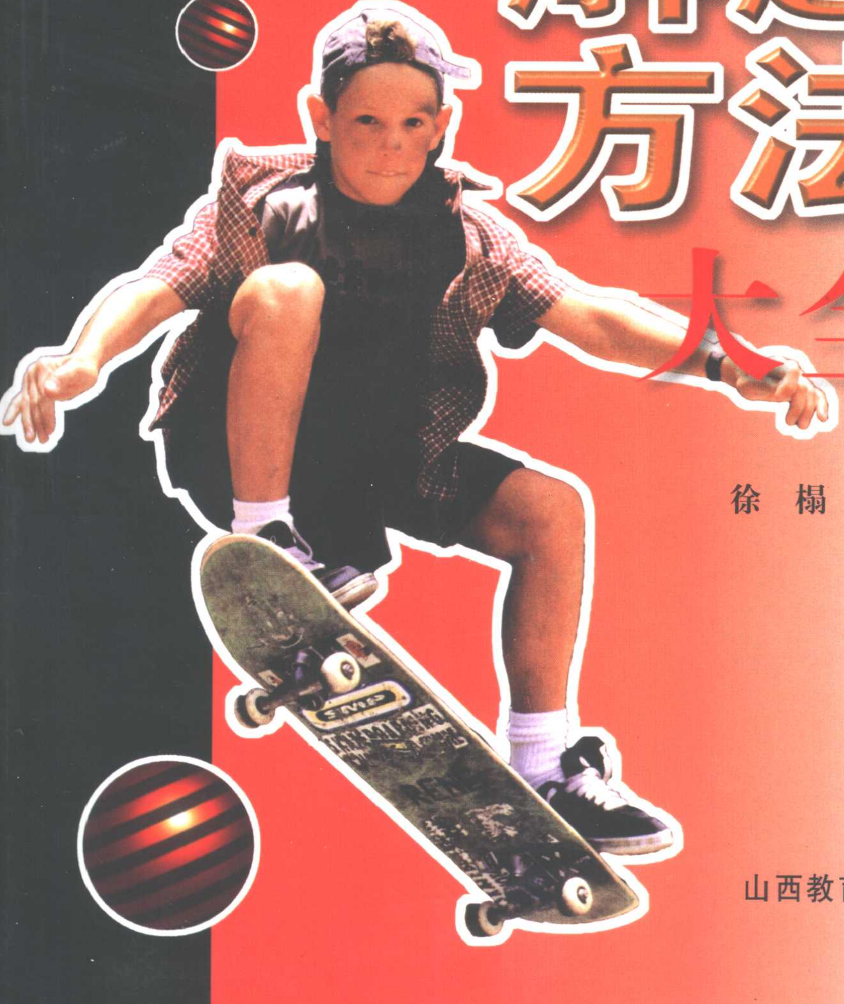
中国学生解题方法大全系列

初中代数

JIETIFANGFA

解题方法大全



徐 榻 /编著

山西教育出版社

初中代数解题方法大全

徐 榻 编著

山 西 教 育 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

初中代数解题方法大全/徐榻编．- 太原：
山西教育出版社，2001.2
ISBN 7 - 5440 - 1955 - 1

Ⅰ.初…　Ⅱ.徐…　Ⅲ.代数课 - 初中 - 教学参考资料　Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 68920 号

山西教育出版社出版发行
（太原市迎泽园小区 2 号楼）
山西新华印刷厂印刷　新华书店经销
2001 年 2 月第 1 版山西第 2 次印刷
开本:850×1168 毫米　1/32　印张:11
字数:271 千字　印数:10 001 - 20 000 册
定价:11.00 元

怎样解好数学题

（代序）

解数学题是一项综合性的活动，需要灵活运用你所学的各种数学知识、思想方法、解题技巧，涉及到的问题和必须注意的事项很多，本文略谈几点，供同学们参考.

