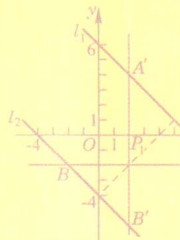
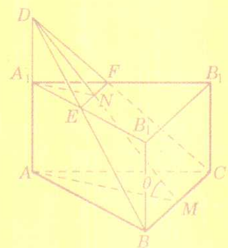
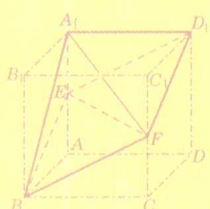
GAOKAOSHUXUE
DIERLUNFUXIZHIDAO

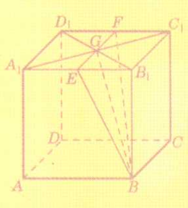
高考数学
第二轮复习指导

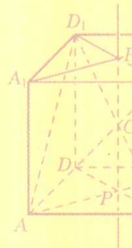
陈振宣 钱耀邦 王永利 编著

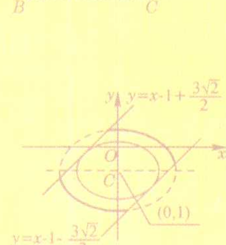












上 海 辞 书 出 版 社

GAOKAOSHUXUE
DIERLUNFUXIZHIDAO

高考数学第二轮复习指导

陈振宣 钱耀邦 王永利 编著

上海辞书出版社

图书在版编目（CIP）数据

高考数学第二轮复习指导／陈振宣等编．—上海:上海辞书出版社，2001.1

ISBN7-5326-0752-6

Ⅰ．高... Ⅱ．陈... Ⅲ．数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ．G 634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第85099号

责任编辑 唐尚斌
插　　图 朱旭东
封面设计 杨钟玮

高考数学第二轮复习指导
上海辞书出版社出版
（上海陕西北路457号　邮政编码 200040）
上海辞书出版社发行所发行　上海市印刷十一厂印刷
开本 787×1092 1/16　印张8.75　字数213 000
2001年1月第1版　2001年1月第1次印刷
印数1—8 000
ISBN7-5326-0752-6/0·32
定价:12元

前　　言

每年的高等院校入学考试(高考)都牵动着千百万莘莘学子以及教师和家长们的心,也备受社会各界的关注.我们固然反对一切围绕高考转的应试教育,但如何科学合理地指导高考复习,让学生不但通过高考能顺利地进入高校深造,而且从中对已学过的知识系统总结,提炼升华,增强应用能力,确实是一个值得仔细探讨的课题.

其实,素质教育和高考复习并不相悖,高考复习中同样能够并且应该贯彻素质教育的要求.中共中央、国务院《关于深化教育改革,全面推进素质教育的决定》中提出:“要让学生感受、理解知识产生和发展的过程,培养学生的科学精神和创新思维习惯,重视培养学生收集处理信息的能力,获取新知识的能力,分析和解决问题的能力,语言文字表达能力以及团结协作和社会活动的能力”.在这一决定的指导下,近年来高考数学试题明显以能力测试为主,强化对阅读理解、创新思维以及联系实际等方面能力的考查.试题的推理演算难度稍有降低,但由于考生对新情景的不适应,成绩反而略有下滑.为了适应素质教育的要求,上海辞书出版社邀集部分高三毕业班教师座谈,大家一致认为,在按照知识体系梳理的第一轮复习之后,若能编一本适合高考新思路,加强应用意识、创新意识,以数学思维方法和能力为纲的第二轮复习用书,将是十分有用的.这就是本书编写的宗旨.

为了提高分析、解决问题的数学思维能力,应从以下几方面努力:(1)加强对数学知识的理解,形成知识的逻辑结构与网络化,以利检索;同时强化数学语言形态(自然语言、符号语言、图象语言)的互译训练,这是提高思维能力的必经之路.(2)学会用方法论作概括,领会数学思维方法的精髓,这是正确思维的导航器.(3)通过多种情景的范例与练习,激发探索和创新的欲望,消除对新背景试题的恐惧心理,摆脱“依葫芦画瓢”的习惯,这是提高思维能力不可忽视的环节.

按照上述指导思想,本书分思维方法选讲和模拟试题两部分.选讲分6个专题,从方法论高度来概括解题的技能技巧,达到解题方向明确,思路清晰,并通过反思和随后的练习,举一反三,深刻领会;而且每一章后附有本章练习答案与提示,以供参考.模拟试题共8套,可每周做一套,既是实战演练,又能检验自己的熟练程度和能力水平.模拟题中作者自编了约15%的新题,并改编了一大批前几年的试题,或给出富有创意的新解法;既重视创新探索,又留意知识覆盖面,切实从提高学生素质来完善应试能力.希望这种高考复习的新思路能对广大高中毕业班师生有所启迪和帮助,但限于编者水平,欠妥之处在所难免,请师生们不吝指教,以利今后改进.

参加本书策划或提供资料的还有胡锦标、毛国琪、章秋生、胡平、方兆进、钟群、陈永箴等老师,特此致谢.

