

成人高等工科院校用书

高等数学

(第二册)

巫锡禾编

上海科学技术出版社



成人高等工科院校用书

高等数学

(第二册)

巫锡禾 编

上海科学技术出版社

成人高等工科院校用书

高等数学

(第二册)

巫锡禾 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 25.25 字数 828,000

1983 年 5 月第 1 版 1983 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1—12,200

ISBN 7-5323-0336-5/0.23

定价: 6.10 元

目 录

第八章 不定积分	1
8.1 不定积分的概念	1
习题及其答案	4
8.2 不定积分的基本公式	5
习题及其答案	7
8.3 不定积分的运算法则	7
习题及其答案	10
8.4 第一类换元法	11
1. 利用公式 $\int u^\mu du = \frac{1}{\mu+1} u^{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$) 求积分举例	12
习题及其答案	12
2. 利用公式 $\int e^u du = e^u + C$ 求积分举例	14
3. 利用公式 $\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$ 求积分举例	14
习题及其答案	14
4. 利用公式 $\int \cos u du = \sin u + C$ 求积分举例	14
5. 利用公式 $\int \sin u du = -\cos u + C$ 求积分举例	15
6. 用适当公式求积分举例	15
习题及其答案	15
7. 利用公式 $\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C$ 求积分举例	16
8. 利用公式 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du = \arcsin \frac{u}{a} + C$ 求积分举例	16
9. 利用公式 $\int \frac{du}{u^2-a^2} du = \frac{1}{2a} \ln \frac{u-a}{u+a} + C$ 求积分举例	16
习题及其答案	16
10. 利用公式 $\int \sec u du = \ln(\sec u + \tg u) + C$ 及 $\int \csc u du = \ln(\csc u - \ctg u) + C$ 求积分举例	17
11. 利用三角公式求积分举例	17
习题及其答案	18
12. 杂例	19
13. 关于积分结果的多样性	20
习题及其答案	21
习题选解	21
8.5 第二类换元法	22

1. 作三角函数变换举例	24
习题及其答案	26
2. 作幂函数变换举例	26
3. 作倒置变换举例	27
习题及其答案	28
8.6 分部积分法	29
1. 分部积分法公式的推导	29
2. 分部积分法公式的解释	29
3. 选择 u 和 dv 的原则与例子	29
习题及其答案	30
4. 续例	30
习题及其答案	32
5. 续例	32
6. 用分部积分法推导递推公式举例	34
7. 同时使用换元法与分部积分法的例子	34
习题及其答案	35
习题选解	35
8.7 有理函数的积分	43
1. 两个基本类型的真分式的积分问题	43
习题及其答案	46
2. 真分式的积分化为两个基本类型的积分	47
习题及其答案	50
3. 总结	51
习题及其答案	51
8.8 三角函数有理式的积分	52
习题及其答案	56
8.9 简单无理函数的积分	56
习题(1)及其答案	58
习题(2)及其答案	62
第二次考试试题	63
习题选解	64
第二次考试试题解答	70
第九章 定积分	75
9.1 两个典型问题	75
9.2 定积分的概念	78
1. 定积分定义	78
2. 定积分定义的剖析	78
3. 定积分存在问题	79
4. 用定义求定积分举例	81

习题及其答案	85
5. 定积分的几何意义	85
6. 关于定积分的两个补充规定	86
习题及其答案	87
9.3 定积分的基本性质和定积分中值定理	87
习题及其答案	93
9.4 微积分基本定理	94
1. 变上限的定积分——积分上限函数	94
2. 积分上限函数的导数	94
3. 对变上限或变下限函数求导举例	96
习题及其答案	97
4. 微积分基本公式	98
5. 利用牛顿—莱布尼兹公式求定积分举例	99
6. 利用定积分求 n 项和的极限值	100
习题及其答案	102
习题选解	102
9.5 定积分的换元法	107
习题及其答案	115
9.6 定积分的分部积分法	116
习题及其答案	119
9.7 广义积分	119
习题及其答案	123
9.8 定积分的近似计算	124
习题及其答案	128
讨论题	128
自我检查题	129
习题选解	129
讨论题解答	144
自我检查题解答	145
第十章 定积分应用	147
10.1 在应用问题中定积分定义的简化	147
10.2 平面图形的面积	148
1. 曲线由直角坐标方程给出的情况	148
习题及其答案	154
2. 曲线由参数方程给出的情况	154
3. 曲线由极坐标方程给出的情况	155
4. 再谈元素法	161
习题及其答案	161
10.3 体积	162