1. 解题的目的是什么

解题的目的是什么？可能有的同学觉得我提这样的问题很可笑，然而实际上，的确还有很多同学对这个问题没有正确的认识，有的同学认为学数学就是要多解数学题，这种想法是错误的，至少可以说是片面的.我们说解题只是一种手段而不是目的，目的是要通过解题来巩固所学的数学知识，加深对所学知识的理解，增加运用所学解题方法技巧的熟练程度，训练灵活运用数学知识的能力，而不是简单地追求解题数量的多少，如果没有掌握解题的方法和技巧，那么做再多的题也于事无补；相反，如果善于总结解题的规律，解题之后注意琢磨所运用的方法技巧，并在今后遇到类似的问题时能够灵活运用，甚至是创造性地运用，那就达到了解题的真正目的.

比如，我们在小学阶段经常做 10 以内数的加减法，目的是什么？就是要通过做这些练习来熟悉 10 以内数的加减法的法则.现在我们是初中生了，再也不用做这些题目了，因为我们已经掌握了 10 以内的加减法运算法则，再做这样的练习就没有丝毫的意义.

请同学们记住：千万不要为了解题而解题，否则，就会陷入茫茫题海而不能自拔.

2. 要有扎实的基本功

学数学打好扎实的基本功很重要，我们经常发现有的人解题时能够左右逢源，事半功倍，而有的人则思路闭塞束手束脚，这是

为什么？这是由于解题者的基本功的扎实程度不同.一般来说,基本功越扎实,则解题时的思路就越开阔,办法也就越多,速度也就越快,有时甚至能够一眼看破,达到捷如雷电的境界.这里举一个例子.

有一道智力测试题是这样的：

【例 1】某甲从 A 地到 B 地的速度是 60 千米/小时,从 B 地返回 A 地的速度是 30 千米/小时,则他在 AB 两地间往返一趟的平均速度是（　　）(要求在 5 秒钟之内回答)

A.40 千米/小时；　　B.45 千米/小时；

C.50 千米/小时；　　D.55 千米/小时.

如果允许你算一算,当然人人都能得出正确的答案,但这是一道智力抢答题,答题的时间有很严格的限制,这就看谁的基本功更扎实了,也许你记得一个求平均速度的公式：

某甲从 A 地到 B 地的速度是 a 千米/小时,从 B 地返回 A 地的速度是 b 千米/小时,则他在 AB 两地间往返一趟的平均速度是 $\frac{2ab}{a+b}$ 千米/小时.

有了这个公式,就可以迅速算出结果是 $\frac{2\times60\times30}{60+30}=40$ 千米/小时.这样算的速度是快了很多,但不一定能在 5 秒钟之内完成.如果你的基本功再扎实一点,知道下面的规律：

某甲从 A 地到 B 地的速度是 a 千米/小时,从 B 地返回 A 地的速度是 b 千米/小时,则他在 AB 两地间往返一趟的平均速度：当 $a=b$ 时,平均速度等于 $\frac{a+b}{2}$ 千米/小时；当 $a\neq b$ 时,平均速度小于 $\frac{a+b}{2}$ 千米/小时(可以证明当 $a\neq b$ 时,$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$).

在上题中,60 千米/小时与 30 千米/小时的平均数是 45 千米/小时,由于 $60\neq30$,故答案应比 45 千米/小时小(如果你选了 B,那

此为试读,需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

就太没有基本功了！有不少的同学容易犯这个错误)，在四个选择支中与这个结论相符的只有 A，于是就能很快得出正确答案了. 这样的解题思路有 1 秒至 2 秒就足足有余了.

3. 注意审题(识破题中的陷阱)

审题的内容很多，其中一个重要的方面就是要识破题中的陷阱，这是正确解题的关键. 如果题中设立了一个陷阱，而我们没有识破，就必定会落入命题人设置的圈套，造成解题的错误. 举一个例子：

【例 2】已知 $abc \neq 0$，并且$\frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{1}{2p}$，那么一次函数 $y=px-p$ 的图象一定经过______象限.

(1998 年贵州省中考试题)

【错解】$\because \quad \frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{1}{2p}$，

$\therefore \quad \frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{1}{2p}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$.

于是，$p=1$，一次函数解析式为 $y=x-1$，图象过一、三、四象限.

