科學圖書大庫

高等工程數學

(第四冊)

譯者 黃友訓

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十日再版

高等工程數學

(第四冊)

基本定價　1.80

譯者　黃友訓　逢甲工商學院教授

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號
承印者 大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

譯 者 序

本叢書共有六冊原名 Ingenieur-Mathematik ，內容具有許多優點。例如（1）材料新穎而豐富，適合工程師在大學研究高深學問之需要；（2）本書的重點，不在證明許多定理，而在鼓勵讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立解答各習題；（3）介紹新的數學觀念，培養純粹數學的思考方式；（4）各章附有問題與實例，切於實際的應用；（5）每冊後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題之求解更爲重要；（6）本書頗適合於我國各大學工學院所訂新的課程標準。按照新的規定，微積分與微分方程均屬工學院一年級必修科目；讀完微積分與微分方程，接着讀這本書，在程度上有相當的啣接。

本叢書直譯之名，應爲“工程師數學”，根據原著者弁文所說，這六冊叢書是由教工學院的講義整理而成；在證明方面不夠嚴密，但對於工程上的應用特別注重。所以用於工學院比較適合；因此本人決定改用“高等工程數學”此一比較符合原著者數學目的之書名。

本叢書第一冊原著頗多在文字上不能自圓其說（譯者按：原著者本人之德文亦並不高明）與排版錯誤之處，均經譯者逐次予以訂正。

黃友訓謹識

民國五十九年七月於逢甲學院土木工程學系。

弁　言

本叢書第一冊開始就講到級數，而將級數戴上“工程師數學”的頭銜者，其用意並非對工程師所指定的一種特殊數學，以表示與自然科學家所用的數學，或與所謂純粹數學有相反的內容之意；本書第一冊所講的級數，主要是針對工科各學系的學生可能應用之問題；就是自然科學的定律也應該就其重點加以說明。決定這一個目標，一則是爲了對教材有所選擇，而此教材主要是滿足直至特許工程師前期考試（ Diplomvorprüfung ；譯者按：德國之 Diplom 學位等於英美之碩士學位）所需要之普通數學講授者。二則本書第一冊中也爲此包含一些工業大學第一學期一開始就習慣採用的教材；於是對於所有———好比由於工業實習———高中畢業後不立即繼續深造的學生而言，容易使之進入高深數學而尋求自修的門徑。

除了對教材有所挑選之外，本人認爲尚有重要的一點，即本叢書與一般數學教授所用的書籍，在數學的方法上大有區別。譬如按照目前的習慣，研讀數學時特別就其通俗性着重於觀念的澄淸，進而加以分析，並且劃分其有效境界；但初入世的工程師與自然科學家所面對的問題，是有計劃的或有效驗的觀念問題；從他們感興趣的狹窄領域而言，此觀點對於他們自然較爲親切，而且對於他們日後的任務總要作爲有所依據的準繩。這是爲了工程師數學（簡稱工程數學）所能做的明顯結論，應該在此處就函數觀念中一個例子予以說明。工程學生對於一般的函數觀念，是絲毫不感覺興趣的；通常所觀察病理上的情形，據他們看來，自始就無什興趣或者甚至令人討厭的稀奇古怪之事物。但此處使適合而有效的進入分析的函數，却以解剖（即外科手術，俗稱開刀；在數學上則稱爲運算）爲出發點；借助於運算才產生許多不同的函數：由四則法（即加減乘除之總稱）導致多項式及有理函數；由多項式利用趨於極限的解析運算遂產生冪級數；由積分運算導入特別的超越函數（對數）；又由構成逆函數（或稱反函數）的運算，則以解析的方式導致指數函數與三角函數。然後由三角函數所組成的級數（即福里哀級數）有效的產生進入任意函數的廣大途徑。此外，具有歷史性的分析法，其過程直入十九世紀依