编　者

2001年1月

目　录

第一章　推理与证明

数学思维活动中出现最频繁的是运算与推理，而运算实质上是机械化的逻辑推理；可以说，要解决数学问题，时刻离不开逻辑推理，因此在第二轮高考复习中，强化逻辑推理的训练仍是最基本的环节.

例 1　如图 1-1，已知平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$.

(1) 证明：$C_1C\perp BD$；

(2) 假定 $CD=2$，$CC_1=\dfrac{3}{2}$，记面 C_1BD 为 α，面 CBD 为 β，求二面角 $\alpha\text{-}BD\text{-}\beta$ 的平面角的余弦值；

(3) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD？请给出证明.

(2000 年全国)

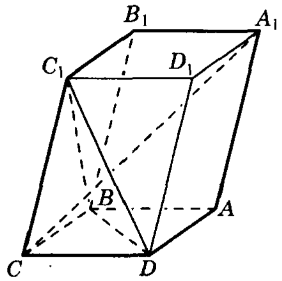


图 1-1

思路　(1) 如图 1-2，C_1C 与 BD 是异面直线，欲证 $C_1C\perp BD$，可从证明 C_1C 所在平面与 BD 垂直入手. 由已知 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$，可推出 $C_1B=C_1D$，根据等腰三角形性质得 $BD\perp C_1O$；再由 $ABCD$ 是菱形，推出 $AC\perp BD$，从而 $BD\perp$ 平面 C_1OC，即可达到目的.

(2) 欲求二面角 $\alpha\text{-}BD\text{-}\beta$，应先作出二面角的平面角. 而从已知条件可推出 $C_1B=C_1D$，AC 与 BD 相交于点 O，则 $CO\perp BD$，$C_1O\perp BD$，$\angle C_1OC$ 即此二面角的平面角. 在 $\triangle C_1OC$ 中，运用余弦定理不难获解. 若设点 C_1 在平面 BCD 上的射影为 H，则 H 必在 CO 上，通过 $S_{\triangle HBD}:S_{\triangle C_1BD}$ 也可获解.

(3) 从题设条件注意到：如果 $C_1C=CD$，则 $\triangle C_1CD$、$\triangle C_1CB$、$\triangle CBD$、$\triangle C_1BD$ 都是全等的正三角形，从而不难证明 A_1C 与 C_1O 的交点 G 即 $\triangle C_1BD$ 的中心，于是可知 $CG\perp$ 平面 C_1BD.

解　(1) $\because$　$\angle C_1CB=\angle C_1CD=60°$；又 $ABCD$ 是菱形，$CD=CB$，

$\therefore$　$\triangle CC_1B\cong\triangle CC_1D$，故 $C_1B=C_1D$.

连 AC、BD，$AC\cap BD=O$，O 为 BD 的中点，

$\therefore$　$C_1O\perp BD$；又 $AC\perp BD$，

$\therefore$　$BD\perp$ 平面 C_1OC.

$\therefore$　$C_1C\perp BD$.

(2) $\because$　$C_1O\perp BD$，$OC\perp BD$，

$\therefore$　二面角 $\alpha\text{-}BD\text{-}\beta$ 的平面角为 $\angle C_1OC=\theta$.

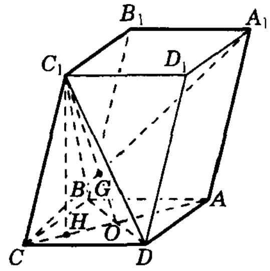


图 1-2

∵ $CD=2$, $C_1C=\dfrac{3}{2}$，∴ $CO=\sqrt{3}$, $OD=1$.

$$C_1D^2=CC_1^2+CD^2-2CC_1\cdot CD\cos 60^\circ=\left(\frac{3}{2}\right)^2+4-2\times\frac{3}{2}=\frac{13}{4},$$

$$C_1O^2=C_1D^2-OD^2=\frac{13}{4}-1=\frac{9}{4},\quad C_1O=\frac{3}{2}.$$

利用余弦定理，即得

$$\cos\theta=\frac{CO^2+C_1O^2-CC_1^2}{2CO\cdot C_1O}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(3) ∵ $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60^\circ$,

如果 $C_1C=CD$，则 $\triangle C_1CB$、$\triangle C_1CD$、$\triangle CBD$、$\triangle C_1BD$ 都为全等的正三角形.

设 A_1C 与 C_1O 交于 G.

∵ $A_1C_1 /\!/ AC$，$\triangle A_1GC_1 \backsim \triangle CGO$，且 $A_1C_1=2OC$，

∴ $C_1G:GO=2:1$.

又 C_1O 是正$\triangle C_1BD$ 的边 BD 上的中线，所以 G 为$\triangle C_1BD$ 的重心.

∴ $CG\perp$ 平面 C_1BD，即 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD.

由此可见，当 $\dfrac{CD}{CC_1}=1$ 时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD.

反思 立体几何无论是证明还是计算，都得先行推理，从空间元素的位置关系推出度量关系. 可见推理是基础，正确的推理是获得正确结论的先导. 推理总是顺推与逆推相结合，如果直接证法遇到困难，则可从反面思考. “正难则反”是推理论证的一般思维规律.