这里，本题就有一个陷阱，在应用等比定理时，必须满足一个条件：$a+b+c\neq 0$，这个条件很隐蔽，容易让人忽略. 应该分 $a+b+c\neq 0$ 和 $a+b+c=0$ 两种情况求解.

【解】当 $a+b+c\neq 0$ 时，如前面所述；

当 $a+b+c=0$ 时，可得 $a+b=-c$，故$\frac{1}{2p}=-1$，得 $p=\frac{1}{2}$.

因此，一次函数解析式为 $y=x-1$ 或 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. 故一次函数图象经过一、三、四象限或一、二、四象限.

4. 善于寻找突破口

解题时常会有感到束手无策的时候，因为你面临的是一道看起来似乎很难的题目. 但是，任何难题都不是“铁板一块”，都会有

解题的突破口,只要找准了这个突破口,问题就会迎刃而解.举例如下.

【例 3】任意调换五位数 12345 的各数位上的数字位置,所得的五位数中,质数的个数是 ( )

A.4; B.8; C.12; D.0.

(1986 年江苏省初中数学竞赛试题)

这道题初看起来,如果考虑任意调换的各种情况,会有很多种可能性.突破口在哪里呢?我们经过观察发现 $1+2+3+4+5=15$,是 3 的倍数,不管怎样调换这五个数码的位置,它们的和仍然是 3 的倍数,而各数位上的数字之和是 3 的倍数的数能被 3 整除,所以,不管怎样调换这五个数码的位置,所得的数都是合数,即质数的个数为 0,故选 D.

5.恰当地选择解题方法

解题时,解题方法的选择很重要,如果解题方法得当,不仅成功率高,而且解题的速度也很快.反之,如果解题方法不当,不仅很费时间,而且成功率很低,有时甚至不能达到目的.这里举一个例子.

【例 4】因式分解 a^6-b^6.

对于这道题,有两种方法可以实施:

【解法一】 $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

【解法二】 a^6-b^6

$=(a^2)^3-(b^2)^3=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$=(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$.

这里,解法二是不完整的,其中$(a^4+a^2b^2+b^4)$还可以继续分解,结果是$(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$.不过需要运用拆项的技巧,它的难度比较大,很多同学都不能做出这一步,而停留在解法二这样的不完整答案上.

为什么用解法一能很顺利地得出正确答案，而用解法二就容易半途而废呢？这就是解题方法选择是否得当的问题.对于本题来说，选用解法一是得当的，它能迅速准确地得出正确答案，而选用解法二则增加了问题的难度，等于说是人为地给自己设置了陷阱，稍不注意就会出错.

以上是方法不当导致解题难度增加的例子，有时方法不当，还会导致解题不能顺利进行，这里就不再多说了.

6.学会对难题进行肢解

大凡难题，都是由一些简单的题目进行组合、改造、叠加而成，如果能把一道难题肢解成若干个简单些的“小题”，则解起来就会容易得多.举一个例子：

【例 5】已知下列三个方程有公共根

$$ax^2+bx+c=0, \quad ①$$

$$bx^2+cx+a=0, \quad ②$$

$$cx^2+ax+b=0. \quad ③$$

(1)求证：$a+b+c=0$；

(2)求方程①、②、③的根；

(3)求式子$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$的值.

对于这道题目，可以说得上是一道综合题，它涉及到的知识很多，如果把它不断地肢解成一些简单的问题，可以得到下列这些命题：

一、根据根的定义，如果数 m 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则把这个数代入该方程中，左右两边应该是相等的，即得到 $am^2+bm+c=0$；

二、若 $a=b, c=d, e=f$，则 $a+c+e=b+d+f$；

三、若 $ab=0$，而 $a\neq0$，则 $b=0$；

四、如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数满足 $a+b+c$

$=0$,则该方程必有一个根是 1;

五、根据一元二次方程根与系数的关系,如果 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根是 1,则它的另一个根是$\frac{c}{a}$;

六、乘法公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

上面经过肢解后的这六个问题都不是太难,如果你把这六个问题都一一熟练地解答出来了,再把它们综合起来就可解出前面的综合题了.过程如下(请注意下面的解法渗透了上述六个命题的解答思路):