1. 预备知识	161
2. 平行截面面积为已知的立体的体积	162
习题及其答案	166
3. 旋转体的体积	167
A. 绕 x 轴旋转的旋转体的体积	167
习题及其答案	169
B. 绕 y 轴旋转的旋转体的体积	169
C. 绕其它轴旋转的旋转体的体积	171
习题及其答案	174
10.4 平面曲线的弧长	174
习题及其答案	178
*10.5 旋转体的侧面积	179
习题及其答案	181
10.6 变力所作的功	181
习题及其答案	183
10.7 水压力	184
习题及其答案	185
10.8 函数的平均值	185
习题及其答案	188
自我检查题	188
习题选解	188
自我检查题解答	203
第十一章 向量代数	206
11.1 空间直角坐标系	206
习题及其答案	210
11.2 向量概念 向量的加、减法 向量与数量的乘法	210
习题及其答案	217
11.3 向量坐标	217
习题及其答案	222
11.4 两向量的数量积	223
习题及其答案	227
11.5 两向量的向量积	228
习题及其答案	232
11.6 向量的混合积	233
习题及其答案	235
自我检查题	235
习题选解	235
自我检查题解答	238
第十二章 空间解析几何	241

12.1 平面及其方程	241
1. 平面方程的各种形式	241
习题及其答案	246
2. 两平面间的关系	246
习题及其答案	250
12.2 空间的直线及其方程	250
1. 直线方程的各种形式	250
习题及其答案	252
2. 两直线间的关系	253
习题及其答案	255
12.3 曲面及其方程	256
1. 什么叫曲面方程	256
2. 球面方程	256
3. 旋转曲面方程	257
习题及其答案	258
4. 柱面方程	259
习题及其答案	261
12.4 空间曲线及其方程	261
1. 空间曲线的一般方程	261
2. 空间曲线的参数方程	262
习题及其答案	263
3. 空间曲线在坐标面上的投影柱面方程和投影曲线方程	264
习题及其答案	266
12.5 二次曲面及其方程	266
习题及其答案	268
12.6 空间区域简图	269
习题及其答案	270
讨论题	271
自我检查题	271
习题选解	272
第三次考试试题	278
讨论题解答	279
自我检查题解答	281
第三次考试试题解答	284
第十三章 多元函数微分学及其应用	288
13.1 多元函数的基本概念	288
1. 二元函数的概念	288
2. 二元函数的几何意义	291
3. 多值函数与单值函数	291

4. 一元函数是二元函数的特殊情况	291
5. 关于 n 元函数与点函数概念	292
习题及其答案	293
13.2 二元函数的极限	293
1. 二元函数的极限概念	293
2. 二元函数极限的几何解释	295
3. 二元函数极限的四则运算	297
习题及其答案	298
13.3 二元函数的连续性	298
1. 连续与间断的概念	298
2. 初等函数的连续性	300
3. 闭区域上连续函数的性质	301
习题及其答案	301
13.4 偏导数	302
1. 偏导数的概念	302
2. 偏导数的求法	304
习题及其答案	307
3. 偏导数的几何意义	307
4. 可偏导与连续的关系	308
5. 高阶偏导数	309
习题及其答案	311
13.5 全微分	312
1. 全增量的概念	313
2. 全微分概念	313
习题及其答案	315
3. 可偏导与可微的关系	316
*4. 全微分在近似计算中的应用	318
习题及其答案	320
习题选解	320
13.6 多元复合函数的求导法则	324
1. 五种基本情况的求导法则	324
习题及其答案	329
习题选解	330
2. 全微分形式的不变性	331
*3. 多元复合函数的高阶偏导数	333
习题及其答案	334
13.7 隐函数及其求导法则	335
1. 一元隐函数及其求导法则	335
2. 二元隐函数求导法则	338

