第六章

定積分的應用

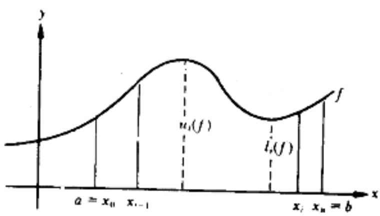
致讀者：

為了對本書的
有效使用起見
你必須先看扉頁中
「給讀者的說明」

6.1　面積

1　在本節中，我們要再度回顧一下 4.1 節曾經談過的面積問題。在求更複雜區域的面積時所遭遇到的問題，也要加以討論；然後引用相同的觀念，注意一些和體積、功、及轉矩有關的問題。

2　本進度所提出來的問題，旨在複習定積分的推廣情形，並包括所用的記法。如果你還記得像最小上界、上和、上積分這些名詞的意義和記法，那麼這些問題就可略而不答。



令 f 是對區間 $[\ a\ ,\ b\ ]$ 的一個有界函數；用 S_i 表示 $\{\ f(x)\mid x \in [\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ]\}$.

$u_i(f)$ 這個數為集合 S_i 的最小上界，若且唯若

(A)　對所有 $f(x) \in S_i$　，　$f(x) \leqslant$ ＿＿＿＿＿＿，及

$f(x) \leqslant u_i(f)$

(B)　若 $c < u_i(f)$，則有一個 $f(x) \in S_i$ 而使 $f(x) >$ ＿＿＿＿＿.

$f(x) > c$

有限的數集合 $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 爲閉集合 $[a,b]$ 的一個劃分，若且唯若
$\underline{a = x_0 < \qquad\qquad = b}$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

令 f 對 $[a,b]$ 爲有界，f 對於劃分 P 的上和用 $U(f,P)$ 來表示，所下的定義是
$\underline{U(f,P) = \qquad\qquad}$.

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} u_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

令 P^* 爲 $[a,b]$ 的所有劃分的集合。f 自 a 至 b 的上積分用 $\overline{\int_a^b} f$ 來表示，並定義爲

$\overline{\int_a^b} f = \underline{\qquad\qquad} \{U(f,P) \mid P \in P^*\}$.

(lub, glb)

$$\overline{\int_a^b} f = \text{glb}\{U(f,P) \mid P \in P^*\}$$

下和，$L(f,P)$，所下的定義是

$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} l_i(f)(x_i - x_{i-1})$，其中 $\underline{l_i(f) = \qquad\qquad}$.

$$l_i(f) = \text{glb } S_i \quad 或 \quad l_i(f) = \text{glb}\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

對 $[a,b]$ 的有界函數 f 的**下積分**，用 $\underline{\int_a^b} f$ 來表示，定義爲

$\underline{\int_a^b} f =$ ________________.

$$\underline{\int_a^b} f = \operatorname{lub}\{ L(f,P) \mid P \in P^* \}$$

只要是 $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$，我們說函數 f 自 a 至 b 是可積的。這種情形的公值，稱爲 **f 自 a 至 b 的積分**，並用__________來表示。

$$\int_a^b f \text{ 或 } \int_a^b f(x)\,dx$$

令 f 是對 $[a,b]$ 的一個有界函數。兩個充分條件之一都可下 $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ 的結論，這兩個條件是

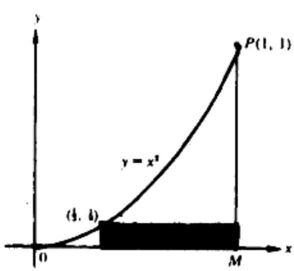
(1) f 對 $[a,b]$ 是________.

(2) f 對 $[a,b]$ 是________.