(1)设 m 是这三个方程的公共根,根据根的定义,得

$$am^2+bm+c=0, \quad ④$$

$$bm^2+cm+a=0, \quad ⑤$$

$$cm^2+am+b=0. \quad ⑥$$

三式相加并整理得:

$$(a+b+c)(m^2+m+1)=0.$$

$$\because \quad m^2+m+1=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \quad \therefore \quad a+b+c=0.$$

(2)因为 $a+b+c=0$,所以这三个方程都有一个根是 1(这就是它们的公共根),于是,方程①的另一个根是$\frac{c}{a}$,方程②的另一个根是$\frac{a}{b}$,方程③的另一个根是$\frac{b}{c}$.

(3)将 $a+b+c=0$ 代入乘法公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$中得 $a^3+b^3+c^3=3abc$,所以分式$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3$.

7.注意一题多解

很多数学题都是有多种解法的,经常探索一道题的多种解法,可以培养我们良好的思维习惯,不至于在难题面前束手无策.得到

一道题的多种解法后，可以互相比较它们的优劣，便于从中找出最简捷、最巧妙的解法. 举一个例子.

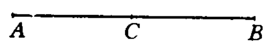
【例 6】A、B 两地间的距离是 36km，甲从 A 地、乙从 B 地同时出发相向而行. 二人相遇后，甲再走 2 小时 30 分到达 B 地，乙再走 1 小时 36 分到达 A 地. 求二人的速度.

这是一道典型的行程问题应用题，一般能够得出一至两种解法. 但如果深入分析题意，至少可以得到如下的六种解法. 下面一一列出，供同学们参考.

【解法 1】设甲乙二人的速度分别为 x 千米/小时、y 千米/小时，依题意得$\begin{cases}\dfrac{36}{x+y}x=1.6y,\\ \dfrac{36}{x+y}y=2.5y.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=8,\\ y=10.\end{cases}$

答：甲乙二人的速度分别为 8 千米/小时、10 千米/小时.

【解法 2】如图，设两人出发后 x 小时在 C 点相遇，因为当速度不变时，路程的



比等于时间的比，甲走 AC、BC 两段路程的时间比为$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{x}{2.5}$；乙走 AC、BC 两段路程的时间比为$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1.6}{x}$，所以有$\dfrac{x}{2.5}=\dfrac{1.6}{x}$，解得 $x=2$(负值舍去). 于是，甲的速度为$\dfrac{36}{2+2.5}=8$ 千米/小时，乙的速度为$\dfrac{36}{2+1.6}=10$ 千米/小时.（答略）

【解法 3】设甲的速度为 x 千米/小时，则 BC 长可表示为 $2.5x$ 千米，从而 AC 的长是$(36-2.5x)$千米，于是乙的速度为$\dfrac{36-2.5x}{1.6}$千米/小时，甲走完 AC 所用时间为$\dfrac{36-2.5x}{x}$小时，乙走完 BC 所用时间为 $2.5x\div\dfrac{36-2.5x}{1.6}$ 小时，依题意有 $2.5x\div\dfrac{36-2.5x}{1.6}=$

$\frac{36-2.5x}{x}$，解得 $x_1=8$，$x_2=72$（舍去），从而求出乙的速度是 $\frac{36-2.5\times 8}{1.6}=10$ 千米/小时.

【解法 4】设 AC、BC 两段路程的比为 x，因甲走完 AC、BC 所用时间的比等于路程的比，所以甲走完 AC 用 $2.5x$ 小时，同理求出乙走完 BC 用 $\frac{1.6}{x}$ 小时. 依题意有 $2.5x=\frac{1.6}{x}$. 解得 $x=\frac{4}{5}$，即 $\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}$ 所以 $AC=36\times\frac{4}{9}=16$ 千米，$BC=36\times\frac{5}{9}=20$ 千米，故甲的速度为 $\frac{20}{2.5}=8$ 千米/小时，乙的速度为 $\frac{16}{1.6}=10$ 千米/小时.（答略）

【解法 5】设 $AC=x$ 千米，则 $BC=(36-x)$ 千米，于是甲的速度是 $\frac{36-x}{2.5}$ 千米/小时，乙的速度是 $\frac{x}{1.6}$ 千米/小时，甲走完 AC 所用的时间是 $\frac{x}{\frac{36-x}{2.5}}$ 小时，乙走完 BC 所用的时间是 $\frac{36-x}{\frac{x}{1.6}}$ 小时，依题意有 $\frac{x}{\frac{36-x}{2.5}}=\frac{36-x}{\frac{x}{1.6}}$，解得 $x=16$，下同解法 4.

