成人高等工科院校用书

高等数学

（第二册）

巫锡禾编

上海科学技术出版社

成人高等工科院校用书

高等数学

（第二册）

巫锡禾　编

上海科学技术出版社

成人高等工科院校用书

高 等 数 学

（第 二 册）

巫锡禾　编

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16　印张 25.25　字数 592,000

1988 年 5 月第 1 版　1988 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—12,200

ISBN 7-5323-0336-5/O.23

定价：6.10 元

目　　录

第八章　不 定 积 分

已知函数 $y=f(x)$，我们会求 $y'=f'(x)$ 及 $dy=f'(x)dx$，并且有求导数及微分的法则和方法。本章讨论它的逆运算，如果已知导函数 $y'=f'(x)$ 或微分 $dy=f'(x)dx$，如何求原来的函数 $y=f(x)$ 呢？这就是求不定积分问题。

求不定积分同求导数相比，灵活性大，因而难度也大。因此，要详细介绍求不定积分的各种法则和方法。

本章学习指导

本章主要是运算实践，重点是换元法和分部积分法。

(1) 记公式　按基本积分公式求不定积分，必须熟中求快。

(2) 凑微分　熟练凑微分，能提高求不定积分的熟练程度。

(3) 练方法　分部积分法，换元法是求不定积分常用而基本的方法。

(4) 抓函数　有理函数，三角有理函数，简单无理函数的不定积分如何求。

(5) 谈存在　初等函数的原函数必存在，但它的原函数未必能用初等函数来表示。

8.1　不定积分的概念

1. 原函数

已知位移函数为 $S(t)=t^2$，则在时刻 t 时的速度为

$$V(t)=\frac{ds}{dt}=2t.$$

其逆问题是：已知时刻 t 时的速度为 $V(t)=\frac{ds}{dt}=2t$. 求位移函数(原来的函数) $S(t)=?$

因为 $(t^2)'=2t$，或 $d(t^2)=2tdt$. 因此，t^2 是 $2t$ 的一个位移函数，即 $S(t)=t^2$.

定义　如果在某一区间上，有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数。

例 1　因为 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数。

例 2　因为 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，所以 $\arcsin x$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的一个原函数。

例 3　因为 $(\cos x)'=-\sin x$，所以 $\cos x$ 是 $-\sin x$ 的一个原函数.
又因为 $(\cos x+1)'=-\sin x$，所以 $\cos x+1$ 也是 $-\sin x$ 的一个原函数.
又因为 $\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)'=-\sin x$，$(\cos x+C)'=-\sin x$，所以 $\cos x+\frac{1}{2}$，$\cos x+C$ 也都是 $-\sin x$ 的原函数。其中 C 为任意常数。这样，一个函数的原函数有无穷多个。

如果 $F'(x)=f(x)$，必有 $[F(x)+C]'=f(x)$，因此，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$F(x)+C$ 也必为 $f(x)$ 的原函数，(C 为任意常数)。这里要问：$f(x)$ 的无穷多个原函数都在 $F(x)+C$ 中吗？

定理 如果在某区间上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 便是 $f(x)$ 的全部原函数，其中 C 为任意常数。

证 假设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数，即 $G'(x)=f(x)$。又 $F'(x)=f(x)$，因此

$$(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

故
$$G(x)-F(x)=C,\quad 或\quad G(x)=F(x)+C.$$

这表明 $f(x)$ 的全部原函数都包括在 $F(x)+C$ 中。这个定理也可以叙述为任何两个原函数之间最多相差一个常数。

例 4 求 $f(x)=2x$ 的全部原函数。

解 因 $(x^2)'=2x$，故 x^2 是 $2x$ 的一个原函数，从而 x^2+C 便是 $f(x)=2x$ 的全部原函数，C 为任意常数。

2. 不定积分

定义 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 的全部原函数 $F(x)+C$ (C 为任意常数)，称为 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 的不定积分．记作

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

其中拉长了的 S 符号 $\int$ 叫积分号，$f(x)$ 叫被积函数，$f(x)dx$ 叫被积表达式，x 叫积分变量，$\int f(x)dx$ 读作“积分、$f(x)$、dx”。

例 5 因 $(x^2)'=2x$，所以 $\int 2xdx=x^2+C$.

