高等数学

第一册

李思谦 编著

四 川 大 学 出 版 社

内 容 提 要

这套教材，共分三册。第一册内容含函数、极限、连续性、一元函数微积分学、向量代数与空间解析几何学。第二册含多元函数微积分学、无穷级数、广义积分、常微分方程。第三册含线性代数与群论、概率论与数理统计、傅里叶级数与数理方程初步。

第一、二册注重基本概念的清晰度与逻辑推理的严密度，以求给学生良好的数学素质训练；每节末配有两种档次、数量足够的习题，章末编有综合练习题。第三册更多地考虑与专业相结合，更注重面上的覆盖，而不过多追求系统性及推理的严密度；各部分也配有程度相宜、一定数量的习题。

经多年教学实践证实，这套教材基本符合目前综合大学化学系各专业的教学需要，也可作为师范院校及工科院校有关专业的教材或参考书。

高 等 数 学

第一册

李思谦 编著

四川大学出版社（成都市四川大学内）

四川省新华书店发行 成都市农垦总公司印刷厂印刷

开本787×1092毫米1／32 印张14.4 字数300千

1988年3月第一版 1988年3月第一次印刷

印数：0001--8000册

ISBN 7—5614—0037—3／O·5

定价：1.94元

前　言

一、本课程的任务、内容与学时

高等数学(一)(包含一、二册)的任务有两个：(一)、提供学习大学化学及相近专业课程系列所必需的基础数学知识；(二)、通过知识的传授过程，使学生具有较好的数学素养与较强的学习能力。

本课程为必修课。内容可分为向量代数与空间解析几何、一元与多元微积分、无穷级数(傅里叶级数移入高等数学(二)(第三册)中)、常微分方程等单元。加有星号(*)的内容，如教学时间紧，可予略去。

学时分配为6(5+1，或4+2)，6(5+1)。

二、关于单元次序的安排

本书除了遵从内在逻辑要求之外，有三点说明：(一)、从教学实践看，将一元微积分与多元微积分分开，使学生的认识有一个螺旋式上升过程，是有好处的；(二)、将向量代数与空间解析几何安排在第四章，可保证于第一学期学完，从而可满足第二学期开设普通物理课之需；(三)、无穷级数是继极限之后的又一个较难掌握的部分，安排在第七章，从实践看，较为恰当。

三、关于习题的配置

习题编排在每一节的末尾。多数不难，可作课后练习题。少数稍难或典型性较强（加有星号＊），可供习题课选用。章末综合练习题，对学习水准较高的学生可较早接触，独立思考，力求独立完成，以培养能力；对于多数学生，可在经过一番思索后，由教师在稍晚一些时候的习题课上选讲个别，让其掌握。习题量比一般需要量偏多，以备教师选取和学有余力者选用。

四、微积分学的研究对象和研究方法

概略地说，微积分学研究的对象是函数，研究的基本方法是极限法，研究的结果是微分学（一元、多元），积分学（一元、多元）。学生应自始至终紧紧抓住这三个要点。

五、几个常用符号

“$A\Rightarrow B$”表示“如果命题A成立，则命题B成立”，说成“命题A蕴涵命题B”，表明“B是A的必要条件（*necessary condition*）”。“$\Rightarrow$”称作“蕴涵符号”。

“$A\Leftarrow B$”表示“如果命题B成立，则命题A成立”，说成“命题B蕴涵命题A”，表明“B是A的充分条件（*sufficient condition*）”。“$\Leftarrow$”称作“逆蕴涵（*converse implication*）符号”。

"$A \Longleftrightarrow B$" 表示 "命题A与命题B逻辑地等价"，即：当且仅当（*if and only if* 缩写为*iff*）命题*B*成立时命题*A*成立"，亦即 "*B*是*A*的充分必要条件（*necessary and sufficient condition*）"。"$\Longleftrightarrow$" 称作 "等价命题符号"。

"$\forall$" 表示 "对于所有的（*for all*）"，或 "对于每一个（*for every*）"，称作 "对于符号"。

"$\exists$" 表示 "存在" 或 "有" 或 "找得到"，称作 "存在符号"。

"$\exists!$" 表示 "存在唯一的"，称作 "唯一存在符号"。

"$\ni\cdot$" 表示 "满足"或 "使得"，称作 "满足符号"。

"$\sum\limits_{i=1}^{n} u_i$" 表 $u_1+u_2+\cdots+u_n$。"$\sum\limits_{i=1}^{n}$" 称作 "求和符号"。