【解法 6】设在 C 点相遇时乙比甲多走 x 千米，则 $AC=(18-\frac{x}{2})$ 千米，$BC=(18+\frac{x}{2})$ 千米，于是甲的速度是 $\frac{18+\frac{x}{2}}{2.5}$ 千米/小时，乙的速度是 $\frac{18-\frac{x}{2}}{1.6}$ 千米/小时，甲走完 AC 所用的时间是 $(18-\frac{x}{2})\div\frac{18+\frac{x}{2}}{2.5}$ 小时，乙走完 BC 所用的时间是 $(18+\frac{x}{2})\div\frac{18-\frac{x}{2}}{1.6}$ 小时. 依题意得

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\left(18-\frac{x}{2}\right)\div\frac{18+\frac{x}{2}}{2.5}=\left(18+\frac{x}{2}\right)\div\frac{18-\frac{x}{2}}{1.6}.$$

解得 $x_1=4$, $x_2=324$(舍去).

所以 $AC=18-\frac{x}{2}=16$ 千米,下同解法 4.

8. 注意寻求妙解

我们解数学题一般都是按常规方法去解,而忽视了很多题目的巧妙解法,这就要看你的探索精神如何了,如果对任何问题都只满足于一种顺理成章的解法,而不去想一想还有没有其他的、更为巧妙的解法,那就很难上档次了.下面举一个例子.

【例 7】甲乙两个工程队合做一项工程,12 天可以完成,如果甲队先单做 5 天后,乙队也来参加,两队再合做 9 天才完工.两队单独完成这项工程各需要多少天?

本题的常见解法是:设甲乙两队单独完成这项工程各需 x 天、y 天,依题意得

$$\begin{cases}12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1;\\ \frac{5}{x}+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1.\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x=20,\\ y=30.\end{cases}\quad(答略)$$

现给出三种妙解如下:

【妙解 1】根据题意有:甲队单做 5 天的工作量,相当于两队合做 3 天$(12-9=3)$的工作量,于是甲队单做 2 天的工作量相当于乙队单做 3 天的工作量.所以如果甲队单做需 x 天完成这项工程,则乙队单做需$\frac{3x}{2}$天.由两队合做 12 天完成得 $12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3x}{2}}\right)=1$

解得 $x=20$,于是$\frac{3x}{2}=30$.(答略)

【妙解 2】由“两队合做 12 天完成”扩大 3 倍得:两队合做 36 天可以完成 3 个这样的工程(条件 1);由“甲队先单做 5 天,再两队合

做 9 天完成”扩大 4 倍得：甲队先单做 20 天，再两队合做 36 天可以完成 4 个这样的工程（条件 2）. 比较（条件 1）和（条件 2）得：甲队单做 20 天可完成一个这样的工程，之后不难求出乙队单做需 30 天完成.

【妙解 3】把这项工程分为 120 个单位，由“两队合做 12 天完成”知两队合做 1 天可完成 10 个单位. 由“甲队先单做 5 天，再两队合做 9 天完成”知甲队单做 5 天可完成 $120-10\times9=30$ 个单位. 于是甲队单做 1 天可完成$\frac{30}{5}=6$个单位，甲队完成全部工作量需$\frac{120}{6}=20$天. 乙队单做 1 天可完成 $10-6=4$ 个单位，完成全部工作量需$\frac{120}{4}=30$天.

以上几种妙解的构思都非常巧妙，打破了常规，冲出了我们平常解题时一般的思维定势. 如果我们的思路仅仅只局限于常规解法，就很难得到这样的妙解了.