本题的解法不局限于上述方法，然而应用的思维方法并无本质差异，这里就不细述了.

例 2 如图 1-3，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是一直角梯形，$\angle BAD=90^\circ$，$AD /\!/ BC$，$AB=BC=a$，$AD=2a$，且 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，PD 与底面成 30°角.

(1) 若 $AE\perp PD$，E 为垂足，求证：$BE\perp PD$；

(2) 求异面直线 AE 与 CD 所成角的大小(用反三角函数表示).

(1999 年上海)

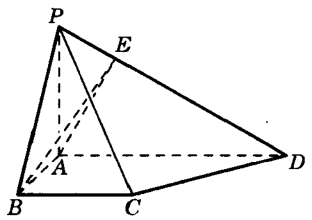


图 1-3

思路 (1) 从题设 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$\angle BAD=90^\circ$，可知 $BA\perp$ 平面 PAD，故 BE 在平面 PAD 上的射影为 AE，从而由 $AE\perp PD$，可得 $BE\perp PD$.

(2) 欲求异面直线 AE 与 CD 的夹角，可将 AE、CD 适当平移，置于同一三角形中，就不难求它们所成的角了.

注意到 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$，$AB\perp AD$，若以 AB、AD、PA 所在直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，分别确定 P、B、C、D、E 诸点的坐标，可得$\overrightarrow{PD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{AE}$的坐标表示，那么运用向量运算也可获解.

解一 (1) ∵ $PA\perp$ 平面 $ABCD$，∴ $PA\perp AB$，$PA\perp AD$.

∵ $\angle BAD=90^\circ$，即 $AB\perp AD$，∴ $AB\perp$ 平面 PAD.

直线 BE 在平面 PAD 上的射影为 AE.

已知 $AE \perp PD$，$\therefore \quad BE \perp PD$（三垂线定理）.

（2）如图 1-4，设 AD 的中点为 M，连结 BM；设 DE 的中点为 N，连结 MN，则

$BM \mathrel{\underline{\parallel}} CD$，$MN \parallel AE$，$\angle BMN$ 即异面直线 AE 与 CD 所成的角（或其补角）.

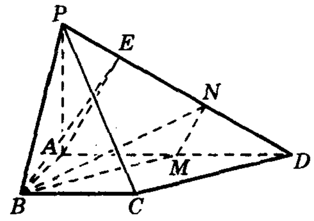


图 1-4

已知 $AB = BC = a$，$AD = 2a$，$\therefore \quad CD = BM = \sqrt{2}a$. 又 PD 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $30°$，即 $\angle PDA = 30°$，

$\therefore \quad AE = \frac{1}{2}AD = a$.

令 $\angle BMN = \varphi$，则 $\quad \cos\varphi = \dfrac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM \cdot MN}$，

而
$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{a}{2}, \quad NE = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$BN^2 = BE^2 + NE^2 = AB^2 + AE^2 + NE^2 = a^2 + a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{11}{4}a^2,$$

$$\therefore \quad \cos\varphi = \frac{2a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{11}{4}a^2}{2 \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{2}a} = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \angle BMN = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

因异面直线间夹角规定为锐角，故异面直线 AE 与 CD 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

解二 $\because \quad PA \perp$ 平面 $ABCD$，$\angle BAD = 90°$，

$\therefore \quad PA \perp AB$，$PA \perp AD$，$AB \perp AD$.

以 AB、AD、PA 所在直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，如图 1-5.

已知 $AB = a$，$BC = a$，$AD = 2a$，$\angle PDA = 30°$，$AE \perp PD$. 作 $EF \perp AD$，F 为垂足，则 $A(0,\ 0,\ 0)$、$B(a,\ 0,\ 0)$、$C(a,\ a,\ 0)$、$D(0,\ 2a,\ 0)$，且 $AE = 2a\sin 30° = a$，$AF = \frac{1}{2}a$，$EF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，于是点 $E\left(0,\ \frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$、$P\left(0,\ 0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)$.

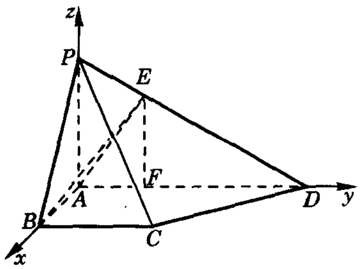


图 1-5

从此可得 $\quad \overrightarrow{PD} = \left\{0,\ 2a,\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right\}$， $\quad \overrightarrow{BE} = \left\{-a,\ \frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right\}$.

$$\because \quad \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{PD} = (-a) \cdot 0 + 2a\left(\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = a^2 - a^2 = 0,$$

$\therefore \quad BE \perp PD$.