然不生變化；我們也要注意“functio”這個字，它與“operatio”一字相同，都是由並不古老的拉丁文而來，具有“功用”，“作用”，或“機能”（德文稱爲 Verrichtung ）之意義。然而有效驗的觀點並非陳腐的老生長談，在現代的基本學理探討上（以 Lorenzen 一人爲例）（譯者按：Dr. Paul Lorenzen 爲西德 Erlangen 大學之數學教授，著有“數學”一書，共一百七十三頁），業已指出：Lorenzen 博士在數學上對基本理論發生困難的克服，做了有用的一種列式假設，使該理論的確能夠成立。———再則在大部份數學教科書中作爲基礎的函數觀念，對許多應用方面的目的而言，也還是過於狹隘：二十世紀中所引用的一般化函數（例如分配律）已成爲不可或缺的數學理論，而在工程數學的圖示方面亦不能無之；本書決定把一般化函數附加於福里哀級數（ Fouriersche Reihen ）作有效驗的運用。

於是對於純粹數學的思考方式，自然不應該隨便剝奪其所賦與之權利；但如果到處適用的說法以及抽象的澄清有其必要的話，這種思考的方式總是不可付諸闕如的。凡特許工程師（ Diplomingenieur ；譯者按：凡在德國工業大學各工程學系畢業之學生，均稱爲特許工程師，或稱爲國投工程師）按其地位的固有意義，均負有發展新方法的使命（但非應用陳舊的方法；如用老的方法，那就沒有進大學研讀的必要了！）；他對數學的抽象批評方面所需要者，與對積極有效方面所需要者完全相同。本書中有關利用德得欽氏綫段分割法（ Dedekindsche Schnitte ）對實數的引用各章，不應該當作教育的裝飾品看待；各該章節乃帶來重要的思考方式！尤其每册後面增加研討許多問題的附錄，其中對觀念的分析比較，對習題的解答求得若干方法更爲重要。附錄的內容絕對不是多餘的。但讀者對各章所附一大堆實際例題，一定要等到融會貫通之後，才好徹底從事於該附錄內容之研讀。爲使讀者百尺竿頭再對各論題作進一步之研究起見，本叢書每册最後尚且介紹若干參考書籍，以便讀者選購。

本工程數學叢書並不缺乏精良優美的圖形表示。這些圖示，除了具備任何教科書所應有的目的外，對於後起之秀的工程師（讀者按：應指正在大專院校肄業之學生而言）尚有參考研讀之功用。本叢書是屬於袖珍小册子的性質，因爲作者在此處有意遷就適先所提及的二功用之一：對課堂聽教授講解之領悟應該有所幫助。此時如果它的結構與體裁有若干地方與剛才的聽講稍有偏差時，那是無關宏旨的；對於同一論題從多方面去認識與了解，總屬有益之舉。本書各章末了所附的問題與實例，乃爲了加深讀者的理解而加工修訂的。其目的在使讀者起初最好不倚賴書中之提示，而獨立自主的去求解各

課題！

最後，主要是 C. Schmieden 教授對作者所給予寶貴而親切的規勸與忠告，令人萬分感激。又教育委員H.J. Vollrath博士，候補工程師 H.Bött-Chen，及候補數學家 G.W. Thiel 諸位先生對原稿的共同閱讀與脩改，以及對附圖之謄清與描繪，均有莫大之贊助。還有對出版書局的熱誠合作，亦須在此表示感謝之忱．

Detlef Laugwitz 1963年暑假期間於西德 Darmstadt

目　錄

第一章　福里哀級數

Fouriersche Reihen

在微積分學的基本原理方面，**冪級數**扮演了特別重要的一個角色；不僅用**實數**來表示是如此，並且用**複數**來表示亦是如此。主要的原因乃在**冪級數**本身允許利用特別簡單而特殊的函數（好比**多項式**），就一定位置的附近接近於一般的函數。但這種利用**多項式**的近似值算法，對許多用途並不十分切實者，實因其關鍵只在局部的互相接近而已。假如吾人好比設想以時間爲變數的函數，而此函數對廣大時間而言，往往能自動的任意接近於一個常値者，那末一般就不必討論利用**多項式**的近似値算法。**週期函數**（或稱**循環函數**）也是特別重要的一種函數，因爲定期重複的事件出現之次數特別多的緣故。在本章中，我們要首先從事於研討適合於定期事件的**函數級數**（即以函數展成的級數）問題。這種代表週期現象的函數級數最初是由**福里哀氏**（Foseph Fourier；譯者按：此人是1768至1830年代的法國大數學家，曾爲拿破崙之親信。在國立編譯館所編**物理學名詞**上寫作**傅立葉**，亦有人譯爲**符立爾**者；實則法國名字按法文音來念，仍以**福里哀**的譯音比較切近一些）研究**熱量傳導**時作有系統的分析（當時是在18"2年）；所以稱爲**福里哀級數**。此處已顯示**函數級數**所屬一般理論的許多特點，我們將在後面第九章中加以討論。