习题及其答案	341
3. 一元隐函数组求导法则	342
4. 二元隐函数组求导法则	344
5. 杂例	345
习题及其答案	347
习题选解	347
13.8 偏导数在几何上的应用	352
1. 空间曲线的切线与法平面及其方程	352
习题及其答案	356
2. 曲面的切平面与法线及其方程	356
3. 全微分的几何意义	358
习题及其答案	360
13.9 多元函数的极值及其求法	361
1. 二元函数极值的概念	361
2. 多元函数取极值的必要条件	361
3. 二元函数取极值的充分条件	362
4. 求二元函数极值的方法	363
5. 二元函数的最大值, 最小值的求法	364
习题及其答案	366
13.10 条件极值 拉格朗日乘数法	367
1. 取条件极值的必要条件	368
2. 拉格朗日乘数法	369
习题及其答案	372
习题选解	373
讨论题	381
自我检查题	382
讨论题解答	382
自我检查题解答	385
附录: 积分表	388

第八章 不定积分

已知函数 $y=f(x)$, 我们会求 $y'=f'(x)$ 及 $dy=f'(x)dx$, 并且有求导数及微分的法则和方法. 本章讨论它的逆运算, 如果已知导函数 $y'=f'(x)$ 或微分 $dy=f'(x)dx$, 如何求原来的函数 $y=f(x)$ 呢? 这就是求不定积分问题.

求不定积分同求导数相比, 灵活性大, 因而难度也大. 因此, 要详细介绍求不定积分的各种法则和方法.

本章学习指导

本章主要是运算实践, 重点是换元法和分部积分法.

- (1) 记公式 按基本积分公式求不定积分, 必须熟中求快.
- (2) 凑微分 熟练凑微分, 能提高求不定积分的熟练程度.
- (3) 练方法 分部积分法, 换元法是求不定积分常用而基本的方法.
- (4) 抓函数 有理函数, 三角有理函数, 简单无理函数的不定积分如何求.
- (5) 谈存在 初等函数的原函数必存在, 但它的原函数未必能用初等函数来表示.

8.1 不定积分的概念

1. 原函数

已知位移函数为 $S(t)=t^2$, 则在时刻 t 时的速度为

$$V(t)=\frac{ds}{dt}=2t.$$

其逆问题是: 已知时刻 t 时的速度为 $V(t)=\frac{ds}{dt}=2t$. 求位移函数(原来的函数) $S(t)=?$

因为 $(t^2)'=2t$, 或 $d(t^2)=2tdt$. 因此, t^2 是 $2t$ 的一个位移函数, 即 $S(t)=t^2$.

定义 如果在某一区间上, 有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$, 称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数.

例1 因为 $(\sin x)'=\cos x$, 所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

例2 因为 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 所以 $\arcsin x$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的一个原函数.

例3 因为 $(\cos x)'=-\sin x$, 所以 $\cos x$ 是 $-\sin x$ 的一个原函数.

又因为 $(\cos x+1)'=-\sin x$, 所以 $\cos x+1$ 也是 $-\sin x$ 的一个原函数.

又因为 $(\cos x+\frac{1}{2})'=-\sin x$, $(\cos x+C)'=-\sin x$, 所以 $\cos x+\frac{1}{2}$, $\cos x+C$ 也都是 $-\sin x$ 的原函数. 其中 C 为任意常数. 这样, 一个函数的原函数有无穷多个.

如果 $F'(x)=f(x)$, 必有 $[F(x)+C]'=f(x)$, 因此, 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则

• | •

$F(x) + C$ 也必为 $f(x)$ 的原函数, (C 为任意常数)。这里要问: $f(x)$ 的无穷多个原函数都在 $F(x) + C$ 中吗?

