樣本空間，而考慮事件$E_3 = \{1, 4\}$及事件$E_5 = \{1, 3, 4\}$。因爲E_3是E_5之一部分集合。因此若投擲此骰之結果爲E_3之元素，則亦爲E_5之元素。所以只要事件E_3發生，事件E_5必發生。此一關係有時稱之爲事件E_3**涵蘊**事件E_5。於是對於此一敘述$E_3 \subset E_5$，吾人可有兩種讀法。一爲僅就集合論之意讀爲E_3是E_5之一部分集合，另一則依機率理論之意義而讀爲E_3涵蘊E_5。

關於一樣本空間之各部分集合間之關係可利用文氏圖解法作簡單的圖示。樣本空間本身以一矩形區域表之。此樣本空間之一部分集合則以矩形區域之點所成之部分集合表之。下面圖示中，若矩形區域代表樣本空間S，而陰影部分E及F代表S之事件，而且F爲E之一部分集合。



樣本空間

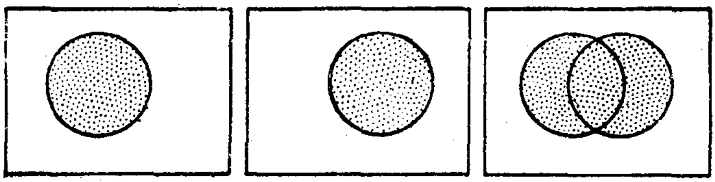


$F \subset E \subset S$

兩集合之聯集

投擲一骰子時，若下列三者之一滿足，則稱事件E_1**或**E_3發生（出現之數爲偶數或完全平方）：(1) 出現之數爲偶數但非完全平方，故結果屬於E_1但不屬於E_3；(2) 出現之數爲完全平方但非偶數，故結果屬於E_3而不屬於E_1；(3) 出現之數爲偶數也爲完全平方，故實驗結果屬於E_1及E_3。於是所謂事件E_1或E_3實際即集合$\{1, 2, 4, 6\}$此集合乃是將屬於E_1或E_3或屬於二者之元素聯合而得。於集合論中此集合稱爲E_1與E_3之**聯集**而以$E_1 \cup E_3$表之。（讀作E_1與E_3之聯集）。**若E與F爲一樣本空間之二事件，$E \cup F$乃是**

由屬於E或F或屬於二者之元素所成之集合，而且除此而外不再有其他元素。由二集合作其聯集之運算可以文氏圖解法說明如下：



E　　F　　E∩F

依聯集之定義，以及依其文氏圖解法，很易得知當二集合作其聯集時，何者書寫於前實無關緊要。亦就是說，$E\cup F=F\cup E$。換言之，**聯集**運算滿足交換律。此律與算術之加法交換律很相似，即$x+y=y+x$。

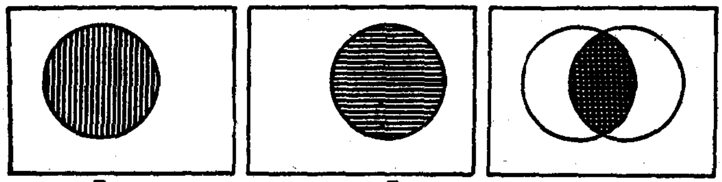
欲求三集合E，F，與G之聯集，吾人分成二步驟。先求E與F之聯集$E\cup F$。其次求$E\cup F$與G之聯集。此一結果記爲$(E\cup F)\cup G$。吾人亦可先求F與G之聯集$F\cup G$，而後求E與$F\cup G$之聯集。此一結果則記爲$E\cup(F\cup G)$。依文氏圖解法易知$(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$。換言之，聯集運算滿足結合律。此律與算術之加法結合律很相似，即$(x+y)+z=x+(y+z)$。因結合律成立，所以吾人可將括弧略去而逕寫成$E\cup F\cup G$以表示E，F，與G之聯集。於是依交換律與結合律可知如$E\cup G\cup F$，$F\cup G\cup E$，等等，只將E，F，與G之順序互換所得之各集合皆相同。集合之數目多於三個時也有與此相似之結果：當兩個或兩個以上之集合作聯集運算時，各集合之順序如何不影響其結果。

兩集合之交集

於投擲一骰子之實驗中，令$E_1=\{2,4,6\}$，$E_3=\{1,4\}$。事件E_1只當出現之數爲偶數時始發生而事件E_3只當出現之數爲完全平方始爲發生。若出現之數既爲偶數又是完全平方則吾人稱爲事件E_1及E_3發生。於是所謂事件“E_1及E_3”亦即是集合$\{4\}$，此乃由屬於E_1與E_3二者之元素所成之集合。於集合論中，此稱爲E_1與E_3之交集而記爲$E_1\cap E_3$。（讀作E_1與E_3之交集。）**若E與F爲一樣本空間之二事件，$E\cap F$乃是由屬於E與F二者之元素所成之集合，且除此之外不再有其他元素**。由二集合求其交集之運算以圖形表示如下。此一運算亦滿足交換律與結合律。亦即是，$E\cap F=F\cap E$，及$(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G)$。