$\overrightarrow{CD} = \{-a,\ a,\ 0\}$，$\overrightarrow{AE} = \left\{0,\ \frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right\}$，并设 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为 θ，

则 $$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{(-a)\cdot 0+a\cdot\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot 0}{\sqrt{a^2+a^2+0^2}\sqrt{0^2+\frac{a^2}{4}+\frac{3}{4}a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

故 $\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$，即 AE 与 CD 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

反思 对比解一与解二，可见以向量运算代替逻辑推理，可充分体现其机械化的特色，它比一般的推理更能显示其规律性．熟练掌握向量的符号语言，可使推理过程更加简洁．

例 3 (1) 已知数列$\{c_n\}$，其中 $c_n=2^n+3^n$，且数列$\{c_{n+1}-pc_n\}$（n 为非负整数）为等比数列，求常数 p；

(2) 设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明数列$\{c_n\}$不是等比数列．

（2000 年全国）

思路 (1) 既然$\{c_{n+1}-pc_n\}$成等比数列，则 c_1-pc_0，c_2-pc_1，c_3-pc_2 成等比数列，据此易得 p 的值．

(2) 欲证$\{c_n\}$不是等比数列，只要证：$c_2^2\neq c_1c_3$．

证 (1) $\because$ $c_n=2^n+3^n$，$\therefore$ $c_{n+1}-pc_n=(2-p)2^n+(3-p)3^n$．

$\therefore$ $c_1-pc_0=2-p+3-p=5-2p$，$c_2-pc_1=13-5p$，$c_3-pc_2=35-13p$．

$\because$ $\{c_{n+1}-pc_n\}$成等比数列，$\therefore$ $(13-5p)^2=(5-2p)(35-13p)$，

即 $169-130p+25p^2=175-135p+26p^2$， 亦即 $p^2-5p+6=0$．

解得 $p=2$ 或 3．

当 $p=2$ 时，$\{c_{n+1}-pc_n\}=\{3^n\}$；当 $p=3$ 时，$\{c_{n+1}-pc_n\}=\{-2^n\}$．

显然，$\{3^n\}$、$\{-2^n\}$都是等比数列．

(2) 设 $a_n=a_1p^{n-1}$，$b_n=b_1q^{n-1}$，且 $p\neq q$，$c_n=a_n+b_n$．

$$c_1=a_1+b_1,\ c_2=a_1p+b_1q,\ c_3=a_1p^2+b_1q^2\quad(a_1,b_1\neq 0).$$

$\because$ $c_2^2=(a_1p+b_1q)^2=a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq$，

$$\begin{aligned}c_1c_3&=(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)=a_1^2p^2+b_1^2q^2+a_1b_1(p^2+q^2)\\&>a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq\quad(\because\ p\neq q,\ \therefore\ p^2+q^2>2pq),\end{aligned}$$

$\therefore$ $c_2^2\neq c_1c_3$．亦即$\{c_n\}$不是等比数列．

反思 从特殊性的不成立可以推出一般化的不成立；反过来，从一般化的成立可以推出特殊性一定成立．上述思维过程其逆不真．善于灵活运用，常可简化推理过程．这是辩证思维的灵活性．

值得注意的是如果先证第(2)小题，运用其结论则可直接看出第(1)小题的解．

$\because$ $\{c_{n+1}-pc_n\}=\{(2-p)2^n+(3-p)3^n\}$，

$\therefore$ 由于 $2\neq 3$，可知当且仅当 $p=2$ 或 $p=3$ 时，才可能是等比数列．

而第(1)小题，如果不考虑前三项的特殊值，直接从通项 $c_{n+1}-pc_n=2^{n+1}+3^{n+1}-$

$p(2^n+3^n)$ 出发探求，就将陷入繁琐运算.

练　　习

1-1　若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则(　　).

(A) $R<P<Q$　　(B) $P<Q<R$　　(C) $Q<P<R$　　(D) $P<R<Q$

(2000 年全国)

1-2　若 $a<b<0$，则下列结论中正确的是(　　).

(A) 不等式 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

(B) 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

(C) 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$ 均不能成立

(D) 不等式 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 和 $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$ 均不能成立

(1999 年上海)

1-3　设有直线 m、n 和平面 α、β，则在下列命题中，正确的是(　　).

(A) 若 $m\parallel n$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

(B) 若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，$n\subset\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $m\parallel n$，$n\perp\beta$，$m\subset\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$

(D) 若 $m\parallel n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

(1999 年上海)

1-4　是否存在不是常数列的等差数列，其前 n 项之和与其后的 $2n$ 项之和的比是和 n 无关的常数？若存在，求出它是怎样的数列；若不存在，说明理由.

例 4　如图 1-6，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF\parallel AB$，$EF=\frac{3}{2}$，EF 与面 AC 的距离为 2，则该多面体的体积为(　　).

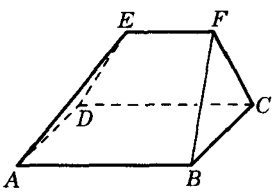


图 1-6

(A) $\frac{9}{2}$　　(B) 5

(C) 6　　(D) $\frac{15}{2}$

(1999 年全国)

思路　由于是非典型多面体，不能直接代公式来求，因而对策是：

(1) 进行适当转化，求出部分体积作估算，结合所给出的选择支，采取排除法获解.

(2) 利用等积变换，将 EF 作平行移动，化归为典型多面体之和.