定理 如果在某区间上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ 便是 $f(x)$ 的全部原函数, 其中 C 为任意常数。

证 假设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数, 即 $G'(x) = f(x)$ 。又 $F'(x) = f(x)$, 因此

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

故

$$G(x) - F(x) = C, \quad \text{或} \quad G(x) = F(x) + C.$$

这表明 $f(x)$ 的全部原函数都包括在 $F(x) + C$ 中。这个定理也可以叙述为任何两个原函数之间最多相差一个常数。

例 4 求 $f(x) = 2x$ 的全部原函数。

解 因 $(x^2)' = 2x$, 故 x^2 是 $2x$ 的一个原函数, 从而 $x^2 + C$ 便是 $f(x) = 2x$ 的全部原函数, C 为任意常数。

2. 不定积分

定义 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 的全部原函数 $F(x) + C$ (C 为任意常数), 称为 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 的不定积分。记作

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

其中拉长了的 S 符号 $\int$ 叫积分号, $f(x)$ 叫被积函数, $f(x)dx$ 叫被积表达式, x 叫积分变量, $\int f(x)dx$ 读作“积分、 $f(x)$ 、 dx ”。

例 5 因 $(x^2)' = 2x$, 所以 $\int 2x dx = x^2 + C$ 。

例 6 因 $(\sin x)' = \cos x$, 所以 $\int \cos x dx = \sin x + C$ 。

例 7 因 $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$, 所以 $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$ 。

例 8 因 $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$, 所以 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 。

例 9 因 $\arcsin x$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的一个原函数, 所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

3. 不定积分与导数(或微分)的关系

因为不定积分 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的全部(或全体)原函数。积分记号 $\int$ 是一种运算符号, 表示求被积函数的全部原函数。因此, 根据原函数定义知

$$\left[\int f(x)dx \right]' = f(x),$$

或

$$d \int f(x)dx = \left[\int f(x)dx \right]' dx = f(x)dx.$$

因此得到

$$\text{性质 1} \quad \left[\int f(x)dx \right]' = f(x) \quad \text{或} \quad d \int f(x)dx = f(x)dx.$$

这里第一个式子表示, 对 $f(x)$ 先积分, 然后再求导数, 结果还原为 $f(x)$ 。这表明了积分

与导数两种运算相抵消。

第二个式表示,对 $f(x)$ 先积分,然后再求微分,结果等于 $f(x)dx$ 。

$$\text{例 10} \quad \left(\int \cos x dx\right)' = (\sin x + C)' = \cos x.$$

$$\text{例 11} \quad d\int \cos x dx = d(\sin x + C) = \cos x dx.$$

$$\text{性质 2} \quad \int F'(x) dx = F(x) + C, \quad \text{或} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

证 $[F(x) + C]' = F'(x)$, 或 $d[F(x) + C] = dF(x)$ 。表明 $F(x) + C$ 是 $F'(x)$ 的全体原函数。

这里第一个式子表示,对 $F(x)$ 先求导数,然后再积分,结果等于 $F(x)$ 多加一个任意常数。如果常数 C 不计,则正好导数运算与积分运算互相抵消。

第二个式子表示,对 $F(x)$ 先求微分,然后再积分,结果也等于 $F(x)$ 多加一个任意常数。如果常数 C 不计,则正好微分运算与积分运算互相也抵消。

$$\text{例 12} \quad \int (\sin x)' dx = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\text{例 13} \quad \int d \sin x = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

4. 不定积分的几何意义

求不定积分 $\int f(x) dx$ 就是求 $f(x)$ 的全体原函数。为此,只要先求出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$, 则 $F(x) + C$ 就是 $f(x)$ 的全体原函数。

求 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$, 在几何上就是要找一条曲线 $y = F(x)$, 使其曲线上任一点 $(x, F(x))$ 处的切线斜率恰好等于 $f(x)$ 。称 $y = F(x)$ 为 $f(x)$ 的一条积分曲线。而全体原函数 $y = F(x) + C$ 表示一族平行曲线, 也叫一族积分曲线。在积分曲线族上横坐标相同的点 x_0 处, 各条积分曲线的切线斜率都相等, 其值等于 $f(x_0)$, 即

$$[F(x) + C]'|_{x=x_0} = f(x_0).$$

这就是不定积分的几何意义。

例 14 已知 $y = 3x^2$ 的一条积分曲线通过点 $(1, 1)$, 求这积分曲线的方程。

解 设这积分曲线为 $y = F(x)$, 那末 $F'(x) = 3x^2$ 。于是

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

因此 $y = F(x) = x^3 + C$ 。因通过点 $(1, 1)$, 所以 $C = 0$ 。所求积分曲线为 $y = F(x) = x^3$ 。

例 15 求通过点 $(\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$, 而它的切线斜率等于 $5x^2$ 的曲线。

