管理应用数学基础（二）

线性代数

董大儒　主编

西南交通大学出版社

内 容 提 要

本书是《管理应用数学基础》的第二分册《线性代数》。它包括线性方程组、矩阵、n维向量、矩阵的特征值及投入产出数学模型等五章。其特点是以线性方程组贯穿全书，形成新的结构；在叙述上，深入浅出、通俗易懂，便于自学；在内容上，既坚持了专科标准，又体现了成人教育的特点。本书可供各类成人高等院校的管理、经济专业作为试用教材使用，也适合有志于经济管理工作的具有高中水平的人员自学之用。

管理应用数学基础（二）
线 性 代 数
XIANXING DAISHU
董大儒 主编
*
西南交通大学出版社出版
（四川 峨眉）
四川省新华书店发行
西南交通大学出版社印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：8.375
字数：184.8千字 印数：1—8000册
1988年10月第一版 1988年10月第一次印刷
ISBN 7—81022—049—7/O 009
定价：1.90元

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　线性方程组

初等代数的中心内容无疑是解方程问题，因而长期以来都把代数学理解为解方程的科学，数学家们也把主要精力集中在方程的研究上。方程的研究是从只含有一个未知数（未知数又简称为“元”）的一次方程，即一元一次方程开始的，然后向两方面发展（或推广）：一方面，增加未知数的个数，讨论含有两个未知数的一次方程所构成的方程组，以及含有三个未知数的一次方程所构成的方程组；另一方面，增高未知数的次数，研究含有一个未知数的二次方程，以及可以化为二次方程的特殊类型的高次方程。

沿着上述两个方向继续发展，代数学就由初等代数向着高等代数发展了。研究任意（有限）多个未知数的一次方程组（一次方程又称“线性方程”）发展成为线性代数；而研究次数更高的一元方程发展成为方程式论。本书只讨论线性代数的基础知识。

第一节　线性方程组的概念

首先让我们举出一些线性方程组的实例。

例 1　在平面解析几何里，直线方程是二元一次方程。研究两条直线的位置关系，相当于讨论两个二元线性方程所构成的方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

的问题。

当方程组只有一个解时，这个解正是两条直线交点的坐标；如果无解，表示它们平行；若有无穷多解，表示这两条直线重合。

我们还可以讨论三条直线是否共点（即经过一点）的问题（例如：三角形的三条高、三条中线、三条内角平分线等的共点）。这相当于讨论由三个二元线性方程所构成的方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases}$$

是否有唯一解的问题。

例 2 平面直角坐标系的转轴公式为

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases}$$

其中，(x, y) 为点的旧坐标；(x', y') 为点的新坐标；θ 为新、旧坐标轴之间的夹角。

如果已知点的旧坐标，而求新坐标，也是解线性方程组的问题。

例 3 我国古代有一部经典数学著作，叫做《孙子算经》，其中记载着这样一道算术题：

今有物不知其数。三三数之，剩二；五五数之，剩三；七七数之，剩二。问物几何？

设 x、y、z 分别表示所求物品件数被 3、5、7 除所得的商，根据题意，可列出下列方程

$$3x+2=5y+3=7z+2 \qquad \text{(物品件数)}$$

或改写成方程组

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 3x-7z=0 \end{cases}$$

这实质上是由两个三元线性方程所构成的方程组。

例 4 设有两个砖厂 A_1、A_2，砖的贮量分别是 23（万块）、27（万块）；它们供应 B_1、B_2、B_3 三个工地，其需要量分别是 17（万块）、18（万块）、15（万块）。自各砖厂至各工地的运价（元/万块）如表 1-1 所示

表 1-1

运价（元/万块）＼工地 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

试问：应如何调运，能使总运费最省？

设由砖厂 A_i（$i=1,2$）运往工地 B_j（$j=1,2,3$）的砖，其数量为 x_{ij}（单位：万块），列表 1-2 如下

表 1-2

运量（万块）＼工地 砖厂	B_1	B_2	B_3	发量（万块）
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收量（万块）	17	18	15	(50)