9. 多一点置疑意识

当你经过一番思考和演算，终于解出了一道数学题后，也许就会急于下结论了. 且慢！还要对你的解答过程及结果做一些综合分析，比如看计算是否有误；答案与题意是否相符；题意理解是否正确；是否有互相矛盾的地方；是否还有更简捷的解法……所有这些，都是你做完一道数学题后应该考虑的问题. 下面以美国第七届中学生数学奥林匹克竞赛的一道试题为例，谈谈解题中的自我判断问题.

【例 8】已知：a、b、c、d、e 是满足

$$a+b+c+d+e=8. \quad ①$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16 \quad ②$$

的实数，试确定 e 的最大值.

先给出两种解法供同学们鉴别.

【解 1】①×2+②得

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2(a+b+c+d+e)=32.$$ 配方得

$$(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2+(d+1)^2+(e+1)^2=37.$$

$$\therefore\quad (e+1)^2=37-[(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2+(d+1)^2]$$

$$\leqslant 37. \qquad ③$$

$$\therefore\quad -\sqrt{37}\leqslant e+1\leqslant\sqrt{37}.$$

$$\therefore\quad -\sqrt{37}-1\leqslant e\leqslant\sqrt{37}-1.$$

故 e 的最大值是 $\sqrt{37}-1$.

【解 2】②-①×2,得

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-2(a+b+c+d+e)=0,$$ 配方得

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2=5.$$

$$\therefore\quad (e-1)^2=5-[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2]$$

$$\leqslant 5. \qquad ④$$

$$\therefore\quad -\sqrt{5}\leqslant e-1\leqslant\sqrt{5},\quad \therefore\quad -\sqrt{5}+1\leqslant e\leqslant\sqrt{5}+1.$$

故 e 的最大值是 $\sqrt{5}+1$.

以上两种解法看起来都似乎很有道理,但答案却不相同,并且都是错误的.我们来剖析一下,在③式中等号成立的条件是什么?是 $(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2+(d+1)^2=0$,即 $a=b=c=d=-1$.把这个条件代入①得 $e=12$,代入②得 $e=\pm\sqrt{12}$,e 都不能等于 $\sqrt{37}-1$,这就不能自圆其说了.

用同样的剖析方法,可知解 2 也不能自圆其说.

况且,由以上两种解法继续推下去,还可以得到更加矛盾的东西.请看

②+①×4 得

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+4(a+b+c+d+e)=48. \qquad ⑤$$

配方得 $(a+2)^2+(b+2)^2+(c+2)^2+(d+2)^2+(e+2)^2=68$

$$\therefore\quad (e+2)^2=68-[(a+2)^2+(b+2)^2+(c+2)^2+(d+2)^2]$$

$$\leqslant 68.$$

$\therefore \quad -\sqrt{68}\leqslant e+2\leqslant\sqrt{68}, \quad \therefore \quad -\sqrt{68}-2\leqslant e\leqslant\sqrt{68}-2.$

故 e 的最大值是$\sqrt{68}-2$.

不断改变⑤式中括号前面的系数,就会得到不同的答案.难道说 e 的最大值是一个不确定的数吗? 这是个令人啼笑皆非的结论! 这说明上面两种解法从方法上来讲是完全错误的.

下面给出问题的正确的解法.

【正解】构造辅助二次函数

$$\begin{aligned} y &= (x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2+(x+d)^2 \\ &= 4x^2+2(a+b+c+d)x+(a^2+b^2+c^2+d^2). \end{aligned}$$

因为 $y\geqslant 0$,且二次项系数为正,故抛物线 y 与 x 轴相切或相离.于是 $\Delta\leqslant 0$,即

$$[2(a+b+c+d)]^2-4\times 4\times(a^2+b^2+c^2+d^2)\leqslant 0.$$

将①、②式代入上式得 $\quad (8-e)^2-4(16-e^2)\leqslant 0.$

解得 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$,故 e 的最大值是$\frac{16}{5}$.