例 6 因 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\int \cos xdx=\sin x+C$.

例 7 因 $(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x$，所以 $\int \sec^2 xdx=\operatorname{tg} x+C$.

例 8 因 $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x$，所以 $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.

例 9 因 $\arcsin x$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的一个原函数，所以

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C.$$

3. 不定积分与导数(或微分)的关系

因为不定积分 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的全部(或全体)原函数．积分记号 $\int$ 是一种运算符号，表示求被积函数的全部原函数．因此，根据原函数定义知

$$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x),$$

或
$$d\int f(x)dx=\left[\int f(x)dx\right]'dx=f(x)dx.$$

因此得到

性质 1 $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ 或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$.

这里第一个式子表示，对 $f(x)$ 先积分，然后再求导数，结果还原为 $f(x)$。这表明了积分

与导数两种运算相抵消。

第二个式表示，对 $f(x)$ 先积分，然后再求微分，结果等于 $f(x)dx$。

例 10 $\left(\int \cos x dx\right)' = (\sin x + C)' = \cos x$。

例 11 $d\int \cos x dx = d(\sin x + C) = \cos x dx$。

性质 2 $\int F'(x)dx = F(x) + C$，或 $\int dF(x) = F(x) + C$。

证 $[F(x)+C]' = F'(x)$，或 $d[F(x)+C] = dF(x)$。表明 $F(x)+C$ 是 $F'(x)$ 的全体原函数。

这里第一个式子表示，对 $F(x)$ 先求导数，然后再积分，结果等于 $F(x)$ 多加一个任意常数。如果常数 C 不计，则正好导数运算与积分运算互相抵消。

第二个式子表示，对 $F(x)$ 先求微分，然后再积分，结果也等于 $F(x)$ 多加一个任意常数。如果常数 C 不计，则正好微分运算与积分运算互相也抵消。

例 12 $\int (\sin x)' dx = \int \cos x dx = \sin x + C$。

例 13 $\int d\sin x = \int \cos x dx = \sin x + C$。

4. 不定积分的几何意义

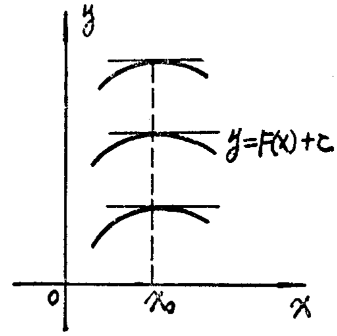

图 8.1

求不定积分 $\int f(x)dx$ 就是求 $f(x)$ 的全体原函数。为此，只要先求出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，则 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的全体原函数。

求 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，在几何上就是要找一条曲线 $y=F(x)$，使其曲线上任一点 $(x, F(x))$ 处的切线斜率恰好等于 $f(x)$。称 $y=F(x)$ 为 $f(x)$ 的一条积分曲线。而全体原函数 $y=F(x)+C$ 表示一族平行曲线，也叫一族积分曲线。在积分曲线族上横坐标相同的点 x_0 处，各条积分曲线的切线斜率都相等，其值等于 $f(x_0)$，即

$$[F(x)+C]'\big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

这就是不定积分的几何意义。

例 14 已知 $y=3x^2$ 的一条积分曲线通过点 $(1,1)$，求这积分曲线的方程。

解 设这积分曲线为 $y=F(x)$，那末 $F'(x)=3x^2$。于是

$$F(x) = \int F'(x)dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

因此 $y=F(x)=x^3+C$。因通过点 (1.1)，所以 $C=0$。所求积分曲线为 $y=F(x)=x^3$。

例 15 求通过点 $(\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$，而它的切线斜率等于 $5x^2$ 的曲线。

解 设曲线方程为 $y=F(x)$，则 $F'(x)=5x^2$，

从而
$$F(x) = \int F'(x)dx = \int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + C.$$