"$\prod\limits_{i=1}^{n} u_i$" 表 "$u_1\cdot u_2\cdot\cdots\cdot u_n$"。"$\prod\limits_{i=1}^{n}$" 称作"求积符号"。

N表自然数集 $\{0,1,2,\cdots\}$（我国教材，特别是中学教材，自然数集多不含数0。美国教材则一般含0）。$\mathbf{N}^+$ 表正整数集 $\{1,2,\cdots\}$。**Z**表整数集 $\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$。

Q表有理数集。**I**表无理数集。

R表实数集或实数轴。

C表复数集。

$\varnothing$表空集。

最后说明，吴守玉教授和周城璧副教授是作者编写本书的直接推动者；吴元恺副教授曾仔细阅读过原稿，给予了充分肯定的评价，提出过一些很有教益的意见；余桂钧、任天视、肖金玉、武蔚文、罗积英、李清朗、李竹渝、张慎语等同事都曾参与过使用本书原稿的教学，他们给予了很大支持和帮助；王梅在工作之余花费了很大的精力为本书绘图；出版社为审阅该书稿付出了辛勤的劳动，李平、陈上鸣为联系排印作了不少工作，对以上提到的诸位，谨表示衷心的感谢。

限于编著者水平，书中难免有不妥当之处，敬望各方指教。

李思谦

一九八七年八月

目　录

第一章　函数、极限、连续性

本章先学函数，再学极限，然后应用极限方法研究函数的连续性。本章是微分学与积分学的**共同基础**。

第一节　函　　数

学习本节应达到三个**基本要求**：（ i ）、弄清函数概念（包括定义、符号、定义域、表示法，及反函数、复合函数、初等函数等概念）；（ ii ）、能用初等方法讨论函数的简单性质；（ iii ）、熟悉基本初等函数的图形和性质。

§1.1.1　函数概念

一、本原概念．概念的描述性定义

要学好高等数学（一），就必须切实弄清其中的一系列**基本概念**，诸如函数、极限、连续、导数、微分、不定积分、定积分、全微分、重积分、线积分、面积分、曲面与方程、空间曲线与方程、收敛级数、常微分方程的通解与特解，等．但要定义一个基本概念，往往又要用到一个或几个更简单、更基本的概念．这样，就有为数不多的几个概念，一方面，它们的含义易于理解；另方面，无法用比它们更简单的数学概念来严加定义．此种概念称为**本原概念**（*primitive notions*）．比如“量”、“集合”、“对应”就是本课程中

的本原概念。

对于本原概念，只能用文字描述其特征，并举若干例子，以明其含义。比如，什么叫**量**（*quantity*），无法严格定义，而说量是长度、角度、面积、体积、质量、温度、压力、浓度等具体量的数学抽象。这些具体量有一个共同的特征：每一个具体量都可用某个同类量作单位去度量，度量的结果得到一个实数。比如，可用厘米作单位去度量一个物件的长度，假定度量的结果是a厘米，此a就是一个实数。因此，经数学抽象后的量有特征：可以度量，度量的结果得一实数。称此实数为该量所取的**值**（*value*）。

又如，什么叫**集合**（*set*），也无法严格定义，而说“集合”是某些确定的、可区分的对象的总体，其中的每一个对象都叫做该集合的**元素**（*element*），比如，全体实数形成一集合，一数轴上的全体点也形成一集合，笛卡尔坐标法已经建立起这两个集合间的一一对应关系。这两个集合均记为 $\mathbf{R}$。

这种对于一个本原概念的描述称作**概念的描述性定义**（*descriptive definition*）。数学中，若对非本原概念使用描述性定义，则被认为是不严格的。

二、函数的定义．概念的界定性定义

在一个确定过程中始终取同一值的量称作**常量**（*constant*）；可取不同值的量称为**变量**（*variable*）。习惯上常用拉丁字母中开头的一些字母 a，b，c 等表示常量；用末尾的一些字母x，y，z，u，v，w等表示变量。几何上，常量可用数轴上的一个定点来表示；变量可用数轴上的一个

