近代最小二乘法

（译文集）

国家测绘总局测绘研究所 译

测绘出版社

译者的话

最小二乘法是处理和分析观测数据的一种经典方法。近年来，数理统计、矩阵代数和电子计算技术获得了迅速的发展，大大地丰富了最小二乘法的理论和应用。六十年代初，最小二乘法用于物理大地测量学的重力异常内插，从而提出了最小二乘推估法（Least Squares Prediction）。此后，许多学者对最小二乘平差法和最小二乘推估法之间的关系作了深入的研究。在此基础上，于七十年代初提出了最小二乘拟合推估法（Least Squares Collocation），这是一种广义的估计方法，它把基于最小二乘原理的平差、滤波和推估综合起来了。

为了介绍最小二乘法近年来的上述发展，特将D.E.韦尔斯著的"矩阵"、D.E.韦尔斯与E.J.克拉基夫斯基合著的"最小二乘法"和H.莫里兹著的"最小二乘拟合推估法"翻译出版。因为这三部著作反映了国外在最小二乘法方面的最新成就，所以合并起来称为"近代最小二乘法"。

本书第二部分"最小二乘法"把用于测量的最小二乘法与数理统计概念、矩阵代数、电子计算技术这三方面结合成了一个整体，使得最小二乘法的内容为之一新。由于其中的推导以矩阵代数为基础，所以也把韦尔斯著的"矩阵"译出，作为本书的第一部分。

"最小二乘拟合推估法"（第三部分）是从最小二乘原理出发，以测量工作者易于接受的方式叙述了最小二乘拟合推估的基本概念，详细地推导了有关公式，介绍了该法在大地测量和摄影测量方面的应用。因此，这一部分可以说是最小二乘拟合推估法的基本文献，具有较大的参考价值。

"最小二乘法"是以美国俄亥俄州立大学大地测量科学部Urho Uotila教授著的"平差计算引论"（An Introduction to Adjustment Computation, 1967)为基础来写作的。"最小二乘拟合推估法"的前十节在1972年曾作为该校大地测量科学部第175号报告出版。因此，本书反映了美国俄亥俄州立大学最小二乘法课程的基本内容。

本书第一部分和第二部分由曾启雄同志翻译，第三部分由丘其宪、宋肇疆（黑龙江省测绘局）同志翻译。全书由胡明城同志审校。

由于译校者水平有限，译文中如有不当之处，请读者批评指正。

一九七八年十二月

目　　录

第一部分　矩　　阵

第二部分　最 小 二 乘 法

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第三部分 最小二乘拟合推估法

第 一 部 分

矩　　阵

D.E.韦尔斯　著
曾　启　雄　译
胡　明　城　校

Department of Surveying Engineering
University of New Brunswick
Fredericton, N.B. Canada

Lecture Notes No. 15

D.E. Wells

Matrices

August 1973

第一节 引　论

矩阵表示法是一种高效的数学速记法。采用矩阵符号来表达数学上的一些概念和关系，可收到简捷而明晰之效，导致人们力求更深入的理解，而较少致力于表示法的细节；否则，这些概念和关系往往会被大量的符号和方程所掩盖。

在以下的四节里，将扼要地论述矩阵表示法和定义；矩阵加法、乘法和转置；行列式、逆矩阵和正交矩阵；分块矩阵。（关于矩阵较全面的探讨，可参考任一教科书。我们推荐 Thompson的著作[2]，因为这本书实用，面向入门。也推荐 Ayres 的著作[1]。

第六、七两节较长，论述了矩阵在两方面的重要运用：解线性方程和线性变换。

最后一节论述了矩阵的微分和以矩阵形式表示的泰勒级数。

本书的每一个论点都列举了一个利用矩阵的算例来说明，为了简单起见，通常采用 2×2阶矩阵。

第二节 矩阵符号表示法和定义

矩阵是遵循某些代数法则的一些数的长方阵列，这些法则将在这一节和后面的三节中论述。组成一个矩阵的各数称为该矩阵的元素。本书仅讨论以实数为元素的矩阵。矩阵的例子是：

$$\underset{2\,3}{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 9\end{pmatrix},\qquad \underset{3\,1}{B}=\begin{pmatrix}2\\ 6\\ 5\end{pmatrix},$$

$$\underset{2\,2}{C}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

本书将用大写字母（例如 A）表示矩阵。行数和列数将用双下标表示（例如 $\underset{2\,3}{A}$，A_{23} 或 $A_{2,3}$ 均表示 A 是具有 2 行 3 列的矩阵，在这种情况下，A 被称为 2×3 阶矩阵）。当不致于产生混乱时，两个下标可以省略。