交集之定義亦可推廣至二個以上之集合：任意數目之集合的交集乃是由屬於所提及之每一個集合的元素所成之集合。當三個或以上之集合求交集，則其交集可以依任意順序逐步求出。

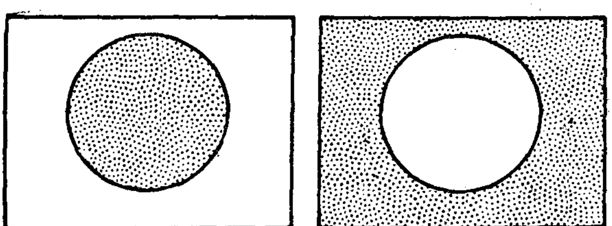
若$E=\{1,2\}$，$F=\{3,4\}$，與$G=\{1,3\}$，則$E\cap G=\{1\}$ $F\cap G=\{3\}$，而$E\cap F$＝空集合。若二集合之交集為空集合，則此二集合稱為**互斥**或**不相交**。於此例中，E與F不相交。於文氏圖解法中，不相交之集合可以兩個不重疊之圓表示之。



E　　F　　E∩F

一集合之餘集合

投擲一骰子時，若出現之數為2，4或6以外之任意數，則稱事件E_1不發生。而所謂事件**非E_1**乃是由樣本空間S中不屬於E_1之元素所成之集合$\{1,3,5\}$。於集合論中此稱為E_1之**餘集合**，而以記號E_1'表之。**若E為樣本空間S中之任一集合，E'乃是由S中不屬於E之元素所成之集合**。顯然地E是E'之餘集合，故$(E')'=E$。觀察下面之文氏圖解可知$E\cup E'=S$而$E\cap E'=\phi$。



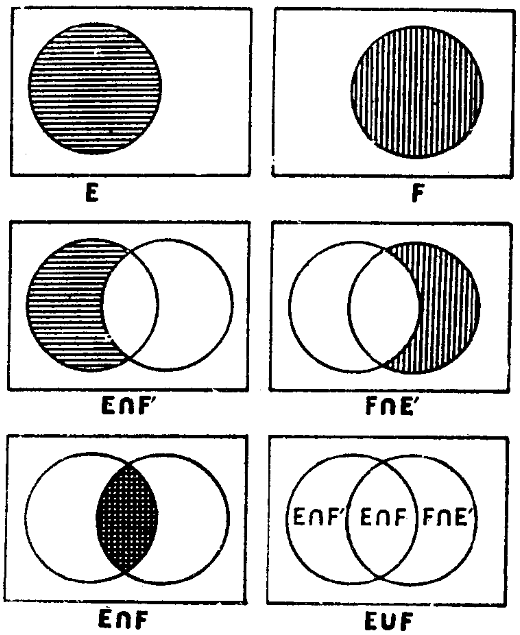
E　　E'

若E，F及G為樣本空間S之事件，則下述各關係依文氏圖解法很易明瞭：$E\cup\phi=E$；$E\cup S=S$；$E\cap S=E$；$E\cap\phi=\phi$；$E\cup E=E$；$(E\cup F)'$

$=E'\cap F'$，（聯集之餘集合爲餘集合之交集）；$(E\cap F)'=E'\cup F'$，(交集之餘集合爲餘集合之聯集）；$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G)$；以及$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$。最後二關係式與算術之分配律很相像，即$x(y+z)=xy+xz$。

一集合之元素數

在本書之後段，吾人欲求一事件之機率時，有時須計算該事件之元素數。一集合E之元素數以記號$n(E)$表之。若E與F爲一樣本空間S中之事件，則吾人可由$n(E)$以及$n(F)$計算$E\cup F$之元素數。集合$E\cup F$可以視爲下列三集合之聯集：一爲由屬於E但不屬於F之元素所成，一爲由屬於F但不屬於E之元素所成，一爲由屬於E及F二者之元素所成。依集合論之概念，此三集合分別爲：$E\cap F'$，$F\cap E'$，及$E\cap F$。由文氏圖解法易知，$n(E)$爲$E\cap F'$之元素數加$E\cap F$之元素數。而且$n(F)$爲$E\cap F$之元素數加$F\cap E'$之元素數。於是若吾人以$n(E)$加$n(F)$，則$E\cap F'$與$F\cap E'$之元素雖僅計算

