金牌奥校

数学奥林匹克集训题精编

郑 廉 曹付生 主编

初中三年级AB卷

中国少年儿童出版社

金牌奥校

数学奥林匹克

SHUXUE AOLINPIKEJIXUNTIJINGBIAN

郑 廉 曹付生 主编

集训题精编

初中三年级AB卷

AB

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克集训题精编．初中三年级 AB 卷/《金牌奥校》编写组编．- 北京：中国少年儿童出版社，2000.12

（金牌奥校）

ISBN 7 - 5007 - 5518 - X

Ⅰ．数…　Ⅱ．金…　Ⅲ．数学课 - 初中 - 习题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 78992 号

数学奥林匹克集训题精编·初中三年级 AB 卷

作者：黄　珲　王忠钦　刘　红　李青霞

中国少年儿童出版社　出版发行

责任编辑：惠　玮　余俊雄

美术编辑：徐　欣

社址：北京东四十二条 21 号

邮政编码：100708

印刷：山东济南新华印刷厂

经销：新华书店

850×1168　1/32　9.875 印张　233 千字

2001 年 1 月北京第 1 版　2001 年 1 月山东第 1 次印刷

印数：1—20000 册

ISBN7 - 5007 - 5518 - X/G·4310

（全四册）总定价：43.20 元　本册定价：10.80 元

编写说明

推进素质教育，培养创新能力，是当前我国教育改革的一个重大方向，并受到教育界的普遍重视和社会的广泛关注。多年的学科竞赛实践表明，合理地开展学科竞赛活动，是促进学校教育改革，提高学生学科素质的积极因素。

为了配合素质教育改革的形势需要，进一步推动学科竞赛活动的开展，我们依据统编教材，并按照我国学科竞赛大纲的规定，编写了这套《金牌奥校》丛书。希望能对中学生开阔视野、启迪思维、发展智力、提高能力有所帮助，从而促进从知识型向能力型的转变。同时也希望能为广大同行在对学生实施素质教育的过程中提供一些参考。

《金牌奥校》丛书是数学、物理、化学等专业学会专家学者及奥校教练员、部分省市教研员，在认真分析了中学生应具备的各学科基础知识和基本技能的前提下，结合奥校智能训练实际情况编写而成的，本丛书有以下二个特色：

一、面向全体中学生

本丛书覆盖了中学的全部基础知识、基本方法、基本技能和学科思想。取材源于统编教材，但又不局限于课本，坚持“强化基础，适当提高，突出重点”的原则，对课本内容作了必要概括、合理变通和适应拓广。因此该套丛书可作为中高考复习资料。

二、照顾有兴趣特长的中学生

本套丛书设立了专题研究，对竞赛中的常见方法在理论和实践的基础上作了综合性研究，可培养深广的学科思维能力、学科思想方法和学科应用意识。因此本套丛书又可作为竞赛学习、培训的资料和教材。

本套丛书按年级和学科编写，并包括以下几个部分：奥林匹克教程、奥林匹克集训题精编、奥林匹克题典、奥林匹克模拟试卷。内容由易到难，由简入繁，讲练结合，编排科学合理。

本丛书是在统一规划下，根据详细的计划界定而由全体编委分工编写的。它是教学和科研的成果，是集体智慧的结晶。在编写和统稿的过程中，我们虽然注意博采众长，并力求有自己的风格，但由于水平有限，缺点和错误难免，诚恳地希望读者能提供宝贵意见和建议。

编　者

目 录

第一讲 二次方程……………………………………………(1)
第二讲 判别式……………………………………………(6)
第三讲 根系关系 …………………………………………(12)
第四讲 函数初步 …………………………………………(20)
第五讲 三角函数 …………………………………………(30)
第六讲 待定系数法 ………………………………………(35)
第七讲 几何计算 …………………………………………(39)
第八讲 定值最值 …………………………………………(47)
第九讲 共圆点 ……………………………………………(52)
第十讲 几个重要定理 ……………………………………(60)
第十一讲 垂内重外 ………………………………………(67)
第十二讲 不等式 …………………………………………(73)
第十三讲 反证法 …………………………………………(79)
第十四讲 分类与讨论 ……………………………………(84)
第十五讲 染色问题 ………………………………………(89)
综合训练(一) ……………………………………………(94)
综合训练(二) ……………………………………………(97)
参考答案……………………………………………………(101)

第一讲　二次方程

A　卷

一、选择题

1. 下列方程是一元二次方程的为(　　)

①$ax^2=bx$.　　②$-\frac{3}{2}x^2-2x=\frac{1}{3}$.

③$(x-2)(2x-1)=0$.　　④$x^2+\frac{1}{x}-2=0$.

⑤$x+\sqrt{x^2-1}=1$.　　⑥$x^2+5=(x-1)(x+4)$.