因为过点 $(\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$，所以

$$5\sqrt{3} = \frac{5}{3}(\sqrt{3})^3 + C, \quad C = 0.$$

因此，所求曲线为 $y=F(x)=\frac{5}{3}x^3$。

例 16 在平面上有一运动着的质点，如果它在 x 轴方向和 y 轴方向的速度分量分别为 $V_x=5\sin t$, $V_y=2\cos t$, 又 $x|_{t=0}=5$, $y|_{t=0}=0$, 求

(1) 时间为 t 时质点所在的位置。

(2) 运动的轨迹方程。

解(1) 设时间为 t 时的质点位置为 $(x(t), y(t))$。

由题意有
$$x'(t)=V_x=5\sin t,$$
故
$$x(t)=\int 5\sin t dt=-5\cos t+C.$$
又已知 $x|_{t=0}=5$ 代入得 $5=-5\cos 0+C$, 故 $C=10$。因此，时间为 t 时的质点位置的横坐标 $x(t)=-5\cos t+10$。

同样，由题意有
$$y'(t)=V_y=2\cos t,$$
故
$$y(t)=\int 2\cos t dt=2\sin t+C.$$
又已知 $y|_{t=0}=0$ 代入得 $0=2\sin 0+C$, 故 $C=0$, 因此，时间为 t 时的质点位置的纵坐标 $y(t)=2\sin t$。因此质点的位置为 $(-5\cos t+10,\ 2\sin t)$。

解(2) 因为质点位置是时间 t 的函数，因此质点运动的轨迹方程为
$$\begin{cases} x=-5\cos t+10, \\ y=2\sin t. \end{cases}$$
消去参数 t 得
$$\frac{(x-10)}{25}+\frac{y^2}{4}=1.$$

习　题 8.1

1. 求下列不定积分

(1) $\int 1dx$;　　(2) $\int x^2dx$;　　(3) $\int e^x dx$;　　(4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2. 下面结果是否正确，为什么？

(1) $\int \cos xdx=\sin x$,　　(2) $\int \cos xdx=\sin x+5$,　　(3) $\int \cos xdx=\sin x+C$,

(4) $\int \cos xdx=\sin x+C^3$,　　(5) $\int (\sin x)'dx=\sin x$,　　(6) $\left(\int \sin xdx\right)'=\sin x$.

3. 一曲线过(1,3)点，且在每一点的切线斜率都等于 $3x$, 求这曲线方程。

4. 一曲线过(0,1)点，且在任一点处切线的斜率都等于横坐标的两倍，求这曲线方程。

5. 验证函数 $y=\ln(ax)$, $y=\ln(bx)$, $y=\ln x$, $y=\ln x+5$ 都是哪一个函数的原函数。

习题答案

1. (1) $x+C$,　　(2) $\frac{1}{3}x^3+C$,　　(3) e^x+C,　　(4) $\arcsin x+C$.

2．(1) 不对，应为 $\sin x+C$，　(2) 不对，应为 $\sin x+C$，　(3) 对，

(4) 对，因 C^3 也是任意常数　(5) 不对，应为 $\sin x+C$，　(6) 对。

3．$y=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$。　4．$y=x^2+1$。　5．都是 $\frac{1}{x}$ 的原函数。

8.2　不定积分的基本公式

1．基本积分表

不定积分 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$。因此在 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 中有 $[F(x)+C]'=f(x)$。这样，由基本初等函数的导数公式，就立即可以得到常用的基本积分表：