注：本书中的“∃”和“∀”分别用“Ǝ”和“∀”表示。

动点来表示。站在统一的观点上，常量是变量的特殊情形。

定义1.1.1 设有两个变量x，y。若存在某个对应法则f，使得对于x在数集$\mathbf{X}$中所取的每一个值，y都有确定的值相对应，则称变量y为变量x的**函数**（*function*）；称x为**自变量**（*argument, independent variable*），y为**应变量**（*dependent variable*），记成

$$y=f(x), \quad x\in\mathbf{X}.$$

此时并说y与x有**函数关系**。

例1、设自由落体开始下落的时间为0，落地时间为T。从中学物理已知，下落路程S是下落时间t的函数，可写成

$$S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2, \quad t\in[0, T].$$

此处，f所表对应法则是：对取自$[0, T]$的每一t值，先施行平方运算，再乘以常数$g/2$，即得量S的对应值。

例2、狄里赫列函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q};\\ 0, & x\in\mathbf{I};\end{cases}$$

此处，对应法则D表：当变量x在$(-\infty, +\infty)$内取到有理数时，y以数1相对应；当x取到无理数时，y以数0相对应。

注：在狄里赫列（*Dirichlet, P.G.L*, 1805—1859，德国人，34岁任教授，先后就任于柏林大学和哥廷根大学）所生活的时代，数学界一般人主张：两个变量，只有当其可用一个“数学公式”来表示其间的关系时，才能称此两变量具有函数关系（在此，**数学公式**指具有如下性质的

式子：对式中一个变量的取值及式中出现的常数，按照一定的次序施行某些运算，就可以得出另一变量的对应值）。而狄里赫列则主张：两个变量之间，只要有数值上的确定对应关系，不管其是否可用一个数学公式来表此对应关系，均应认作有函数关系。狄里赫列函数就是体现其此种思想，为了当时的论争而构想出来的。经过历史的选择，他的思想胜利了，定义1.1.1正反映了他的思想。

例3、在本教材和量子化学课中都要用到符号 $[x]$。它表**实数x的整数部分**，即不超过数x的最大整数。比如 $[2.5]=2$，$[0.2]=0$，$[-1]=-1$，$[-1.7]=-2$，$[-\pi]=-4$。

由于x任取一实数，$[x]$都有（唯一）确定的值与之对应，故$[x]$是x的函数。其对应法则可写成

$$[x]=n, \quad \forall x\in[n,n+1),\ n\in\mathbf{Z}.$$

一个函数实质上取决于自变量的取值范围与对应法则，而与自变量、应变量所取的符号无关。比如，$y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 是不同的函数，而 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $u=v^2$，$v\in(-\infty,+\infty)$ 实质上是同一个函数。

函数概念的定义由“设有…”、“若…”、“则…”三部分组成，它们分别是定义的**前提条件、直接条件与称谓**。这种形式的定义已不同于本原概念的“描述性定义”，而是一种很严格的数学定义。三个组成部分中，“直接条件”是关键，它把所定义概念的内涵本质准确、清楚地界定出来。因此，

称此种形式的定义为**概念的界定性定义**。今后遇到的基本上都是这种定义。对于每一重要概念的定义，同学们应尽力弄清其含义，并能准确地加以叙述。

三、函数的记号与符号

函数的完整记号

$$“y=f(x),\qquad x\in \mathbf{X}。”$$

标出了自变量x，应变量y，对应法则f，自变量的取值范围$\mathbf{X}$。对应法则f常称作**函数符号**。为了今后使用方便，现指出：

（一）、如果泛指一个对应法则，则可用f，g，h，F，H（拉丁字母），φ，ψ（希腊字母）等中的任一个来表示，甚至可用y来表示，而把函数记成$y=y(x)$，$x\in\mathbf{X}$。此时，字母y既表了应变量，又表了函数符号。

（二）、今后常说“设有函数$y=f(x)$，$x\in\mathbf{X}$”，此时f表一取定的对应法则。有时把y略去而说成“设有函数$f(x)$，$x\in\mathbf{X}$”。当$\mathbf{X}$是明显的，或虽不明显但不写出也无妨时，就简单地说“设有函数$f(x)$”。

（三）、若在同一问题中讨论到不同的函数，则当用不同的符号来区分之。比如，$f(x)=\sin x$，$g(x)=x^3$。

（四）、某些特定的函数有特定的符号与记号，比如$D(x)$，$[x]$，等。

四、函数的定义域

设有函数$y=f(x)$。若对于$x=x_0$，y有确定的对应值，

则称此对应值为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ **的函数值**，记成 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。并说 $f(x)$ 在 $x=x_0$ **有定义**。