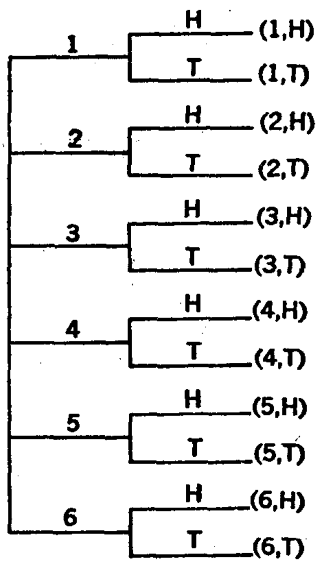


一次，但$E\cap F$之元素却計算兩次。爲消除此一種重複現象，須減去$n(E\cap F)$。此得一公式，$n(E\cup F)=n(E)+n(F)-n(E\cap F)$。於$E$及$F$互斥之特殊情形中，則得$n(E\cup F)=n(E)+n(F)$。而且，$n(E)+n(E')=n(S)$，因$E$與$E'$互斥，而其聯集又爲樣本空間故也。

樣本空間之積

於投擲一骰子之實驗中，吾人取$S=\{1,2,3,4,5,6\}$作爲其樣本空間。於投擲一錢幣之實驗中，則取$R=\{H,T\}$作爲樣本空間。倘若吾人先投擲一骰子，繼之投擲一錢幣，則此一實驗之可能結果爲$(1,H)$，$(2,H)$，$(3,H)$，$(4,H)$，$(5,H)$，$(6,H)$，$(1,T)$，$(2,T)$，$(3,T)$，$(4,T)$ $(5,T)$，$(6,T)$。其中各記號之前者表示投擲骰子之結果而後者則表示投擲錢幣之結果。類似$(1,H)$之形式之記號在數學上稱爲**有序元素對**。於是，投擲一骰子與投擲一錢幣之**複合實驗**之樣本空間乃是由有序元素對所成之集合，其中各有序元素對之前者爲S之元素而後者爲R之元素。於集合論中，此集合稱爲S與R之**卡氏積**（或S與R之積）；以$S\times R$表之。

爲求集合之積而不致將元素遺漏，一個有效的方法是作一個樹狀圖。首先任意繪一鉛直綫段而於其上標出數點，自各點作一水平線段以表示有序元素對之前元素，而後從各綫段之另一端再繪數綫段用以表示有序元素對之後元素。於是所得之圖形很像樹枝之形狀，每一枝上皆帶有細枝。則從最左之鉛垂綫段出發往右移動皆須經過一樹枝與一細枝。此恰好形成集合之積之一有序元素對。於是自左至右之所有路綫恰好爲積集合。關於投擲一骰子與投擲一錢幣之樹狀圖繪出如右



$S=\{1,2,3,4,5,6\}$ $R=\{H,T\}$

$S\times R$之樹狀圖

研究積集合之樹狀圖，吾人可

得一個計算 $S \times R$ 之元素數目的公式。吾人所需做者只是將 S 之元素數乘以 R 之元素數。以式子列出即：$n(S \times R) = n(S) \cdot n(R)$。此公式可用另一種說法如下：若一複合實驗是由二實驗依序施行所組成，而前者有 n_1 種可能之結果，後者有 n_2 種可能之結果，則此複合實驗有 $n_1 n_2$ 種可能之結果。

投擲二錢幣

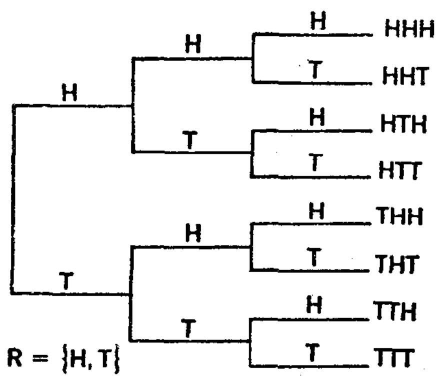
若吾人投擲二錢幣，不論是連續或同時投擲，每一錢幣之可能結果皆以樣本空間 $R = \{H, T\}$ 表之。則投擲二錢幣之實驗之樣本空間爲 $R \times R$。爲簡便計，吾人將 (H, T) 簡記爲 HT，餘類推。則 $R \times R = \{HH, HT, TH, TT\}$。此集合之元素數爲 $n(R)\,n(R) = 2 \times 2 = 4$。

投擲二骰子

若吾人投擲二骰子，不論是連續或同時投擲，每一骰子之可能結果皆以樣本空間 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 表之。則投擲二骰子之實驗之樣本空間爲 $S \times S$。而集合 $S \times S$ 之元素數爲 $n(S)\,n(S) = 6 \times 6 = 36$。

投擲三錢幣

若投擲三錢幣，則其每一可能之結果皆作如下之表示：先寫出第一錢幣之結果，其次爲第二錢幣之結果，再則爲第三錢幣。例如，HHH，HTH，THT，等等，皆爲可能之結果。此種結果皆爲有序三元素組，其第一元素爲投擲第一錢幣之樣本空間之元素，第二元素爲投擲第二錢幣之樣本空間之元素，第三元素爲投擲第三錢幣之樣本空間之元素。此種



$R \times R \times R$ 之樹狀圖