矩阵的每一个元素用带有两个下标的小写字母来表示，这两下标指示该元素所在的行和列的相交处。例如

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

中的 a_{13} 位于 1 行和 3 列的相交处。

行数和列数相同的矩阵称为方阵（例如，上述的第三个例子 C 是一个方阵）。仅有一行的矩阵称为行矩阵或行向量。仅有一列的矩阵称为列矩阵或列向量（例如，上述的第二个例子 B 是一个列矩阵）。

除了从左上角到右下角的对角线元素之外，所有其它元素全为零的方阵，称为对角线矩阵。所有元素都相同的对角线矩阵，称为纯量矩阵。所有元素都等于1的纯量矩阵，称为单位矩阵，用I或E表示。$n\times n$阶单位矩阵常常用I_n来表示。下列三个矩阵分别是对角线矩阵、纯量矩阵和单位矩阵的例子：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

如果一个矩阵的所有元素都为零，则这个矩阵称为零矩阵，且写成：

$$A=0.$$

第三节 矩阵加法、乘法和转置

具有相同行数和列数的两个矩阵才能相加，这样的两个矩阵称为是可相加的（和可相减的）。阶数不同的两个矩阵不能相加。例如，下列两矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

是不可相加的，因为第一个矩阵是2×3阶，而第二个矩阵是3×1阶。

两个可相加的矩阵A和B之和，是一个矩阵$C=A+B$，其中的每一个元素等于矩阵A和B的对应元素之和。用元素表示为：

$$\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.} \tag{1}$$

例如：
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2 & 1+6 \\ 1+5 & 5+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

矩阵加法有下述性质：

$$\boxed{A+B=B+A \quad \text{（可交换性）}} \tag{2}$$

$$\boxed{A+(B+C)=(A+B)+C \quad \text{（可结合性）}} \tag{3}$$

如果B是等于n个A矩阵之和，则

$$B=nA.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

用元素来表示有 $b_{ij}=na_{ij}$，即 B 的每一个元素是 A 的相应元素的 n 倍。一般来说，n 不正好是一个正整数，可以是一个任意数。这样，上式定义了纯量乘法。

在 $n=-1$ 的特殊情况下，

$$B=-A,$$

即 B 称为 A 的负矩阵。为了实现矩阵减法，可以加上所要减去的矩阵的负矩阵。

仅当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时，A 和 B 的乘积 AB 才是可定义的，并称 A 和 B 是可按顺序 AB 相乘的，但按 BA 的顺序不一定是可相乘的。例如矩阵

$$\underset{23}{A}\ \underset{31}{B}=\begin{pmatrix}3&1&4\\1&5&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}$$

按上列顺序是可相乘的，但按下列相反的顺序是不可相乘的：

$$\underset{31}{B}\ \underset{23}{A}=\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&4\\1&5&9\end{pmatrix}.$$

注意：在第一种情况中（可相乘的情况），里面的两个下标是相等的，而在第二种情况中（不可相乘的情况），里面的两个下标是不相等的。

两个可相乘的矩阵 A 和 B 的积，等于一个矩阵 C＝AB，它的第 i 行、j 列的元素等于 A 的第 i 行各元素和 B 的第 j 列各元素中每取对应两元素的乘积之和。用元素表示为：

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{K=1}^{m}a_{iK}b_{Kj},} \tag{4}$$

其中 m 是 A 的列数，也是 B 的行数。例如：

$$C=AB=\begin{pmatrix}3&1&4\\1&5&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2+1\times6+4\times5\\1\times2+5\times6+9\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\77\end{pmatrix}.$$