(A)①,②,④,⑥.　　(B)②.

(C)①,②,③,④,⑤,⑥.　　(D)②,③.

2. 已知方程 $x-1=0,(x-1)(x+1)=0,x(x-1)(x+1)=0$ (　　)

(A)它们的解都相同.

(B)它们无相同的解.

(C)三个方程都有一个相同的根 $x=1$.

(D)以上说法都不对.

3. 用配方法解方程 $x^2-\frac{2}{3}x-1=0$ 时,应将其变形为(　　)

(A)$(x-\frac{1}{3})^2=\frac{8}{9}$.　　(B)$(x+\frac{1}{3})^2=\frac{10}{9}$.

(C)$(x-\frac{2}{3})^2=0$.　　(D)$(x-\frac{1}{3})^2=\frac{10}{9}$.

4. 关于 x 的方程 $x^2-m(3x-2m+n)-n^2=0$ 的解为(　　)

(A) $x_1=2m+n, x_2=m-n$.

(B) $x_1=2m, x_2=m-n$.

(C) $x_1=m+n, x_2=m-n$.

(D) $x_1=2m+n, x_2=m+n$.

5. 关于 x 的方程 $mnx^2-(m^2-n^2)x-mn=0$ 的解为(　　)

(A) $x_1=\frac{m}{n}, x_2=\frac{n}{m}$.　　(B) $x_1=\frac{m}{n}, x_2=-\frac{n}{m}$.

(C) $x_1=-\frac{m}{n}, x_2=\frac{n}{m}$.　　(D)以上答案都不对.

二、填空题

6. 已知方程 $(x-2)^2-2(x-2)=-1$,则方程的解为______.

7. 关于 x 的方程 $x^2-(p^2+q^2)x+pq(p+q)(p-q)=0$ 的解为______.

8. 方程 $x^2-3|x|-4=0$ 的解为______.

9. 关于 x 的方程 $2(m+1)x+1=(|m|-1)x^2$,只有一个实根,则 $m=$______.

10. 方程 $[x]^2-[x-4]-6=0$ 的解为______.

三、解答题

11. 用适当的方法解下列方程.

①$9(2x+3)^2-4(2x-5)^2=0$;

②$\frac{1}{2}x^2-5=\sqrt{3}x$;

③$(2x-1)^2+3(2x-1)+2=0$;

④$x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{2}x-\sqrt{6}=0$.

12. 解方程

①$x^2-2|x|+1=0$;

②$|2x+1|^2-3|2x+1|=0$.

13. 解下列关于 x 的方程

①$(x+a)(x-a)=8a^2$;

②$(2x+a)^2-(3x-2a)^2=0$;

③$(2x^2-3x-2)n^2+(1-x^2)m^2=mn(1+x^2)$

$(m+2n\neq0, m-n\neq0)$;

④$ax^2+bx+c=0$.

14. 已知方程$(2000x)^2-1999\cdot2001x-1=0$ 的较大根为 α,方程 $x^2+1999x-2000=0$ 的较小根为 β,求 $\alpha-\beta$ 的值.

15. 若方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+bx+a=0$ 只有一个公共根,则 $(a+b)^{2000}=?$

B 卷

一、选择题

1. 方程 $ax^2+bx+c=0(a<0)$有两个实根,则两个实根的大小关系是(　　)

(A)$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\geqslant\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(B)$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(C)$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\leqslant\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(D)$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2. 若 a 是方程 $x^2+4x+1=0$ 的一个根,则 $2a^2+8a-5$ 的值为

(　　)

(A) -3.　　(B) -7.　　(C) 5.　　(D) 7.

3. 方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实数根为(　　)

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个.

4. 方程 $x^2-3|x|-2=0$ 的最小一个根的负倒数是(　　)

(A) -1.　　(B) $-\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{17})$.　　(D) $\frac{1}{4}(\sqrt{17}-3)$.

5. 下列四个一元二次方程中只有有理根的是(　　)

(A) $x^2-4x-8=0$.　　(B) $x^2-4x-12=0$.

(C) $x^2-4x-1=0$.　　(D) $x^2-4x+8=0$.

二、填空题

6. 若 2 是方程 $2x^2+mx-10=0$ 的一个根,则 m 的值为______.

7. 方程 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 的整数解有______组.

8. 关于 x 的方程 $(a^2-4)x^2-2(a+2)x+1=0$ 恰有一个实根,则 $a=$______.

9. 当 p 是质数时,关于 x 的方程 $x^2-3x+p=0$ 的根是______.

10. 若多项式 x^3+bx^2+cx+1 与多项式 x^3+cx^2+bx+1 有关于 x 的一次公因式,则 b 与 c 的关系为______.