由砖厂 A_1 运往三个工地的砖，其总数应为 A_1 的贮量 23（万块），即 $x_{11}+x_{12}+x_{13}=23$；同样，由砖厂 A_2 运往三个工地的砖的总数应为 A_2 的贮量 27（万块），即 $x_{21}+x_{22}+x_{23}=27$。另一方面，两个砖厂供给工地 B_1 的砖数应等于 B_1 的需要量 17（万块），由此得方程 $x_{11}+x_{21}=17$；同样可得 $x_{12}+x_{22}=18$ 及 $x_{13}+x_{23}=15$。

于是，调运方案应为：满足下列线性方程组

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \end{cases}$$

的一组变量 x_{11}、x_{12}、x_{13}、x_{21}、x_{22}、x_{23} 的非负整数值，且使总运费

$$S=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$$

取最小值。

这里出现了六个未知数的线性方程组问题。

从以上诸例可以看到线性方程组的应用非常广泛。在自然科学、工程技术以及现代管理科学中，有许多问题的数学模型是线性方程组。

线性方程组的一般形式可以写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

其中，a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）称为线性方程组（1-1）的系数；b_i（$i=1, 2, \cdots, m$）称为（1-1）的常数项。它们都是已知的。

在线性方程组（1-1）中，如果$b_i=0$（$i=1, 2, \cdots, m$），即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{1-2}$$

则称为齐次线性方程组；否则，称为非齐次线性方程组。

利用求和号“Σ”，方程组（1-1）可以缩写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{1-1'}$$

的形式。

设有一组数$s_1, s_2, \cdots, s_n$，如果分别以s_j代替x_j（$j=1, 2, \cdots, n$），适合（1-1）。则称$s_1, s_2, \cdots, s_n$为线性方程组（1-1）的一个解。记作：

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

例如，由两个三元线性方程所构成的下列方程组

$$\begin{cases} 4x_1+7x_2+10x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2+\ \ 4x_3=-1 \end{cases}$$

可以验证

$$x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=1$$

是它的一个解，然而 $x_1=5$，$x_2=-3$，$x_3=0$ 不是这个方程组的解。因为这三个值适合第一个方程，但它们不适合第二个方程。

线性方程组的所有解构成的集合称为这个方程组的**解集**或**通解**。

上述方程组的通解为

$$x_1=-2+k,\ x_2=1-2k,\ x_3=k,$$

其中 k 可取任意实数，即 $k\in R$（R 表示全体实数集）。写成集合的形式

$$S=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\,|\,x_1=-2+k,\ x_2=1-2k,\ x_3=k,\ k\in R\}。$$

取 $k=1$，就得到前面所列举的解，它称为一个**特解**。

不是所有线性方程组都有解。例如，方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=3 \end{cases}$$

就无解，即其解集 $S=\phi$（空集）。称这样的方程组为矛盾的或不相容的线性方程组；至少有一个解的线性方程组称为相容的。

齐次线性方程组总是相容的，因为它们总有“平凡解”或“零解”，即 $x_i=0$，对一切 i。有的齐次线性方程组只有零解，如

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

只有零解。有的齐次线性方程组有非零解。如

$$\begin{cases} x_1+\ x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \end{cases}$$

有非零解，其通解为

$$x_1=-3k,\ x_2=2k,\ x_3=k \qquad (k\in R)$$

取 $k\neq 0$，可得非零解。

关于线性方程组，我们将讨论以下三个问题：

(1) **解的判别** 对于给定的线性方程组，如何判别它是相容的或是矛盾的？对于相容的情况，进一步研究解的数量问题。

(2) **解线性方程组** 当线性方程组相容时，如何求出它的所有解？

(3) **解的结构** 当线性方程组有一个以上解时，研究这些解之间的关系，这就是解的结构问题。

第二节 线性方程组与行列式

本节讨论方程个数与未知数（元）的个数相同的线性方程组。我们将引入行列式的概念，并研究行列式的基本性质及计算方法。最后应用行列式解线性方程组，给出解的公式——克莱姆法则。