解一　如图 1-7，将 EF 平行移动到 F 恰在过 BC 与底面 $ABCD$ 垂直的平面上，连结 AF、DF，则

$$V_{ABCDEF}=V_{E\text{-}ADF}+V_{F\text{-}ABCD}.$$

$\because\quad V_{F\text{-}ABCD}=\dfrac{1}{3}\times 3^2\times 2=6,$

$\therefore\quad V_{ABCDEF}>6.$　应选(D).

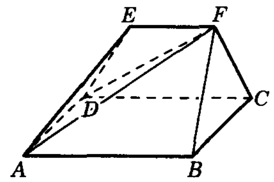


图 1-7

解二 如图 1-8,将 EF 平移到使 F 在过 BC 与底面 $ABCD$ 垂直的平面上,分别在面 AF 上与面 CE 上作 $EM\parallel FB$, $EN\parallel CF$,则

$$\begin{aligned}V_{ABCDEF}&=V_{EMN\text{-}FBC}+V_{E\text{-}AMND}\\&=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\times 3\times\frac{3}{2}\times 2\\&=\frac{9}{2}+3=\frac{15}{2}.\end{aligned}$$
应选(D).

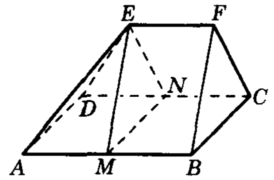


图 1-8

解三 如图 1-9,将 EF 平移到使 F 在过 BC 与底面垂直的平面上,延长 FE 到 G,使 $FG=AB$,则

$$\begin{aligned}V_{ABCDEF}&=V_{FBC\text{-}GAD}-V_{E\text{-}ADG}\\&=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times 3-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\\&=9-\frac{3}{2}=\frac{15}{2}.\end{aligned}$$
应选(D).

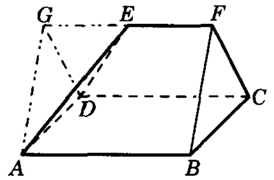


图 1-9

反思 这一例子反映了高考命题的新动向,对于非典型多面体求体积无公式可套,重点考查灵活应变的能力.解一中把 V_{ABCDEF} 转化为两个锥体体积之和,但 $V_{E\text{-}ADF}$ 又难求,思维受阻;注意到 $V_{ABCDEF}>6$,反观诸选择支中只有(D) $\dfrac{15}{2}>6$,根据排除法获解.

解二、解三则利用等积变形,将多面体分别化归为柱体与锥体之和或差来解.

例 5 已知两点 $M\left(1,\ \dfrac{5}{4}\right)$、$N\left(-4,\ -\dfrac{5}{4}\right)$,给出下列曲线方程:

① $4x+2y-1=0$; ② $x^2+y^2=3$; ③ $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$; ④ $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

在曲线上存在点 P 满足 $|MP|=|NP|$ 的所有曲线方程是(　　).

(A) ①③　　(B) ②④　　(C) ①②③　　(D) ②③④

(1999 年全国)

思路 注意到直线 MN 的斜率为$\dfrac{1}{2}$,故从条件 $|MP|=|NP|$ 可知点 P 的轨迹为 MN 的中垂线,它与 $4x+2y-1=0$ 平行,所以 $4x+2y-1=0$ 上不存在点 P,从而排除(A)、(C),因此只要检验③上是否存在点 P 就可以了.

解 满足条件 $|MP|=|NP|$ 的点 P 在 MN 的中垂线上,此中垂线的斜率为$\dfrac{1}{2}$的负倒数即 -2,所以与直线① $4x+2y-1=0$ 平行,即直线①上不存在点 P,从而排除(A)与(C).比较(B)与(D),只要检验 MN 的中垂线与曲线③ $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 有无交点就可以了.通过简单

画图可知曲线③与 MN 的中垂线有交点，故应选(D).

反思 本例是多项选择题，难度不大. 但如何快速解决，仍是考查思维敏捷性的一道好题. 由于①～④的曲线都较简单，画出图来观察也可得解，这样费时稍多. 按上解，边分析边对照题设给出的信息(包括选择支在内)，利用排除法，则可快速获解. 在高考中题量多，对待小题不能不重视解题的速度. 解选择题时，排除法是有效思路之一，应予注意.

练　习

1-5 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda} \end{cases}$ $(\lambda > 0)$，其中 λ 为参数. 另给出曲线方程：

① $2x + 2y + 3 = 0$； ② $x^2 + y^2 = 9$； ③ $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$； ④ $y^2 = 2x$.

曲线 C 与上述四曲线有交点的是(　　).

(A) ①②③　　(B) ②③④　　(C) ③④　　(D) ①②

1-6 设有不同的直线 a、b 和不同的平面 α、β、γ. 给出下列三个命题：

① 若 $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel b$；　② 若 $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$；

③ 若 $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$.

其中正确的个数是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2000 年上海)

1-7 “$a = 1$”是“函数 $y = \cos^2 ax - \sin^2 ax$ 的最小正周期为 π”的(　　).

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分条件也非必要条件

(2000 年春季上海)

1-8 若 $0 < a < 1$, $b < -1$, 则函数 $f(x) = a^x + b$ 的图象不经过(　　).