使 $f(x)$ 有定义的所有 x 值所成的集合 $D_f=\{x|f(x)$ 有定义$\}$ 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**（*domain*）。不致混淆时，简记作 D。

当 x 取遍 D_f 时，所有对应函数值所成的集合 $R_f=\{f(x)|x\in D_f\}$ 称为函数 $f(x)$ 的**值域**（*range*）。

今后所遇的函数，大都只明确给出了对应法则，而未直接给出函数的定义域。此时，往往需求函数的定义域。

1、实际问题，按问题的实际意义来确定函数的定义域。比如自由落体问题，确定 $D=[0,T]$。

2、函数由纯数学公式给出时，使该公式有意义的一切自变量值所成的集合即为该函数的定义域。比如 $y=\frac{1}{2}ax^2$，它与 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 很相似，但若 a，x，y 并无实际意义，则其定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

求定义域常常实际上就是解不等式组。

例4、求 $y=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域。

解：由 $\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 2 \\ x<1. \end{cases}$ 故 $D=\varnothing$.

例5、求 $y=\frac{1}{\sqrt{\lg(x^2-1)}}$ 的定义域。

解：由 $x^2-1>1 \Longleftrightarrow |x|>\sqrt{2}$，故 $D=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$。

注：若用区间表D简单，就尽量用区间表示。

五、函数的表示法

（一）、分析表示法．用数学公式（又称“分析表达式）表示函数对应法则的方法，叫做函数的**分析表示法**或“公式表示法”．比如 $S=\frac{1}{2}gt^2$，

$$y=\frac{\sqrt[3]{4x+5}}{\sqrt{3x-2}},\quad u=A\sin(\omega t+\varphi),\ y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x,$$

$$y=\ln^3(x+1),\ y=|x-2|,\ y=\lim_{t\to x}\frac{1}{t-x}\ln\frac{t}{x}\ (x>0);$$

等．

这种表示法的优点是：它给出了对自变量及公式中的常量施行哪些运算及运算的先后次序．这里所说的“运算”既可以是“代数运算”（加，减，乘，除，乘方，开方），也可以是“超越运算”（取对数，取指数，取正弦或余弦，取反正弦等），还可以是“分析运算”（取极限，求导数，求积分）．这是最重要的一种表示法．

在化学课中有时需用几个公式才能表示一个完整的对应法则．

例6、一定质量的气体，在恒温下，其压强P与体积v间存在函数关系．当v不太小时，P、v遵从波义耳—马略特（*Boyle—Marriotte*）定律；当v相当小时，则遵从范德瓦尔（*Van der Waals*）定律．因此，函数关系为

$$P=\begin{cases}\dfrac{k}{v} & \text{当}v\geqslant v_0\text{时；}\\[2ex] \dfrac{\gamma}{v-\beta}-\dfrac{\alpha}{v^2} & \text{当}v<v_0\text{时。}\end{cases}$$

其中 k，α，β，γ为常量。

例7、设有一克－10℃的冰，假定其此时所含热量为0。经加热后冰变成了10℃的水。求在此过程中物质所吸收的热量Q与温度t的函数关系。

解：因为冰的热容量（使物体温升1℃所需的热量叫做该物体的热容量。单位质量的物体温升1℃所吸收的热量叫做该物质的比热。由于是1克冰，故题中热容量即比热）为0.5，则当$-10°\leqslant t<0°$时函数关系为$Q=0.5t+5$。由于水的热容量是1，溶解热为80，则当$0°<t\leqslant10°$时函数关系为$Q=t+85$。故所求函数关系为

$$Q=\begin{cases}0.5t+5, & -10\leqslant t\leqslant 0;\\ t+85, & 0<t\leqslant 10.\end{cases}$$

当自变量在不同区间变动时需用不同分析式表示的函数，称为**分段函数**（*Piecewise function*）。若在点x_0的左、右两侧，函数$f(x)$有不同的表达式，则称x_0为$f(x)$的**分段点**。比如$v=v_0$及$t=0$分别是$P(v)$及$Q(t)$的分段点。

（二）、图示法。借助平面笛卡尔直角坐标法，将x_0与$y_0=f(x_0)$分别看成平面上点(x_0, y_0)的横、纵坐标，从而可将函数$y=f(x)$看成x，y的不定方程，于是可用此方程的曲线来表示该函数。此种方法叫做"函数的几何表示法"，简称**图示法**。方程$y=f(x)$的曲线叫做函数$y=f(x)$的图