連續的　　　　單調的

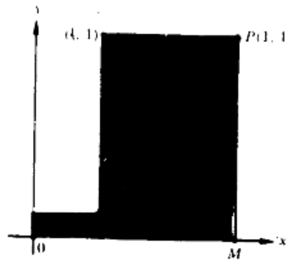
（還有其他的充分條件，見 4.4 節）

3 圖中的矩形，暗示面積 OPM 至少是__________.



$$\frac{2}{27}\left(=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}\right)$$

4　圖中各矩形暗示面積 OPM 至多是＿＿＿＿＿。



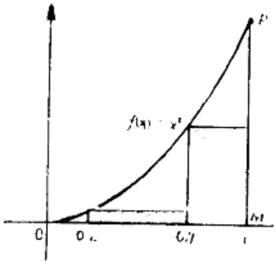
$$\frac{19}{27}\left(=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\cdot 1\right)$$

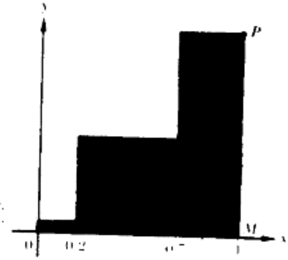
5　聯合以上兩個答案，面積 OPM 是這樣的一個數：

＿＿＿＿＿$\leqslant$面積 $OPM \leqslant$＿＿＿＿＿。

$$\frac{2}{27}\leqslant \text{面積 } OPM \leqslant \frac{19}{27}$$

6





這些圖形暗示面積 OPM 必定是這樣的一個數：

______ $\leqslant$ 面積 $OPM \leqslant$ ______.

0.167 $\leqslant$ 面積 $OPM \leqslant$ 0.553　(0.167 = 0.2(0) + 0.5(0.04) + 0.3(0.49))
(0.553 = 0.2(0.04) + 0.5(0.49) + 0.3(1))

7　x^2 自 0 至 1 的下積分，$\underline{\int_0^1} x^2\,dx$，等於 lub S，這裡的 $S = \{L(x^2, P) \mid P \in P^*\}$，以上兩進度中計算所得的數，$\frac{2}{27}$ 及 0.167，都屬於 S．x^2 自 0 至 1 的上積分，$\overline{\int_0^1} x^2\,dx$，等於 glb T，這裡的 $T = \{U(x^2, P) \mid P \in P^*\}$，屬於 T 的兩個數是______及______.

$\frac{19}{27}$ 及 0.553，是最方便而有效的答案。當然還有其他的數。

8　以 4.1 節中的 P^* 而論，P^* 是 [0, 1] 的所有可能劃分的集合，必可決定面積 OPM 是一個數（如果存在的話），而使 $\underline{\int_0^1} x^2\,dx \leqslant$ 面積 $OPM \leqslant$ ______.

$\overline{\int_0^1} x^2\,dx$

9　x^2 在全部 [0, 1] 中是否可積？______ 爲什麼？______.

是。因 x^2 對 [0, 1] 是單調的，或因 x^2 是連續的。

10　x^2 對 [0, 1] 既然是可積的，$\underline{\int_0^1} x^2\,dx =$ ______ dx.

$\overline{\int_0^1} x^2\,dx$

11 被擠壓在兩個同值示式中的任何數，都可稱它爲面積OPM，所以那個公值，就是給面積OPM所下的定義 。也就是說，面積$OPM = \int$ ______ = ______ .（計算積分的值。）

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

12 設一函數g，即$g(x) = 1/x^2$，定義於閉區間$[1,10]$．由x軸，$x=1$，$x=10$，及$g(x) = 1/x^2$所圍區域的面積——稱它爲A——必然是一個這樣的數：

$\mathrm{lub}\{L(1/x^2, P) \mid P \in P^*\} \leqslant A \leqslant$ ______.

$$\mathrm{glb}\{U(1/x^2, P) \mid P \in P^*\}$$

A必定也是使我們可以寫成這樣的一個數：

$\underline{\int_1^{10}} \frac{1}{x^2}\,dx \leqslant A \leqslant$ ______.

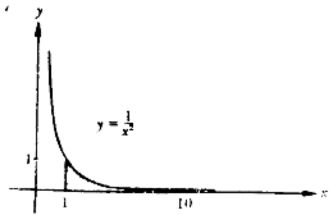
$$\overline{\int_1^{10}} \frac{1}{x^2}\,dx$$

因$1/x^2$對$[1,10]$是可積的，所以$\underline{\int_1^{10}} \frac{1}{x^2}dx = \overline{\int_1^{10}} \frac{1}{x^2}\,dx$.

可給A下合理定義的一個積分示式是$A =$ ______.