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

(2000 年春季上海)

例 5 某个命题与自然数 n 有关，如果当 $n = k$ $(k \in \mathbf{N})$ 时该命题成立，那么可推得当 $n = k + 1$ 时该命题也成立. 现已知当 $n = 5$ 时该命题不成立，那么可推得(　　).

(A) 当 $n = 6$ 时该命题不成立　　(B) 当 $n = 6$ 时该命题成立

(C) 当 $n = 4$ 时该命题不成立　　(D) 当 $n = 4$ 时该命题成立

(1994 年上海)

思路 根据“如果当 $n = k$ $(k \in \mathbf{N})$ 时该命题成立，那么可推得当 $n = k+1$ 时该命题也成立”与“$n = 5$ 时该命题不成立”，进行逆推：如果 $n = 4$ 时该命题成立，则根据假设可推得 $n = 5$ 时该命题也成立. 这与“$n = 5$ 时该命题不成立”矛盾，故(D)可排除；当 $n = 6$ 时该命题成立，则应有条件“$n = 5$ 时该命题成立”，这也与“$n = 5$ 时该命题不成立”矛盾，因而(B)

也被排除;但从 $n=5$ 时该命题不成立,无法推出 $n=6$ 时该命题不成立,所以(A)也被排除.应选(C).

解 (C)

反思 这一试题可从反面深刻理解数学归纳法的论证部分"如果当 $n=k$ 时命题成立,则 $n=k+1$ 时命题也成立"的作用.利用这一论证部分可知,如果命题在 $n=m\ (m\in\mathbf{N})$ 时不成立,则利用论证过的"如果当 $n=k$ 时命题成立,那么 $n=k+1$ 时命题也成立",可以推出 $n=m-1$ 时该命题也不成立.否则从 $n=m-1$ 时命题成立,可推出 $n=m$ 时该命题也成立,与已知条件" $n=m$ 时该命题不成立"相矛盾.依次类推,当 $n\leqslant m\ (m\in\mathbf{N})$ 时该命题都不成立.

例 6 已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列,$b_1=1$,$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=145$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\log_a\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)$ (其中 $a>0$,且 $a\neq 1$),记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和,试比较 S_n 与 $\dfrac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小,并证明你的结论.

(1998 年全国)

思路 (1) 根据 $b_1=1$,$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=145$ 与 $\{b_n\}$ 是等差数列,可以确定此等差数列的公差,从而求出通项 b_n.

(2) 以(1)的结果可得 $a_n=\log_a\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)$ 的表达式,从而求出 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.由 $n=1,2$ 时的情形猜想 S_n 与 $\dfrac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小,利用数学归纳法或其他方法证明自己的猜想.

解 (1) 已知 $b_1=1$,$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=145$,设此等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d,则有

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=\frac{10}{2}[2+(10-1)d]=145,$$

解得 $d=3$. 从而得 $b_n=1+(n-1)3=3n-2$.

(2) $a_n=\log_a\left(1+\dfrac{1}{3n-2}\right)=\log_a\dfrac{3n-1}{3n-2}$,

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\log_a\frac{2}{1}+\log_a\frac{5}{4}+\log_a\frac{8}{7}+\cdots+\log_a\frac{3n-1}{3n-2}$$

$$=\log_a\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}\right),$$

$$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}=\frac{1}{3}\log_a(3n+1)=\log_a\sqrt[3]{3n+1}.$$

因为当 $n=1$ 时,$\dfrac{2}{1}>\sqrt[3]{4}$;$n=2$ 时,$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{2}>\sqrt[3]{7}$;

从而猜想 $\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{8}{7}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3n-1}{3n-2}>\sqrt[3]{3n+1}$ $\cdots(*)$.

当 $n=1$ 时，猜想（*）显然成立.

设 $n=k$ 时，猜想（*）成立，即

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3k-1}{3k-2}>\sqrt[3]{3k+1}\quad 成立.$$

两边同乘以 $\frac{3k+2}{3k+1}$，得

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3k-1}{3k-2}\cdot\frac{3k+2}{3k+1}>\frac{3k+2}{3k+1}\sqrt[3]{3k+1}.$$

$$\because\quad \left[\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}(3k+2)\right]^3-[\sqrt[3]{3k+4}]^3=\frac{(3k+2)^3-(3k+4)(3k+1)^2}{(3k+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)^3-(x+3)x^2}{x^2}\ (其中\ x=3k+1)$$

$$=\frac{x^3+1+3x(x+1)-x^3-3x^2}{x^2}$$

$$=\frac{3x+1}{x^2}=\frac{9k+4}{(3k+1)^2}>0,$$

$$\therefore\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3k-1}{3k-2}\cdot\frac{3k+2}{3k+1}>\sqrt[3]{3k+4}=\sqrt[3]{3(k+1)+1}.$$

所以 $n=k+1$ 时，猜想（*）成立. 故 n 为任意正整数时，猜想（*）都成立.

由此证得：当 $a>1$ 时，$S_n>\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$；当 $0<a<1$ 时，$S_n<\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$.