矩阵乘法有下列性质：

$$A(B+C)=AB+AC\ \text{（可分配性）} \tag{5}$$

$$(A+B)C=AC+BC\ \text{（可分配性）} \tag{6}$$

$$A(BC)=(AB)C\ \text{（可结合性）} \tag{7}$$

但在一般情况下：

$$\boxed{\begin{array}{ll} AB \neq BA \text{（不可交换性）} & (8)\\ AB = AC \quad \text{并不意味着}\ B = C & (9)\\ AB = 0 \quad \text{并不意味着}\ A = 0\ \text{或}\ B = 0 & (10)\end{array}}$$

如果 A 和 B 均为方阵，以致有$AB = BA$，则 A 和 B 称为是可交换矩阵。任何一个方阵与它自身是可交换的，与同阶的单位矩阵也是可以交换的。可交换矩阵的另一个例子是：

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 24 & -2 \end{pmatrix}.$$

把矩阵 A 的行和列互换所构成的矩阵，称为 A 的转置矩阵，用 A^T 或 A' 来表示。例如，如果

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

则 $B = A^T$ 和 $A = B^T$。用元素来表示，就 $i = 1,2,3$ 和 $j = 1,2$ 有：

$$\boxed{b_{ij} = a_{ji}} \tag{11}$$

转置矩阵有下列性质：

$$\boxed{\begin{array}{ll} (A^T)^T = A & (12)\\ (A+B)^T = A^T + B^T & (13)\\ (nA)^T = nA^T & (14)\\ (AB)^T = B^TA^T \text{（注意顺序颠倒）} & (15)\end{array}}$$

当方阵 A 等于它的转置矩阵 A^T 时，称 A 为对称矩阵。例如：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

是对称矩阵（$A^T = A$）。用元素表示有：

$$\boxed{a_{ij} = a_{ji}} \tag{16}$$

对于任一个方阵 A，矩阵（$A + A^T$）和（AA^T）将是对称矩阵。

第四节　行列式、逆矩阵和正交矩阵

每一个方阵 A 都与一个数相联系，这个数称为 A 的行列式，用 $\det A$ 或 $|A|$ 来表

示。如果 A 是 $n\times n$ 阶方阵，则它的行列式被定义为：

$$\boxed{|A| = \sum(\pm a_{1i}a_{2j}\cdots\cdots a_{nk})} \tag{17}$$

其中总和 Σ 是就 i，j，……，k 的所有 n! 个排列来取的，而 i，j，……，k，是从 1 到 n 的整数。关于(17)式中各项的符号，如果排列经过偶次对调还原到自然顺序 1，2，……n 时（当一个较大的整数在一个较小的整数之前时，就发生一次对调），则该项取正号，如果对调次数为奇数则取负号。

(17)式可以用另一种形式来表示。若去掉矩阵 A 的第 i 行和第 j 列的元素 a_{ij}，则剩余的 $(n-1)\times(n-1)$ 阶矩阵的行列式称为元素 a_{ij} 的子式，用 $|M_{ij}|$ 表示。带符号的 a_{ij} 的子式叫做 a_{ij} 的余因子，用下式表示：

$$\boxed{\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|} \tag{18}$$

矩阵 A 的行列式值，可以用 A 的某一行或某一列中每一个元素乘它的余因子，取这些乘积之和来表示，即

$$\boxed{\left.\begin{aligned} |A| &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ \alpha_{ik}(\text{沿着第 i 行展开}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ \alpha_{kj}(\text{沿着第 j 列展开}) \end{aligned}\right\}} \tag{19}$$

例如，对于一个 2×2 阶矩阵，根据(17)式得：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21},$$

而对于一个 3×3 阶矩阵，根据(19)式沿着第 1 行展开，则得：

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\ \alpha_{11} + a_{12}\ \alpha_{12} + a_{13}\ \alpha_{13} = \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}\ a_{33} - a_{23}\ a_{32}) - a_{12}(a_{21}\ a_{33} - a_{23}\ a_{31}) + \\ &\quad + a_{13}(a_{21}\ a_{32} - a_{22}\ a_{31}). \end{aligned}$$