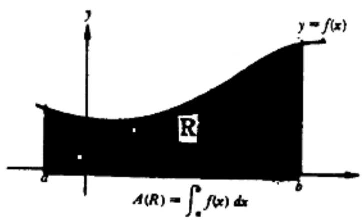
$$\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx$$

繪一個區域的圖形，它的已知面積是$\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx$．



13 由最後兩例的結果來看，我們可提出下列的面積定義。

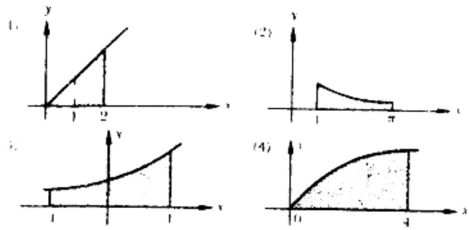
***6.1.13* 定義** 已知對 $[a, b]$ 的一個非負可積函數 f，由 x 軸，$x=a$，$x=b$（$a<b$），及 $y=f(x)$ 所圍區域的面積，定義爲 $\int_a^b f(x)\,dx$。



14 **習題** 將下列各定積分所示面積的區域繪成圖形。

(1) $\int_1^2 x\,dx$ (2) $\int_1^{\pi} \frac{1}{x}\,dx$

(3) $\int_{-1}^1 2^x\,dx$ (4) $\int_0^4 x^{1/2}\,dx$



底側以 x 軸爲界，兩側及頂側以所給方程式的圖形爲界，試繪這些區域的圖形並求它們的面積。

(5)　$x=1,\ x=4,\ y=\sqrt{x}$

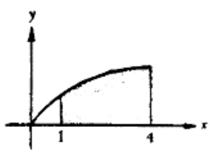
(6)　$x=1,\ x=10,\ y=1/x^2$

(7)　$x=0,\ x=3,\ y=2x+3x^2$

(8)　$x=2,\ x=3,\ y=1/x$

(9)　$x=-1,\ x=\dfrac{5}{3},\ y=e^x$

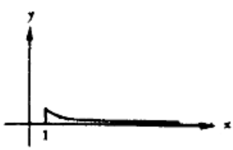
(5)



$$A=\int_1^4 x^{1/2}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

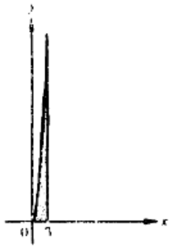
(6)



$$A=\int_1^{10} x^{-2}\,dx=\frac{-1}{x}\Big|_1^{10}$$

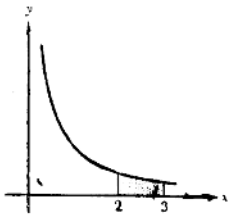
$$=\frac{-1}{10}-\frac{-1}{1}=\frac{9}{10}$$

(7)



$$A=\int_0^3 (2x+3x^2)\,dx=36$$

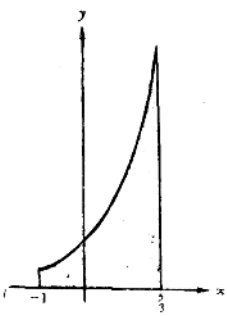
(8)



$$A=\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_2^3$$

$$=\ln 3-\ln 2=\ln 1.5$$

(9)

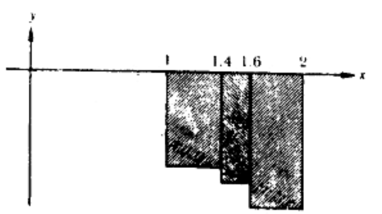


$$A=\int_{-1}^{5/3} e^x\,dx=e^{5/3}-e^{-1}$$

15 **例題** （不是面積問題）

$$\int_1^2 \left(-\frac{x}{2}\right)dx=-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2$$

$$=-\frac{3}{4}.$$



這個答案令人注意的地方是有一個負號；現在我們希望使這個負號和面積發生關係。附圖是為下列問題給以視覺上的幫助而設。

利用區間 $[1,2]$ 的劃分 $\{1, 1.4, 1.6, 2\}$，$\int_1^2\left(-\frac{x}{2}\right)dx$ 的計算值是________.

$-0.84\ (=0.4(-0.7)+0.2(-0.8)+0.4(-1))$

相同劃分及相同函數的上和值是________.