反思 这是高考对数列性质和灵活运用数学归纳法的考查. 数学归纳法运用中的难点是论证部分，即如何从 $n=k$ 时命题成立的假设出发，证明 $n=k+1$ 时命题也成立，其关键在于把握 $n=k$ 与 $n=k+1$ 之间的内在联系，找到合理的过渡方法. 在本例中，就是利用不等式 $\left[\frac{\sqrt[3]{3k+1}}{3k+1}(3k+2)\right]^3-[\sqrt[3]{3k+4}]^3>0$ 的证明使过渡顺利通过. 这是数学归纳法证明中最常用的思路，值得认真记取.

对于不等式（*）的证明方法较多，由 $\sqrt[3]{3k+1}$ 与 $\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}$ 都是正数，故可归结为比较 $c_n=\frac{1}{\sqrt[3]{3k+1}}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{8}{7}\right)\cdots\left(\frac{3n-1}{3n-2}\right)$ 与 1 的大小.

$$\because\quad c_n=\frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{8}{7}\right)\cdots\left(\frac{3n-1}{3n-2}\right),$$

$$\therefore\quad c_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{3n+4}}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{8}{7}\right)\cdots\left(\frac{3n-1}{3n-2}\right)\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right),$$

从而 $$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\sqrt[3]{3n+1}}{\sqrt[3]{3n+4}}\cdot\frac{3n+2}{3n+1}=\frac{3n+2}{\sqrt[3]{(3n+1)^2(3n+4)}}>\frac{3n+2}{\frac{3n+1+3n+1+3n+4}{3}}=1.$$

$$\therefore\quad c_{n+1}>c_n，即有\ c_n>c_{n-1}>c_{n-2}>\cdots>c_1=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}>1.$$

因而 $\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}>\sqrt[3]{3n+1}$.

这类利用相关数列的单调性来证不等式的方法有一定典型意义，它与数学归纳法有异曲同工之妙.

练　　习

1-9 设 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N})$ 是否存在 $g(n)$，使得 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)=g(n)f(n)-g(n)$，试证你的判断.

1-10 已知函数 $f(n)=\frac{2^n-1}{2^n+1}$，求证对于任意不小于 3 的自然数 n，都有 $f(n)>\frac{n}{n+1}$.

1-11 设 $n\in\mathbf{N}$.

(1) 应用数学归纳法证明，存在 a_n，$b_n\in\mathbf{N}$，使

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n-1}=a_n\sqrt{2}+b_n\sqrt{3}\ (*)$$

成立；

(2) 求 $2a_n^2-3b_n^2$ 之值；

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 之值.

1-12 已知数列 $\{a_n\}$，$a_n>0$，$n\in\mathbf{N}$，使抛物线系

$$y=\frac{1}{2}x^2-2a_nx+(a_n-a_{n+1})$$

恒有 $y\geqslant 0$，求证：$a_n<\frac{1}{n+1}$.

1-13 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是自原点出发的一条折线. 当 $n\leqslant y\leqslant n+1$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 时，该图象是斜率为 b^n 的线段（其中正常数 $b\neq 1$）. 设数列 $\{x_n\}$ 由 $f(x_n)=n$ $(n=1, 2, \cdots)$ 定义.

(1) 求 x_1，x_2 和 x_n 的表达式；

(2) 求 $f(x)$ 的表达式，并写出其定义域；

(3) 证明：$y=f(x)$ 的图象与 $y=x$ 的图象没有横坐标大于 1 的交点.

(1999 年全国)

1-14 如图 1-10，设点 $A_1(1, 1)$ 为曲线 $xy=1$ 上的一点，过 A_1 作 $A_1B_1\perp OA_1$（O 为原点）交 x 轴于点 B_1，过 B_1 作 $A_2B_1\,/\!/\,OA_1$，交曲线于 A_2，再过 A_2 作 $A_2B_2\,/\!/\,A_1B_1$ 交 x 轴于 B_2，仿此得到 B_1，B_2，B_3，…，试求 B_nB_{n+1}，再求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{B_nB_{n+1}}{B_{n-1}B_n}$ 之值.

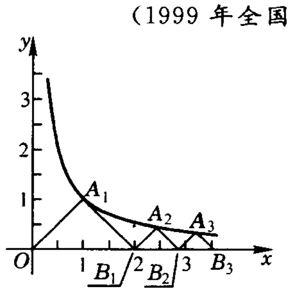


图 1-10

小　　结

数学崇尚逻辑推理，不仅要知其然而且要求索其所以然．凡未经证明的结论，至多是一个猜想，如何根据已有的真理（包括概念的定义、公理、定理、公式、法则），从已知条件出发逻辑地推出欲证的结论，是重要的数学思维．本章诸例就是帮助读者重温逻辑推理的规律，从捕捉问题的已知与内涵的信息（即已知条件与隐含的条件），搜索与问题有关并且有用的信息（已知真理），其间经过由因导果（综合）、执果索因（分析），形成从已知到结论的合理的逻辑回路．但无论是综合还是分析，都离不开直觉的猜想，如例 1 中的(3)．证明的实质无非是命题的等价与非等价转化，把逻辑推理与以后各章的思维方法有机地结合起来，才是提高思维能力的有效途径．