一、二元线性方程组与二阶行列式

我们研究由两个二元线性方程所构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases} \qquad (1\text{-}3)$$

采用加减消元法解方程组（1-3）的过程如下：

为了消去方程组（1-3）中的 x_2，用 a_{22} 乘以第一个方程减去 a_{12} 乘以第二个方程。这个运算过程简记：$a_{22}\times(1)-a_{12}\times(2)$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同理，为了消去 x_1，进行下列运算：$a_{11}\times(2)-a_{21}\times(1)$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组（1-3）有唯一解，即

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}b_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-4}$$

式（1-4）就是二元线性方程组（1-3）在条件

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

下的解的公式。

在公式（1-4）中，共同的分母是由方程组（1-3）的系数构成的代数和，我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示这个代数和：$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶**行列式**，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{(定义为)}} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-5}$$

其中，横排称“行”，且 a_{11}、a_{12} 称为第一行，a_{21}、a_{22}

称为第二行；竖排称“列”，而a_{11}、a_{21}称为第一列，a_{12}、a_{22}称为第二列。又a_{11}、a_{22}称为主对角线，a_{12}、a_{21}称为副对角线。我们又称代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$为二阶行列式的值（或展开式）。

二阶行列式展开式的构造是：主对角线两个数（又称行列式的元素）之积减去副对角线两个数之积，如图1-1所示。

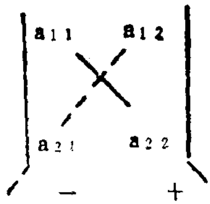

图 1-1

利用二阶行列式的记号，二元线性方程组（1-3）的解（1-4）可表示为

当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (1\text{-}4')$$

其中，分母是方程组（1-3）的系数按它们在方程组中的次序排列构成的行列式，称为方程组的系数行列式；分子是用

常数项 b_1，b_2 分别代换系数行列式中 x_1 所在列的系数和 x_2 所在列的系数后构成的行列式。

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=8 \\ 2x_1-\ \ x_2=3 \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=3\cdot(-1)-2\cdot 2=-7\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-8-6=-14$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=9-16=-7$$

因为系数行列式不为零，所以，所给方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-14}{-7}=2,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-7}{-7}=1$$

二、三元线性方程组与三阶行列式

我们研究由三个三元线性方程所构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 & (2) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 & (3) \end{cases} \qquad (1\text{-}6)$$

为解方程组（1-6），我们采用代入消元法，并利用前

面关于二阶行列式的结果。为此，将（1-6）中的方程（2）与（3）移项，改写为

$$\begin{cases} a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2-a_{21}x_1 & (2') \\ a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3-a_{31}x_1 & (3') \end{cases}$$

设二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

由（2′）与（3′）解出 x_2、x_3，得

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} b_2-a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3-a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{22} & b_2-a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3-a_{31}x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

将 x_2、x_3 代入（1-6）中的方程（1），消去 x_2、x_3，得

$$a_{11}x_1+a_{12}\frac{\begin{vmatrix} b_2-a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3-a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$+a_{13}\frac{\begin{vmatrix} a_{22} & b_2-a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3-a_{31}x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}=b_1$$

消去分母，即以$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$乘上式两端，得

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}x_1+a_{12}\begin{vmatrix} b_2-a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3-a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & b_2-a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3-a_{31}x_1 \end{vmatrix}$$

$$=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

计算各二阶行列式，经整理后，得

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\=b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3\\-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}$$

用类似的方法，可消去x_1、x_3及x_1、x_2，分别得

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_2\\=b_1a_{23}a_{31}+a_{11}b_2a_{33}+a_{13}a_{21}b_3\\-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_3\\=b_1a_{21}a_{32}+a_{12}b_2a_{31}+a_{11}a_{22}b_3\\-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3\end{aligned}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com