$-0.66\ (=0.4(-0.5)+0.2(-0.7)+0.4(-0.8))$

由以上兩個計算值，我們可知

$$\underline{\qquad\qquad < \int_1^2\left(-\frac{x}{2}\right)dx < \qquad\qquad}$$

$$-0.84 \leqslant \int_1^2\left(-\frac{x}{2}\right)dx \leqslant -0.66$$

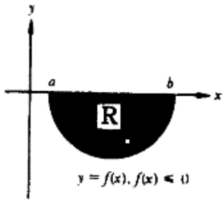
16 由本例可作更廣泛的推論，f 對區間 $[a,b]$ 是一個全為負值的有界函數時，所有上和及下和必然為負。對 $[a,b]$ 如 $f(x)<0$，那麼 $\int_a^b f$ 及 $\int_a^b f$ 的值也必然為負；當上積分及下積分的值相等而為負時，$\int_a^b f$ 也必然存在並有一個負值。

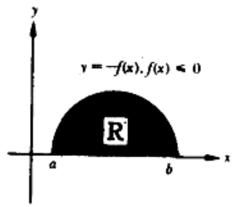
我們希望區域的面積始終是正值，即使它們位於 x 軸的下方亦然，於是採用了下面的定義。

***6.1.16* 定義** 對 $x\in[a,b]$，已知 $f(x)\leqslant 0$，且 f 對 $[a,b]$ 是可積的，由 x 軸，$x=a$，$x=b$ $(a<b)$，及

$y=f(x)$ 所圍區域的面積，定義爲 $\int_a^b(-f(x))\,dx$.

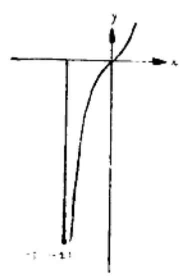
若對 $[a,b]$, $f(x)\leqslant 0$，則對 $[a,b]$, $(-f(x))\geqslant 0$，如下圖所示。





定義 *6.1.16* 的意思是說，R 的面積可以成爲 R^* 的面積，因 R^* 的周界，就是 R 的周界對 x 軸的反映。注意：將 $A(R)$ 對 $[a,b]$ 定義爲 $\int_a^b |f(x)|\,dx$，也可獲得相同的效果，因 $f(x)\leqslant 0$ 時，$|f(x)|=-f(x)$。

17 **例題** 試求由 $g(x)=4x^3$，x 軸，及兩線 $x=-1$ 與 $x=0$ 所圍區域的面積。



$$A=\int_{-1}^{0}|4x^3|\,dx$$

因對 $[-1,0]$，$g(x)\leqslant 0$，

$$A=\int_{-1}^{0}(\qquad\qquad)\,dx=1.$$

$$\int_{-1}^{0}(-4x^3)\,dx$$

18 定義 *6.1.13* 和 *6.1.16* 可以合併成一個定義，適合求由 x 軸及函數圖形所圍區域的面積；而函數的圖形在全部 $[a, b]$ 中，可以部分是正值或負值，也可以全部是正值或負值。

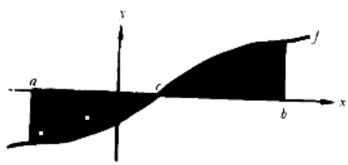
***6.1.18* 定義** 對 $[a, b]$ 的一個已知可積函數 f，由 x 軸，$x=a$，$x=b$ $(a<b)$，及 $y=f(x)$ 所圍區域的面積，定義爲 $\int_a^b |f(x)|\,dx.$

19 令 f 是對 $[a, b]$ 的一個可積函數，有一屬於開區間 (a, b) 的 c，可使 $f(c)=0$. 再令

對 $[a, c]$，$f(x)\leqslant 0$
對 $[c, b]$，$f(x)\geqslant 0$

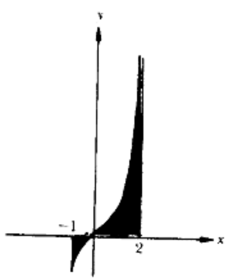
則由 x 軸，$x=a$，$x=b$，及 $y=f(x)$ 圍成的面積是

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^c (-f(x))\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$



例題 求由 $g(x)=4x^3$，x 軸及兩線 $x=-1$ 與 $x=2$ 所圍區域的面積。

$$A=\int_{-1}^{2} |4x^3|\,dx=\int_{-1}^{0} (\qquad\qquad)\,dx+\int_0^2 (\qquad\qquad)\,dx$$