第一章练习答案与提示

1-1　B　**1-2**　B　**1-3**　C

1-4　设等差数列首项为 a_1，公差为 d，如果

$$S_n : (S_{3n} - S_n) = \frac{1}{k},$$

且 k 与 n 无关，则 $S_{3n} = (1+k)S_n$，即

$$\frac{3n}{2}(a_1 + a_{3n}) = \frac{n}{2}(1+k)(a_1 + a_n),$$

$$\frac{a_1 + a_{3n}}{a_1 + a_n} = \frac{1+k}{3},\quad \frac{a_{3n} - a_n}{a_1 + a_n} = \frac{k-2}{3},$$

$$6nd = (k-2)[2a_1 + (n-1)d],$$

$\therefore\quad (8-k)nd - (k-2)(2a_1 - d) = 0.$

$\because\quad k$ 与 n 无关，$\therefore\quad \begin{cases} d(8-k) = 0, \\ (k-2)(2a_1 - d) = 0. \end{cases}$

$\because\quad d \neq 0$，$\therefore\quad k = 8$，$d = 2a_1$.

所以当公差为首项的 2 倍时，$S_n : (S_{3n} - S_n)$ 为与 n 无关的常数．

1-5　C　**1-6**　A　**1-7**　A　**1-8**　A

1-9　当 $n=2$ 时，按 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) = g(n)f(n) - g(n)\quad \cdots(*)$

可得　$f(1) = g(2)[f(2) - 1]$；由 $f(1) = 1$，$f(2) = 1 + \frac{1}{2}$，可得 $g(2) = 2$.

当 $n = 3$ 时，按$(*)$　有

$f(1) + f(2) = g(3)[f(3) - 1]$，以 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$的值代人，解得

$g(3) = 3$；于是猜想 $g(n) = n$.

设 $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\ (n \geqslant 2,\ n \in \mathbf{N})$

存在 $g(n)=n$，使得

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=n[f(n)-1].$$

下面用数学归纳法验证. $n=2$ 时，已证明命题成立.

设 $n=k$ 时，命题成立，即

$f(1)+f(2)+\cdots+f(k-1)=k[f(k)-1]$，　则

$$\begin{aligned}f(1)+f(2)+\cdots+f(k-1)+f(k)&=k[f(k)-1]+f(k)=(k+1)f(k)-k\\&=(k+1)\left[f(k+1)-\frac{1}{k+1}\right]-k\\&=(k+1)f(k+1)-1-k\\&=(k+1)[f(k+1)-1].\end{aligned}$$

∴　$n=k+1$ 时，命题成立. 因而对于不小于 2 的一切自然数命题都成立.

1-10　提示：欲证 $f(n)>\dfrac{n}{n+1}$ $(n\in\mathbf{N},\ n\geqslant 3)$，即要证 $\dfrac{2^n-1}{2^n+1}>\dfrac{n}{n+1}$.

∵　$\dfrac{2^n-1}{2^n+1}=1-\dfrac{2}{2^n+1}$，　$\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$，

即要证 $1-\dfrac{2}{2^n+1}>1-\dfrac{1}{n+1}$，亦即要证 $2^n-1>2n$ $(n\geqslant 3)$.

应用数学归纳法证明 $2^n-1>2n$ $(n\geqslant 3,\ n\in\mathbf{N})$ 就十分简易了.

1-11　(1) 在 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n-1}=a_n\sqrt{2}+b_n\sqrt{3}$ 中，当 $n=1$ 时，左边 $=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，右边 $=a_1\sqrt{2}+b_1\sqrt{3}$，

∴　$a_1=1,\ b_1=1$，即有正整数 $a_1=1,\ b_1=1$，使得(＊)式成立.

设 $n=k$ 时，命题成立，即

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2k-1}=a_k\sqrt{2}+b_k\sqrt{3}\quad\cdots①,$$

其中 a_k、b_k 为正整数.

当 $n=k+1$ 时，(＊)式的

$$\begin{aligned}左边&=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2k+1}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2k-1}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\\&=(a_k\sqrt{2}+b_k\sqrt{3})(5+2\sqrt{6})\\&=(5a_k+6b_k)\sqrt{2}+(4a_k+5b_k)\sqrt{3},\end{aligned}$$

右边 $=a_{k+1}\sqrt{2}+b_{k+1}\sqrt{3}$，

$$\therefore\quad\begin{cases}a_{k+1}=5a_k+6b_k,\\ b_{k+1}=4a_k+5b_k;\end{cases}\quad\cdots②.$$

因为 $a_k,\ b_k\in\mathbf{N}$，所以由②式知 $a_{k+1},\ b_{k+1}\in\mathbf{N}$.

综合上述结果可知，对于一切自然数 n，有满足(＊)式的正整数 a_n,b_n 存在.

(2) 由②，$\begin{cases}a_n=5a_{n-1}+6b_{n-1},\\ b_n=4a_{n-1}+5b_{n-1},\end{cases}$