解 设曲线方程为 $y = F(x)$, 则 $F'(x) = 5x^2$,

$$\text{从而} \quad F(x) = \int F'(x) dx = \int 5x^2 dx = \frac{5}{3} x^3 + C.$$

因为过点 $(\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$, 所以

$$5\sqrt{3} = \frac{5}{3} (\sqrt{3})^3 + C, \quad C = 0.$$

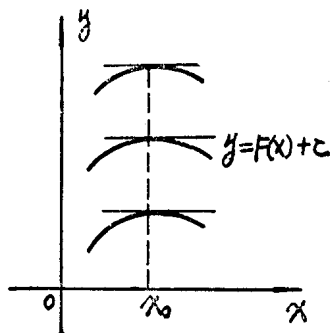


图 8.1

因此, 所求曲线为 $y = F(x) = \frac{5}{3}x^3$.

例 16 在平面上有一运动着的质点, 如果它在 x 轴方向和 y 轴方向的速度分量分别为 $V_x = 5 \sin t$, $V_y = 2 \cos t$, 又 $x|_{t=0} = 5$, $y|_{t=0} = 0$, 求

(1) 时间为 t 时质点所在的位置.

(2) 运动的轨迹方程.

解(1) 设时间为 t 时的质点位置为 $(x(t), y(t))$.

由题意有 $x'(t) = V_x = 5 \sin t$,

故 $x(t) = \int 5 \sin t dt = -5 \cos t + C$.

又已知 $x|_{t=0} = 5$ 代入得 $5 = -5 \cos 0 + C$, 故 $C = 10$. 因此, 时间为 t 时的质点位置的横坐标 $x(t) = -5 \cos t + 10$.

同样, 由题意有 $y'(t) = V_y = 2 \cos t$,

故 $y(t) = \int 2 \cos t dt = 2 \sin t + C$.

又已知 $y|_{t=0} = 0$ 代入得 $0 = 2 \sin 0 + C$, 故 $C = 0$, 因此, 时间为 t 时的质点位置的纵坐标 $y(t) = 2 \sin t$. 因此质点的位置为 $(-5 \cos t + 10, 2 \sin t)$.

解(2) 因为质点位置是时间 t 的函数, 因此质点运动的轨迹方程为

$$\begin{cases} x = -5 \cos t + 10, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

消去参数 t 得

$$\frac{(x-10)^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

习 题 8.1

1. 求下列不定积分

$$(1) \int 1 dx; \quad (2) \int x^2 dx; \quad (3) \int e^x dx; \quad (4) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

2. 下面结果是否正确, 为什么?

$$(1) \int \cos x dx = \sin x, \quad (2) \int \cos x dx = \sin x + 5, \quad (3) \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$(4) \int \cos x dx = \sin x + C^3, \quad (5) \int (\sin x)' dx = \sin x, \quad (6) \left(\int \sin x dx \right)' = \sin x.$$

3. 一曲线过 $(1, 3)$ 点, 且在每一点的切线斜率都等于 $3x$, 求这曲线方程.

4. 一曲线过 $(0, 1)$ 点, 且在任一点处切线的斜率都等于横坐标的两倍, 求这曲线方程.

5. 验证函数 $y = \ln(ax)$, $y = \ln(bx)$, $y = \ln x$, $y = \ln x + 5$ 都是哪一个函数的原函数.

习题答案

$$1. (1) x + C, \quad (2) \frac{1}{3} x^3 + C, \quad (3) e^x + C, \quad (4) \arcsin x + C.$$

2. (1) 不对, 应为 $\sin x + C$, (2) 不对, 应为 $\sin x + C$, (3) 对,
 (4) 对, 因 C^3 也是任意常数 (5) 不对, 应为 $\sin x + C$, (6) 对.
 3. $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$. 4. $y = x^2 + 1$. 5. 都是 $\frac{1}{x}$ 的原函数.