基本初等函数导数公式	基本积分公式
1. $(c)'=0$	1. $\int 0dx=C$
2. $(x)'=1$	2. $\int 1dx=x+C$
3. $\left(\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}\right)'=x^\mu,(\mu\neq-1)$	3. $\int x^\mu dx=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C,\ (\mu\neq-1)$
4. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	4. $\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$
5. $(\sin x)'=\cos x$	5. $\int\cos xdx=\sin x+C$
6. $(\cos x)'=-\sin x$	6. $\int\sin xdx=-\cos x+C$
7. $(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	7. $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}\,x+C$
8. $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	8. $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\mathrm{ctg}\,x+C$
9. $(e^x)'=e^x$	9. $\int e^xdx=e^x+C$
10. $\left(\frac{1}{\ln a}a^x\right)'=a^x,(a>0$ 且 $a\neq1)$	10. $\int a^xdx=\frac{1}{\ln a}a^x+C\ (a>0$ 且 $a\neq1)$
11. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$
12. $(\mathrm{arc\,tg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$	12. $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\mathrm{arc\,tg}\,x+C$
13. $(\sec x)'=\sec x\,\mathrm{tg}\,x$	13. $\int\sec x\,\mathrm{tg}\,xdx=\sec x+C$
14. $(\csc x)'=-\csc x\,\mathrm{ctg}\,x$	14. $\int\csc x\,\mathrm{ctg}\,xdx=-\csc x+C$.
15. $(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$	15. $\int\mathrm{sh}\,xdx=\mathrm{ch}\,x+C$
16. $(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$	16. $\int\mathrm{ch}\,xdx=\mathrm{sh}\,x+C$

对于公式 4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ 作说明如下：

当 $x>0$ 时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$，故 $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$，

当 $x<0$ 时，$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$，故 $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$。因此，不论 $x>0$ 或 $x<0$，有公式

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C.$$

为了书写简便，把它写成

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

大家知道熟记导数公式对求导数运算作用极大。同样相应的不定积分公式也必须熟记。

2. 利用幂函数公式 $\int x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C$，$(\mu \neq -1)$ 计算积分

例 1 $\int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + C$.

例 2 $\int \frac{1}{x^6} dx = \int x^{-6} dx = -\frac{1}{5} x^{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$.

例 3 $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.

例 4 $\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$.

注意 (1) 求不定积分是找被积函数的全体原函数，因此必须加一个任意常数。

(2) 求出结果是否正确可以用导数或微分来验证。

例 5 $\int x^{100} dx = \frac{1}{101} x^{101}$。这样是不对的。因为没有加任意常数。正确写法是：

$$\int x^{100} dx = \frac{1}{101} x^{101} + C.$$

其结果的正确性可这样来验证。因 $\left(\frac{1}{101} x^{101} + C\right)' = x^{100}$，或 $d\left(\frac{1}{101} x^{101} + C\right) = x^{100} dx$，所以结果是正确的。

例 6 求证 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$.

证 $$d\left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^2 + x^2} dx,$$

或 $\left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{a^2 + x^2}$，故 $\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$ 为 $\frac{1}{a^2 + x^2}$ 的全部原函数，所以有

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

习　题 8.2

1．求下列不定积分

(1) $\int x^{99}dx$,　　(2) $\int x\sqrt[3]{x}\,dx$,　　(3) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$,

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$,　　(5) $\int \frac{1}{x^5}dx$,　　(6) $\int 2^x dx$,

(7) $\int 2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{2}}dx$,　　(8) $\int 3^x\cdot 2^x dx$.

2．验证下列不定积分公式成立

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$,　　(2) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C$,

(3) $\int \sec x dx=\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)+C$,　　(4) $\int \csc x dx=\ln(\csc x-\operatorname{ctg} x)+C$.

这四个公式连同例 6 中 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$ 都是常用公式。

习题答案

1．(1) $\frac{1}{100}x^{100}+C$　　(2) $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$　　(3) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

(4) $2\sqrt{x}+C$　　(5) $-\frac{1}{4x^4}+C$　　(6) $\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(7) $\frac{2^x}{\ln 2}+C$　　(8) $\frac{6^x}{\ln 6}+C$.

8.3　不定积分的运算法则

用定义求出函数的不定积分总是有局限性的。象求导数一样，必须讨论不定积分的运算法则。

法则 1　$\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$（$K\neq 0$ 的常数）。

这表示常数因子可以提到积分号外面。

证　因为$\left[K\int f(x)dx\right]'=K\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$。即 $K\int f(x)dx$ 是 $Kf(x)$ 的全体原函数。

法则 2　$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

证　$\left[\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right]'=\left[\int f(x)dx\right]'\pm\left[\int g(x)dx\right]'=f(x)\pm g(x)$，即

$$\int f(x)dx\pm\int g(x)dx \quad 是 \quad f(x)\pm g(x)$$

的全体原函数。