三、解答题

11. 解下列关于 x 的方程

①$x^2+mx+2=mx^2+3x$;

②$x^2+x-2+k(x^2+2x)=0$;

③$a^2x^2-2ax+1=ax^2-x$.

12. 解下列关于 x 的方程

①$abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$;

②$a(a-2x)=b^2-x^2$;

③$a^2x^2+b^2x-a^2-b^2=0$;

④$cx^2+bx-a=0$.

13. 解下列关于 x 的方程

①$x^2+3a|-x|-4a^2=0$;

②$2x^2-3m|-x|-2m^2=0$;

③$|x^2-1|+m|x^2+1|-3m-1=0$.

14. 若方程 $x^2-6x-k-1=0$①与 $x^2-kx-7=0$②有相同根,试求 k 值和相同根、相异根.

15. a、b 均为自然数,且 $a\neq b$.若一元二次方程 $(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$①与 $(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$②有一个公共根,求 $\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

16. 一个直角三角形的两条直角边的边长都为整数,且均满足方程 $x^2-(m+2)x+4m=0$,试求实数 m 的值.

17. 已知 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实根,$s_1=x_1+x_2$,$s_2=x_1^2+x_2^2$,$s_3=x_1^3+x_2^3$.求证:$as_3+bs_2+cs_1=0$.

18. 在实数范围内把 $-2x^2-4x+11$ 分解因式.

19. 把 $6x^2-xy-15y^2-5x+21y-6$ 分解因式.

第二讲　判别式

A　卷

一、选择题

1. 设 a、b 是两个实数,方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ (　　)
(A)必有两个实数根.　　(B)无实根.
(C)一定有两个等根.　　(D)以上答案都不对.

2. 若方程 $x^2-px+p=0$ 有相等实根时,实数 p 的个数为(　　)
(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

3. $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 没有实数根,k 的最小整数值是(　　)
(A)-1.　(B)2.　(C)3.　(D)4.

4. 如果关于 x 的方程 $(m+1)x^2-4mx+4m-2=0$ 有两不相等的实根,那么(　　)
(A)$m>1$.　　(B)$m<1$.
(C)$m<1$ 且 $m\neq-1$.　　(D)$m\leqslant1$.

5. 若方程 $y=x^2$ 与 $y=3x+k$ 有两个相等的公共解,则 k 等于(　　)
(A)$\frac{4}{9}$.　(B)$-\frac{4}{9}$.　(C)$\frac{9}{4}$.　(D)$-\frac{9}{4}$.

二、填空题

6. 若方程 $kx^2-2(k+1)x+k=0$ 有两个不相等的实根,则 k ____;若方程有两个相等的实根,则 k ______;若方程没有实根,则 k

______.

7. 如果关于 x 的二次方程 $a(1+x^2)-c(1-x^2)-2bx=0$ 有两个相等实根,那么以正数 a、b、c 为边长的三角形为______.(填"锐角三角形"、"钝角三角形"、"直角三角形"、"任意三角形".)

8. 关于 x 的方程:$3kx^2+12x+k+1=0$ 有两个相等的实根,则 k 的值为______.

9. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m+1)x+(3m^2+4mn+4n^2+2)=0$ 有实根,则 $m=$______,$n=$______.

10. 使得关于 x 的二次方程 $(2-m)x^2-2x+6=0$ 无实根的最大整数 $m=$______.

三、解答题

11. 当 m 为何值时,$(m-1)x^2+2mx+m-2=0$

(1)方程有两个相等的实根.

(2)方程没有实根.

(3)方程有两个不相等的实根.

12. 求证:方程 $3x^2-(k-3)x+(k^2-\frac{k}{2}+1)=0$ 没有实根.

13. 已知方程 $(m+2)x^2-4mx+m=0(m\neq-2)$ 有等根,试解此方程.

14. 已知关于 x 的一元二次方程:$x^2+2(a+b)x+2a-b^2+6b-4=0$($a$、$b$ 是实数),当 $b=1$ 时,方程有一个大于 0 而小于 1 的根,试确定 a 的取值范围.

15. 已知关于 x 的方程 $x^2+2x=n-1$ 没有实数根,求证:关于 x 的方程 $x^2+nx=1-2n$ 一定有两个不相等实数根.

B 卷

一、选择题

1. 使实系数二次方程 $2mx^2+(4m+1)x+2m=0$ 有两个不相等的实数根的 m 的取值范围是(　　)

(A) $m<-\frac{1}{8}$.　　(B) $m>-\frac{1}{8}$.

(C) $m\geqslant-\frac{1}{8}$.　　(D)以上结果都不对.

2. 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $m=(2ax_0+b)^2$ 的关系是(　　)

(A) $\Delta>m$.　(B) $\Delta=m$.　(C) $\Delta<m$.　(D)不确定.