爲了要令人獲得一個具體印象起見，吾人首先設想以變數 t 代表時間。假如 $f(t+2L)=f(t)$ 適用於所有時間 t（$-\infty<t<+\infty$），則此函數 $f(t)$ 稱爲含有週期爲 $2L$ 的**循環性函數**（又稱**週期函數**）。由此可見　當徹底的解說情形之下，我們所要討論的，是各該時按時間 $2L$ 重複出現若干次的週期性現象問題。除了**常函數**以外，我們要拿下面的三角函數

$$\sin\frac{n\pi t}{L}\quad,\qquad \cos\frac{n\pi t}{L}$$

及所有能用加法由上列二函數所組合而成的函數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1} a_n\cos\frac{n\pi t}{L}+b_n\sin\frac{n\pi t}{L} \qquad (1\cdot1)$$

做個例子來講，上式中之 a_n 及 b_n 是代表常數者。如將**絕對項**寫成 $\frac{a_0}{2}$，必將證實為適合乎目的的。假如（1.1）式內所表示的和數僅包含有限多的項，那就屬於一種**三角多項式**的問題；如果有無限多的相加項目之存在，而且到處具有收歛性，則當前應為一種**三角級數**。不論**三角多項式**或**三角級數**，均為**週期函數**，或稱**循環性函數**。

具有決定性的問題乃在逆轉方面：究竟那一種**週期函數**可以用**三角級數**來表示？凡經由比較易於理解的**三角多項式**能彼此逐漸接近的函數，究有若干等級？當**福里哀**（Fourier）時代，對這些問題的解答曾經導致駭人聽聞的一種說法：即許多不能完全滿足同一"**函數定律**"的"任意"函數，可用**三角級數**表示出來。甚至可以出現好比有限個跳躍性的不連續點（或稱有限數目的不連續情形）；這是與**泰洛級數**（Taylorsche Reihen）主要不同之處。（譯者按：關於**函數之跳距**，可參閱成大教授**袁定培**教授所編"高等工程數學"上册第276頁）

我們對此極為普通的理論，要提出有助於發明的各種想法，作為研討的第一步驟。首先我們要假定函數 $f(t)$ 含有週期 2π；因此 $f(t+2\pi)=f(t)$，而且有下列一種**級數展開式**的存在：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \qquad (1.2)$$

我們所要討論的問題，乃為求**福里哀係數** a_n 與 b_n 的問題。為此還要繼續加以假定者，即該級數可以接受逐項的積分；意即吾人能將無限的**求和法**及**積分法**予以互相交換。至於這兩種極限轉變的交替，即**求和法**與**積分法**，並非一**蹴可幾**之事實，我們已在本叢書第二册第42頁中討論過了。可是為了上述有助於發明的各種想法，我們要假定這種互相交換的方法是行得通的。又在何種條件之下，證明如此做法是毫無疑問的，以後將再詳加說明。

在所有如此假設之下，首先產生下面的積分式：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=\pi a_0$$

因為超越正弦及餘弦項的積分經過完整的一個週期便等於零的緣故。是則我們可以說：$\frac{a_0}{2}$ 是等於函數 $f(t)$ 的平均值

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

如以$\cos mt$（m是代表正整數者）乘方程式（1.2），則在和數符號下予以積分時求得下面一個式子：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\,dt$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos mt+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^{2\pi}\cos nt\cos mt\,dt$$

$$+b_n\int_0^{2\pi}\sin nt\cos mt\,dt.$$

此處我們利用本叢書第二册第 61 頁所講的**正交關係**，可使全部出現的積分盡行消失（即等於零之意），惟獨下式是例外：

$$\int_0^{2\pi}(\cos mt)^2 dt=\pi$$

由此求得另一公式如下：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\,dt=a_m\pi \tag{1.3}$$

此外上式亦適用於$n=0$。（由於這個原因，所以為了常數項亦已選定$a_0/2$這個符號。）經過與$\sin mt$ 相乘，並且予以積分之後，同樣產生以下的結果：