$-4x^3 \qquad 4x^3$

於是

$$A=\int_{-1}^{0}(-4x^3)\,dx+\int_{0}^{2}4x^3\,dx=-x^4\Big|_{-1}^{0}+x^4\Big|_{0}^{2}=1+16$$

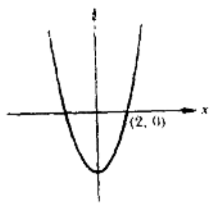
$$=17.$$

20 例題 計算 $I=\int_{0}^{5}|x^2-4|\,dx.$

$$I=\int_{0}^{5}|x^2-4|\,dx=\underline{\int_{0}(\qquad)\,dx+\int^{5}(\qquad)\,dx.}$$

$$\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx+\int_{2}^{5}(x^2-4)\,dx$$

$$\therefore\quad I=\frac{16}{3}+\frac{81}{3}=\frac{97}{3}$$

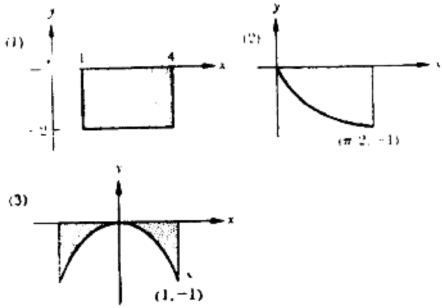


21 習題 位於 x 軸下方而可由下列各定積分算出面積的區域，試作成圖形。

(1) $\int_{1}^{4}|-2|\,dx.$

(2) $\int_{0}^{\pi/2}-(-\sin x)\,dx.$

(3) $\int_{-1}^{1}(-x^2)\,dx.$



求下列各區域的面積。圍成這些區域的為 x 軸及：

(4) $g(x) = x^3$， $x = -2$, $x = 0$.

(5) $g(x) = -e^{-x}$， $x = 0$, $x = 4$.

(6) $k(x) = -3x^2$， $x = -1$, $x = 2$.

(7) $h(x) = -3x^2$， $x = 0$, $x = 2\pi$. 提示：當 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 時，$h(x) \geqslant 0$；當 $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ 時，$h(x) \leqslant 0$.

(8) $f(x) = 2x^5$， $x = -1$, $x = 1$.

(9) $t(x) = \tan x$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$， $x = \dfrac{\pi}{4}$. 提示：$(-\ln\cos x)'$ 的導數為 $\tan x$。

(4) 4

(5) $1 - e^{-4}$

(6) 9

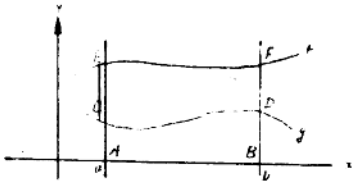
(7) $4\left(= \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx\right)$

(8) $\dfrac{2}{3}\left(= \int_{-1}^{0} (-2x^5)\, dx + \int_0^1 2x^5\, dx\right)$

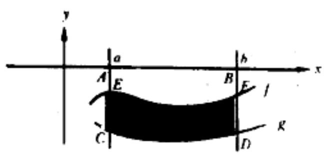
(9) $\ln 2\left(=-2\ln\cos x\Big|_0^{\pi/4}=-2\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-\ln 1\right)\right.$

$\left.=2\ln\sqrt{2}=\ln 2\right)$

22



對 $x\in[a,b]$，設 $g(x)\leqslant f(x)$。參看上圖，顯然可以直覺地看出來，R的面積等於面積$EFBA$去掉面積$CDBA$，用積分的說法，是指R的面積等於$\int_a^b f-\int_a^b g$ 或$\int_a^b(f-g)$。這個公式，$A(R)=\int_a^b(f-g)$，並不受上述圖形的限制。例如，試看右邊圖形，



則面積 $ABFE=\int_a^b(-f)$ 及面積 $ABDC=\int_a^b(-g)$。

因R爲陰影區域$CDFE$，由圖形顯示：

$A(R)=$面積$CDBA-$面積$EFBA=\int_a^b(-g)-\int_a^b(-f)$

$=\int_a^b(f-g)$。事實上，不論什麼情形，對 $x\in[a,b]$，如 $g(x)\leqslant f(x)$，公式 $A(R)=\int_a^b(f-g)$ 必然有效。