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(m+1)x+(3m^2+4mn+4n^2+2)=0$ 有实根，则 m、n 的取值是(　　)

(A) $m=-1, n=\frac{1}{2}$.　　(B) $m=\frac{1}{2}, n=-1$.

(C) $m=-\frac{1}{2}, n=1$.　　(D) $m=1, n=-\frac{1}{2}$.

4. 已知关于 x 的二次方程 $x^2-k=2x$（k 为实数）无实根，则关于 x 的二次方程 $x^2+2kx+1+2(k^2-1)(x^2+1)=0$ 的根的情况：(　　)

(A)有两个不等的实根.

(B)有两个相等的实根.

(C)无实根.

(D)无法判断.

5. 设 m、n 为整数，则方程 $x^2+10mx+5n+3=0$ 和 $x^2+10mx+5n-3=0$ 必定(　　)

(A)至少有一个有整数根.

(B)均无整数根.

(C)仅有一个有整数根.

(D)均有整数根.

6. 若 a,b,c,为$\triangle ABC$ 的三边,且方程 $4x^2+4(a^2+b^2+c^2)x+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=0$ 有两个相等实根,则$\triangle ABC$ 一定是 (　　)

(A)直角三角形.　　(B)等腰三角形.

(C)等边三角形.　　(D)等腰直角三角形.

7. 若对任何实数 a,关于 x 的方程 $x^2-2ax-a+2b=0$ 都有实数根,则实数 b 的取值范围是(　　)

(A)$b\leqslant 0$.　(B)$b\leqslant -\frac{1}{2}$.　(C)$b\leqslant -1$.　(D)$b\leqslant -\frac{1}{8}$.

二、填空题

8. 使得关于 x 的二次方程 $(2-m)x^2-2x+6=0$ 无实根的最大整数 $m=$______.

9. 若方程 $(m+1)x^2-(2m-1)x+m-1=0$ 有两个相异实根,则 m 的取值范围是______.

10. 若方程 $x^2-4(m-1)x+3m^2-2m+4k=0$ 对任意有理数 m 均有有理根,则 $k=$______.

11. 若在关于 x 的三个二次方程 $x^2+4ax-4a+3=0$, $x^2+(a-1)x+a^2=0$, $x^2+2ax-2a=0$ 中至少有一个实数解,则 a 的取值范围是______.

12. 设 b 取 1~11 之间的偶数,c 取任意自然数,则可以组成有两个不等实根的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的个数是______.

13. 设 m 为自然数,且 $4<m<40$,若方程 $x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$ 的两根均为整数,则 $m=$______.

14. 设关于 x 的方程$(a^2-1)x^2-2(5a+1)x+24=0$有两个负整数根,则 a 的值是______.

三、解答题

15. 若正整系数二次方程 $4x^2+mx+n=0$ 有两个不相等的有理根 p、q,且 $p<q$,又方程 $x^2-px+2q=0$ 与方程 $x^2-qx+2p=0$ 有一公共根.试求方程 $x^2-px+2q=0$ 的另一个根.

16. 当 a、b 为何值时,方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有两个实数根?

17. 方程 $x^2-2x-m=0$ 无实根,试判定方程 $x^2+2mx+1+2(m^2-1)(x^2+1)=0$ 有无实根.

18. 若 $a>0$,且 $b>a+c$,试证方程 $ax^2+bx+c=0$ 有不相等的两实根.

19. m 为给定的有理数,k 为何值时,方程 $x^2+4(1-m)x+3m^2-2m+4k=0$ 的根总为有理数.

20. 求证:对任何的实数 x,都有 $x^2-4x+5>0$.

21. 已知$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=1$,求证:$b^2+4ac\geqslant 0$.

22. 已知 a、b、c、d 都是实数,且 $a\neq 0$,$(a^2+b^2)d^2+b^2+c^2-2b(a+c)d=0$,求证:$b^2=ac$.

23. 已知三角形的一个内角为 α,且角 α 的两边是方程 $x^2-2x+2-\sin\alpha=0$ 的两个根.求证:这个三角形是等腰直角三角形.

24. 如果 a、b、c 是一个三角形的三边,证明不论 x 为任何实数,总有 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$.

25. 当 m 为何值时,多项式 $x^2-y^2-2x+8y+m$ 能分解成两个一次因式之积?并对 m 的这个值,分解这个多项式.

26. 已知 a 为实数,且使关于 x 的二次方程 $x^2+a^2x+a=0$ 有实根,求该方程的根所能取到的最大值.

27. a 为实数,$M=(\sqrt{2}+\sqrt{3}-a)^2$,$N=4(a-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})$.问 a 为何值时,$M>N$ 成立?

28. 设非零实数 p_1、p_2、q_1、q_2 满足关系式 $p_1p_2=4(q_1+q_2)$.证明:方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中至少有一个具有不等的实数根.