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin mt\,dt=b_m\pi \tag{1.4}$$

由此可見，在已知的假定之下，是可以毫不含混的求出**福里哀係數**的。如此求得的係數公式（1.3）與（1.4）是否眞正導致表示已知函數的一個級數；在我們對此問題未加研究與分析之前，要討論若干例題。一般言之，形式上是具有決定於積分之係數的級數，才能並列於其週期等於2π的函數$f(t)$：

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \tag{1.5}$$

其中　$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$，　$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$

我們要為若干特殊函數，對a_n與b_n進行計算。事先尚須斷然作一次提示者

卽求得之公式不能隨便就視爲有用的方程式。對於這種事實，我們只有在下述的情形下才有相當把握，卽函數 $f(t)$ 可用**福里哀級數**表示出來，先天的(或完全脫離經驗而成立的)取得保證，而且此外**積分法**與**求和法**的互相交換，確實有效的場合。如此場合之存在，可由以下所擧簡單例題立卽看出來。至於一個函數什麽時候才能使之展開成爲**福里哀級數**，我們對於這種情形較爲普通的判別準則，以後將再詳加討論。

屬於其週期等於 2π 的最簡單函數，應爲 $\sin t$ 與 $\cos t$ 的乘冪，及其線性組合。按照**加法定理**，這種最簡單的函數每可利用中間截斷的**福里哀級數**表示出來，例如

$$\cos^2 t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t, \qquad \sin^3 t=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t$$

在這些情形之下，吾人可應用**加法定理**而避免**積分法**的實施。在可用中間截斷的**福里哀級數**表示的函數方面，也無庸辭費的一目了然者，卽所有我們的考慮是確實有效的，因爲就有限個和數而言，**積分法**與**求和法**的次序每可任意交換的緣故。由此可見，方程式(1.5)如用等號連起來，亦能生效。

如何利用**三角多項式**

$$P_N(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt$$

求任意函數 $f(t)$ ～～其週期等於 2π 者～～的近似值，這是很普通的一個問題；爲了解答這一類問題，我們首先要提及的一點，就是如果只對**平均收斂性**有所要求，亦卽平均對所有 t 提出下面的要求：

$$\lim_{N\to\infty}|f(t)-P_N(t)|=0$$

那是不足以對付實地應用的。(意卽：配合任何一個 $\varepsilon>0$，應有一個號碼 $N=N(\varepsilon)$ 之存在；因此，取所有 t 的絕對值(卽不計其正負號)言之，差分 $f(t)-P_N(t)$ 是小於 ε。)這種强而有力的要求之所以不合時宜者，實因在實地應用方面經常出現不連續的**週期函數**之故；好比"切碎的"的直流電路(der zerhackte Gleichstrom)：

$$f(t)=\pm 1$$

其中好比正號是適用於 $0<t<\pi$，負號適用於 $-\pi<t<0$；而且其週期等於 2π 的函數似乎具有連續性者。因爲一個**三角多項式**是連續的，而且因爲含有跳躍性(或稍跳距)的一種函數一定不能隨便利用**連續函數**作平均而有規律的接近，所以吾人對於比較有節度的要求就應該感到滿足了。

所謂比較有節度的一種要求，乃指按照**近似求法**用**平方中數**來表示的要求而言。吾人要求下面的式子儘量變小：

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{f(t)-P_N(t)\}^2 dt \tag{1.6}$$

於是在各個單獨的點，例如$f(t)$ 的不連續點附近，可能出現等待接近的三**角多項式**所屬絕對比較大的偏差；這種偏差只許“在平均值方面”略具影響力而已。我們就在上列（1.6）式內觀察一個固定數N，而對α_k 及β_k 要作如此決定，即令平均誤差的平方

$$\phi_N = \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(t)-P_N(t)\}^2 dt \tag{1.7}$$

儘可能變成最小值。當預先假設的$f(t)$與N之情況下，ϕ_N 是代表含有$2N+1$個變數α_0，α_1，……，α_N，β_1，……，β_N 的一種函數。

為了顧及本叢書第二册第61頁所講的**正交關係式**吾人算出下面的式子：

$$\phi_N = \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ f(t)-\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos nt+\beta_n \sin nt\right)\right\}^2 dt$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} f^2 dt+\frac{\alpha_0^2}{4}\cdot 2\pi+\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nt\, dt$$

$$+\sum_{n=1}^{N} \beta_n^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nt\, dt-\sum_{n=1}^{N} \alpha_0\alpha_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nt\, dt$$

$$-\sum_{n=1}^{N} \alpha_0\beta_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nt\, dt-\alpha_0 \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt$$

$$-2\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\, dt-2\sum_{n=1}^{N} \beta_n \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\, dt.$$