8.2 不定积分的基本公式

1. 基本积分表

不定积分 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x) + C$. 因此在 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 中有 $[F(x) + C]' = f(x)$. 这样, 由基本初等函数的导数公式, 就立即可以得到常用的基本积分表:

基本初等函数导数公式	基本积分公式
1. $(c)' = 0$	1. $\int 0 dx = C$
2. $(x)' = 1$	2. $\int 1 dx = x + C$
3. $\left(\frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1}\right)' = x^{\mu}, (\mu \neq -1)$	3. $\int x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C, (\mu \neq -1)$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
5. $(\sin x)' = \cos x$	5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $(\cos x)' = -\sin x$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $(e^x)' = e^x$	9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\left(\frac{1}{\ln a} a^x\right)' = a^x, (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$	10. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
13. $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$	13. $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C$
14. $(\csc x)' = -\csc x \operatorname{ctg} x$	14. $\int \csc x \operatorname{ctg} x dx = -\csc x + C$
15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
16. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

对于公式 4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ 作说明如下:

当 $x > 0$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 故 $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$,

当 $x < 0$ 时, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$, 故 $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$. 因此, 不论 $x > 0$ 或 $x < 0$, 有公式

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

为了书写简便, 把它写成

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

大家知道熟记导数公式对求导数运算作用极大. 同样相应的不定积分公式也必须熟记.

2. 利用幂函数公式 $\int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C$, ($\mu \neq -1$) 计算积分

例 1 $\int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + C.$

例 2 $\int \frac{1}{x^6} dx = \int x^{-6} dx = -\frac{1}{5} x^{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C.$

例 3 $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$

例 4 $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$

注意 (1) 求不定积分是找被积函数的全体原函数, 因此必须加一个任意常数.

(2) 求出结果是否正确可以用导数或微分来验证.

例 5 $\int x^{100} dx = \frac{1}{101} x^{101}$. 这样是不对的. 因为没有加任意常数. 正确写法是:

$$\int x^{100} dx = \frac{1}{101} x^{101} + C.$$

其结果的正确性可这样来验证. 因 $\left(\frac{1}{101} x^{101} + C\right)' = x^{100}$, 或 $d\left(\frac{1}{101} x^{101} + C\right) = x^{100} dx$, 所以结果是正确的.

例 6 求证 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$

证 $d\left(\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^2 + x^2} dx,$

或 $\left(\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{a^2 + x^2}$, 故 $\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$ 为 $\frac{1}{a^2 + x^2}$ 的全部原函数, 所以有

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctg x + C.$$

习 题 8.2

1. 求下列不定积分

$$\begin{array}{lll} (1) \int x^{99} dx, & (2) \int x^3 \sqrt{x} dx, & (3) \int \sqrt[3]{x} dx, \\ (4) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx, & (5) \int \frac{1}{x^5} dx, & (6) \int 2^x dx, \\ (7) \int 2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{3}} dx, & (8) \int 3^x \cdot 2^x dx. \end{array}$$

2. 验证下列不定积分公式成立

$$\begin{array}{ll} (1) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, & (2) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \\ (3) \int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) + C, & (4) \int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + C. \end{array}$$

这四个公式连同例 6 中 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ 都是常用公式。

习 题 答 案

$$\begin{array}{lll} 1. (1) \frac{1}{100} x^{100} + C & (2) \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C & (3) \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C \\ (4) 2\sqrt{x} + C & (5) -\frac{1}{4x^4} + C & (6) \frac{2^x}{\ln 2} + C \\ (7) \frac{2^x}{\ln 2} + C & (8) \frac{6^x}{\ln 6} + C. \end{array}$$

8.3 不定积分的运算法则

用定义求出函数的不定积分总是有局限性的。象求导数一样，必须讨论不定积分的运算法则。

法则 1 $\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$ ($K \neq 0$ 的常数)。

这表示常数因子可以提到积分号外面。

证 因为 $[K \int f(x)dx]' = K [\int f(x)dx]' = f(x)$ 。即 $K \int f(x)dx$ 是 $Kf(x)$ 的全体原函数。

法则 2 $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ 。

证 $[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx]' = [\int f(x)dx]' \pm [\int g(x)dx]' = f(x) \pm g(x)$ ，即

$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ 是 $f(x) \pm g(x)$

的全体原函数。