行列式有下列性质：

$$|A^T| = |A| \tag{20}$$

$$|AB| = |A|\ |B|. \tag{21}$$

如果一个矩阵的行列式等于零，则该矩阵称为退化矩阵（$|A|=0$）。如果一个矩阵的行列式不等于零，则该矩阵称为非退化矩阵（$|A|\neq 0$）。

若方阵 A 和 B 能使下式成立：

$$\boxed{AB=BA=I}, \tag{22}$$

则 B 叫做 A 的逆方阵，用 $B=A^{-1}$ 表示（或称 A 为 B 的逆方阵，用 $A=B^{-1}$表示）。只有非退化方阵才存在逆阵，退化矩阵不存在逆阵。

已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix},$$

行列式的值为 $|A|=1$ 和 $|B|=0$，因此，A 是非退化矩阵，存在逆阵，而 B 是退化矩阵，不存在逆阵。

关于矩阵求逆的系统方法，是矩阵数学的一个重要部分。Ayers 的著作〔1〕中论述了几种不同方法的细节（尤其是第七章）。这里仅叙述一种方法，在附录二中将叙述另一种方法。

若 A 是一个 $n\times n$ 阶矩阵，则 A 的每一个元素 a_{ij} 用 a_{ji}（注意下标次序要倒换）的余因子 α_{ji} 来代替所得到的矩阵，叫做 A 的伴随矩阵，用符号 adj A 表示。对于上面所给出的矩阵 A，其中每一元素用其自身的余因子来代替所得到的矩阵是：

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

而这个矩阵的转置矩阵即为 A 的伴随矩阵：

$$\operatorname{adj} A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

逆矩阵与伴随矩阵的关系用下式表示：

$$\boxed{A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{|A|}.} \tag{23}$$

在上述例子中，$|A|=1$，因此，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

和

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

满足了方程(22)。

逆阵有下列性质：

$$(A^{-1})^{-1}=A \tag{24}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \quad \text{（注意逆顺序）} \tag{25}$$

$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1} \tag{26}$$

$$|A^{-1}|=|A|^{-1}=\frac{1}{|A|} \tag{27}$$

如果一个方阵 A 的逆阵等于 A 的转置矩阵（即 $A^{-1}=A^T$），则 A 称为**正交矩阵**。若 A 是正交矩阵，则 A^T 和 A^{-1} 也是正交矩阵，(22)式变为：

$$\boxed{AA^T=A^TA=I.} \tag{28}$$

下列矩阵 A 和 B 是正交矩阵的例子：

$$A=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

如果一个正交矩阵认为是由行向量（或列向量）组成，则这些向量是正交单位向量。例如 A 的列向量是：

$$X_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad X_2=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

且

$$X_1^T X_2=X_2^T X_1=0$$
$$X_1^T X_1=X_2^T X_2=1.$$

这一性质将在第七节6条中作更详细的讨论。

第五节 分块矩阵

一个矩阵可以认为是由子阵组成的，而这些子阵本身也是矩阵。一个矩阵可以用许多方法分块为较小的子阵。例如，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 9\end{pmatrix}$$

可以分块成下列两个行矩阵：

$$A=\left(\begin{array}{c}A_1\\ \hdashline A_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}3 & 1 & 4\\ \hline 1 & 5 & 9\end{array}\right),$$

或分块成一个方阵和一个列矩阵。

$$A=[A_1 \,\vdots\, A_2]=\left(\begin{array}{cc|c}3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 9\end{array}\right).$$

在这一节里将讨论分块矩阵的乘法、转置和求逆法则。若两个矩阵A和B是可相乘的，则它们总是可以分块，以使相应的子阵可相乘。为此，只要把左边矩阵（A）的各列和右边矩阵（B）的各行严格按相同的方式分块就可以了。以AB为例，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},$$

这里最恰当的分块方法是：

$$AB=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hline 1 & 5\end{array}\right)=[A_1 \,\vdots\, A_2]\left(\begin{array}{c}B_1\\ \hdashline B_2\end{array}\right)$$

$$=A_1B_1+A_2B_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}[1 \quad 5]$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 15\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 15\\ 1 & 6\end{pmatrix}.$$

但这些矩阵也可以分块为：

$$AB=\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 3\\ \hline 0 & 1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c}1 & 0\\ \hdashline 0 & 1\\ 1 & 5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com