如果我們再從上面（1.3）與（1.4）兩個式子中應用函數$f(t)$ 所屬**福里哀係數**的定義時，則產生求**均方誤差**（譯者按：在一般大學工學院土木工程系所講**測量平均法**方面，稱**均方誤差**為**中誤差**，即最能代表精度之**標準誤差**）之式子如下：

$$\phi_N = \int_{-\pi}^{+\pi} f^2 dt+\frac{\pi}{2}\{\alpha_1{}^2-2\alpha_0 a_0\}$$

$$+\pi\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2-2\alpha_n a_n)+\pi\sum_{\pi=1}^{N}(\beta_n^2-2\beta_n b_n) \qquad (1.8)$$

對此**均方誤差**的最小值而言，全部ϕ_N對α_n及β_n所求出的**偏導數**，必須自行消失（即等於零之意）；如下式所示：

$$0=\frac{\partial\phi_N}{\partial\alpha_0}=\pi(\alpha_0-a_0)$$

$$0=\frac{\partial\phi_N}{\partial\alpha_n}=2\pi(\alpha_n-a_n),\quad 0=\frac{\partial\phi_N}{\partial\beta_n}=2\pi(\beta_n-b_n)$$

於是我們求得符合於最小值的**必要條件**，即所有α_n及β_n應該等於函數$f(t)$的相當**福里哀係數**。此外易於令人了解者，乃爲此後眞正出現ϕ_N的最小值。因爲只有這一種可能性，把所有ϕ_N對α及β所求出的導數使之等於零；而「1因爲對$|\alpha_n|$及$|\beta_n|$的極大值而言，ϕ_N本身顯然亦可使之變成任意大的數值，所以其眞正的關鍵乃在一個極小值的問題。由此可見，爲了所有平方可積的函數，意即爲了一切具有下述特恃的函數，即除了求$f(t)$的積分之外，亦有求$f^2(t)$的積分之存在（見附註），我們提出下面的定理以資作進一步的說明：

〖**定理1.1**〗 在所有如下面所列N「次」的**三角多項式**中

$$P_N(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt$$

只有第N項後中間截斷的**福里哀級數**（$\alpha_n=a_n$，$\beta_n=b_n$）才能產生用**平方中數**所表示的最佳近似值。

〖**附註**〗吾人可以利明白指出，在如此假定之下亦有下列積分之存在：

$$\int_{\pi}^{+\pi} f(t)\begin{Bmatrix}\cos nt\\ \sin nt\end{Bmatrix}dt\;;$$

這主要是**舒華茨不等式**（Schwarzschen Ugleichung）的一個序列：

$$\left(\int f_g\,dt\right)^2\leqq\int f^2dt\cdot\int g^2dt$$

正如我們以後即將看出的情形，$\lim\limits_{N\to\infty}\phi_N=0$ 是適用於所有充分“合情合理的”函數，意即就**均方誤差**（或稱**中誤差**）的意義而言，**福里哀級數**事實上是眞正能表示函數$f(t)$的一種級數。還要加以提及的一點，即於此不可可能就證明（1.5）式的等號爲合理。下面的方程式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt+b_n\sin nt$$