答案出来了,凭什么说它是正确的呢? 还得进行综合考察.也许你有了前面解 1、解 2 的教训,这次你也要问一问:e 能取$\frac{16}{5}$吗? 此时 a、b、c、d 的值各是多少? 问得好! 如果我们不能求出 $e=\frac{16}{5}$时其余四个字母的取值,就要对这个答案打上问号了.

将 $e=\frac{16}{5}$代入①、②两式得

$$a+b+c+d=\frac{24}{5}, \tag{6}$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{144}{25}. \tag{7}$$

仿照前文的做法,构造二次函数

$$\begin{aligned} y' &= (x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2 \\ &= 3x^2+2(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

因为 $y' \geqslant 0$，且二次项系数为正，故抛物线 y' 与 x 轴相切或相离，于是 $\Delta' \leqslant 0$，即

$$[2(a+b+c)]^2-4\times 3\times(a^2+b^2+c^2)\leqslant 0,$$

将⑥、⑦式代入上式得 $(\frac{24}{5}-d)^2-3(\frac{144}{25}-d^2)\leqslant 0$，

整理得 $(2d-\frac{12}{5})^2\leqslant 0$， $\therefore\quad d=\frac{6}{5}$.

将 $d=\frac{6}{5}$ 代入⑥、⑦式得：

$$a+b+c=\frac{18}{5}, \qquad ⑧$$

$$a^2+b^2+c^2=\frac{108}{25}. \qquad ⑨$$

同上述求 d 的方法，再构造二次函数 $y''=(x+a)^2+(x+b)^2$，求出 $c=\frac{6}{5}$（过程从略）. 代入⑧、⑨式得

$$a+b=\frac{12}{5}.$$

$$a^2+b^2=\frac{72}{25}.$$

解出 $\quad a=b=\frac{6}{5}$.

于是求出：当 $e=\frac{16}{5}$ 时，$a=b=c=d=\frac{6}{5}$. 检验一下，果然有 $\frac{6}{5}+\frac{6}{5}+\frac{6}{5}+\frac{6}{5}+\frac{16}{5}=8$， $(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^2+(\frac{16}{5})^2=16$ 两式成立.

由此可知，e 取 $\frac{16}{5}$ 是确实可行的. 现在能否下结论说 $\frac{16}{5}$ 就是正确答案呢？还为时过早！题目是要求 e 的最大值，e 还能不能取比 $\frac{16}{5}$ 更大一些的值呢？比如 e 取 3.3 行不行呢？推导一下：

将 $e=3.3$ 代入①、②式得

$a+b+c+d=4.7$,

$a^2+b^2+c^2+d^2=5.11$.

构造二次函数 y,使

$$\begin{aligned} y &= (x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2 \\ &= 3x^2+2(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

因为 $y\geqslant 0$,且二次项系数为正,故抛物线 y 与 x 轴相切或相离,于是 $\Delta\leqslant 0$.

另一方面,$\Delta = [2(a+b+c)]^2-4\times 3\times(a^2+b^2+c^2)$,

$$\begin{aligned} &= 4[(4.7-d)^2-3(5.11-d^2)] \\ &= 4[4d^2-9.4d+6.76] \\ &= 4[(2d-2.35)^2+1.2375]>0. \end{aligned}$$

这与 $\Delta\leqslant 0$ 互相矛盾.这说明 e 取 3.3 时,没有符合题意的 d 值.也就是说 e 不能取 3.3(e 取其他大于$\frac{16}{5}$的值时,情况都是这样).

至此,我们才可以断定$\frac{16}{5}$是 e 可取的最大值.

诚然,在答卷上我们只需写出前文的正确部分,但要确定其正确性却并非易事,只有这样瞻前顾后,作多方面的考察,使其能够自圆其说,才能最后定夺.

10. 发挥经典习题的作用

课本中很多习题有很强的代表性,如对它进行一番加工、提炼、引申、推广,往往可以取到以点带线、以线带面的效果.举一个例子如下:

课本中有一道解方程题是:

【例 9】解关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$.

先将这个方程的解法简介如下:

去分母,两边都乘以 x 得:$x^2+1=(c+\frac{1}{c})x$,移项得

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com