乃說明左右兩邊的相等性是適合於任何 t 的。但這種情形從頭起就是無法期待的，因為函數 $f(t)$ 在各個地點 t 的變動，對（1.3）及（1.4）二式的積分是沒有影響的；因此，所屬的**福里哀級數**保持不變。那末，就物理的性質而言，以上所述在各個地點的變動，自然是毫無興趣的；而且因為這種變動對於**平方中數**亦不發生任何作用～～～在積分法方面更是無關緊要～～～，所以令人看出用**平方中數**表示**收歛性**的觀念應比**平均收歛性**的觀念易於適合各種應用問題。（其實，在**福里哀級數**方面所發生的收歛問題，甚至比**連續函數**難於處理；所以有一些不完全等於它的**福里哀級數**之**連續函數**；請讀者參考好比**麥史科武斯基**氏（H. Meschkowski）所著數學物理中有關級數的展開法（見西德Mannheim 城書目提要研究所出版之**大學袖珍叢書**第五十一册，第三十六頁以次）。對數學家而言，在那些條件之下（1.5）式子內才出現等號的問題，是頗饒意味的。但對實地應用的人而言，收歛的困難可使另一問題易於了解：即設若有人看出不顧收歛的困難，**福里哀級數**仍不失為有用之手段時，該古典的**收歛性觀念**必須用另一觀念取而代之；這個問題大概不可能有肯定的答案吧？為了對此實地應用的問題作正面的答復，第一個步驟就是引用以**中數**表示**收歛性**的觀念；第二個大為推廣的步驟，則為**一般化函數**的引用；我們對此函數的引用，將於下面第二章中詳加論列。

我們在此時此地要討論若干特性例題。

A）茲設

$$f(t)=\begin{cases}+1 & \text{令 } 0<t<\pi\\ -1 & \text{令 } -\pi<t<0\end{cases}\text{，以 }2\pi\text{ 為週期}$$

平均值顯然等於零，亦即 $a_0=0$，函數是屬於**奇函數**，亦即等於乘積 $f(t)\cos nt$；因此，

積分 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt$ 等於零。所以所屬的**福里哀級數**是一種純粹的**正弦級數**。我們計算

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}-\frac{(-1)^n}{n}\right\}。$$

是則屬於上述函數的**福里哀級數**應為：

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi}\left\{\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \cdots\cdots\right\}$$

在第一圖中，是表示了**第一近似值**的輪廓。

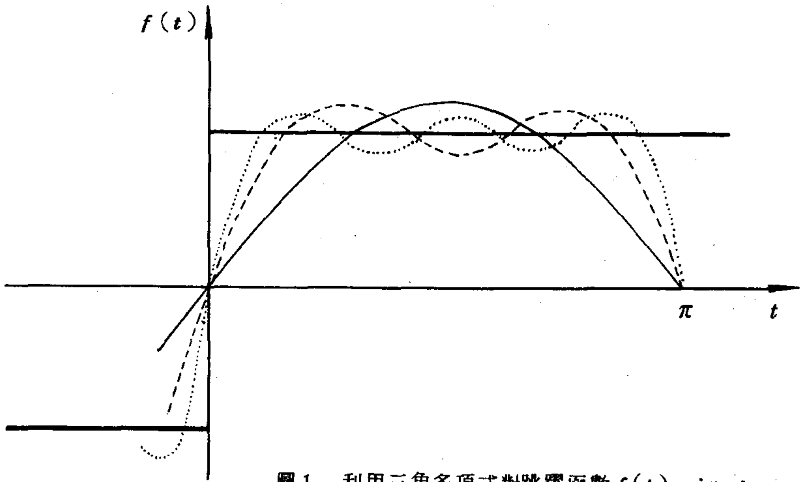

圖 1　利用三角多項式對跳躍函數 $f(t)=\text{sign } t$ $(|t|<\pi)$ 的近似值求法

B) 函數 $f(t)$ 的定義，如令 $0<t<2\pi$，假設決定於下式：

$$f(t)=\frac{\pi-t}{2}$$

而且假定其週期等於 2π 。這也是一個**奇函數**（見第二圖），由此產生所屬的級數如下：

$$\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots\cdots$$

此外，吾人要注意者，即以上所舉兩個例題中，緊靠不連續處之一旁（即曲綫間斷之處）並沒有規定任何函數值。**福里哀級數**就在跳躍處（或稱不連續地點）O 的旁邊完全自動的產生 O 值，即曲綫不連續處左右兩旁函數值的平均值。

以上所舉 A 與 B 兩個例子中，$f(t)$ 是**奇函數**，亦即 $f(-1)=-f(t)$ 。在一個**奇函數** $f(t)=+f(-t)$ 中，反過來始終是係數 b_n 自行消失（即等於零），當前出現的是純碎的**餘弦級數**。

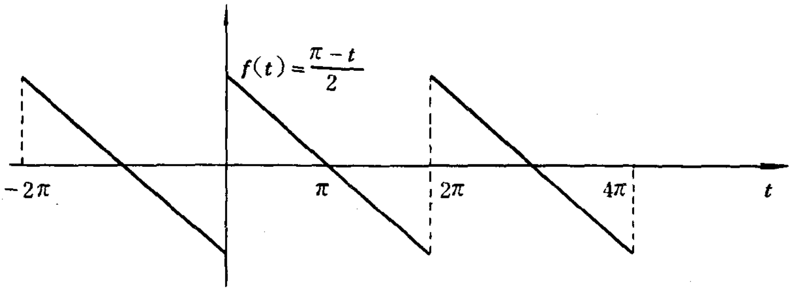

圖 2　$f(t)=\frac{\pi-t}{2}$（$0<t<2\pi$）示意圖

C）又設適合於$-\pi<t<+\pi$者是$f(t)=|t|$（見第三圖）。**平均值**顯然是$\frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{2}$；此外又可寫成下式：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|t|\cos nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos t\,dt=\begin{cases}0 & 令\ n=2k\\ -\frac{4}{\pi n^2} & 令\ n=2k+1\end{cases}$$

因此，產生所屬的**福里哀級數**如下：

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left\{\cos t+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\cdots\cdots\right\}$$

在本章最後一段尚有其他例題可供讀者參考。此處我們首先可以讀出者，即事實上能與一個**不連續函數**（見例題A）或與並非完全光滑的函數（見例題B與例題C）並列者，應爲十分簡單的**福里哀級數**。總是仍須加以說明的，就是在函數與其**福里哀級數**數之間，其相等性究竟可以討論到什麼程度（即函數與級數之間究竟具有若何相同的性質）。我們觀察一個例題，在此例題中能將**福里哀級數**直接予以相加，而不會招致失敗者。

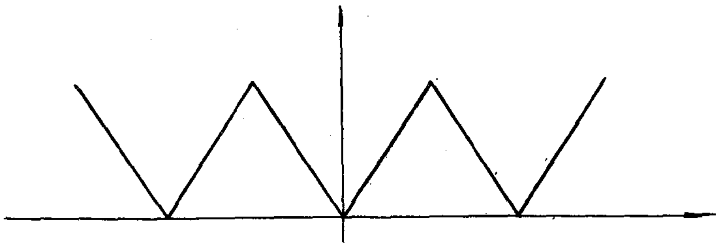

圖 3　函數$f(t)=|t|$（$|t|<\pi$）示意圖

D）下列的級數

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nt \qquad (0<q<1)$$

顯然是平均收斂的，因爲這種級數具有一個收斂的**幾何級數**（或稱**等比級數**）當作**強函數**（又稱**優函數**，或**控制函數**）$\sum_1^\infty q^n$ 的緣故。經由轉變成爲**複數**之後，該級數可設法使之合計起來，因爲按照**歐拉關係式**（die Eulersche Relation）可將這種級數當作一個**複項冪級數**的**虛數部分**看待（$Z=\cos t+i\sin t$）：

$$g(t)=I_m\sum_{n=1}^{\infty}(q_z)^n=I_m\frac{q_z}{1-q_z}$$

$$=\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}$$

吾人可以確實相信，如此求得的**奇函數**眞正具有**福里哀係數** $b_n=q_n$，即採用以數值表明**係數積分**的方式。是則在這一種特殊情形之下，已加以證實者，即函數的**福里哀級數**在任何位置都具有收斂性，而且甚至很平均的對此函數自行收斂。

在我們對於平均收斂問題未作進一步的說明之前，還要考慮一下用中數表示收斂性的若干問題。我們爲此牽涉到適用於**中誤差**（或稱**均方誤差**）的式子（1.8）。在該式子中已經顯示，如令 $\alpha_n=a_n$ 及 $\beta_n=b_n$，此一式子必將變成極小；亦即

$$\left.\begin{aligned}0\leqq\phi_N&=\int_{-\pi}^{+\pi}\{f(t)-P_N(t)\}^2\mathrm{d}t\\&=\int_{-\pi}^{+\pi}f^2\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\end{aligned}\right\}\qquad(1.9)$$

由此**不等式**產生下面另外一個式子：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\leqq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(t)\mathrm{d}t \qquad (1.10)$$

由此可以推斷下列的級數