

大学数学 习题精编

汪光顺 贾中裕

编

徐静波 孙传弟 贾中英

机械工业出版社

大学数学习题精编

汪光顺 贾中裕

徐静波 孙传弟 贾中英 编



机械工业出版社

013-44

7.6

本书是按照高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《高等工业学校数学课程教学基本要求》及《一九八七年全国工学、经济学硕士生入学考试数学复习大纲》编写的。内容包括：高等数学、线性代数、概率论与数理统计及复变函数等四部分。全书共编入3000多道题。书末附有习题答案。

本书除一部分富有典型性的基本题外，还编入了大量难度较大、灵活性较强、技巧性较高的综合题；富于启发性的思考题、讨论题、证明题以及涉及面较广的应用题。书末附录还编入了240道是非题与选择题。

本书可供工科及经济学院校的学生学习，还可供报考硕士生的读者系统复习数学之用。

大学数学学习题精编

汪光顺 贾中裕

编

徐静波 孙传弟 贾中英

责任编辑：孙 瑞 版式设计：吴静霞

封面设计：刘 代 责任校对：熊天荣

责任印制：王国光

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ ·印张 $20 \frac{1}{2}$ ·字数 455 千字
1990年10月北京第一版·1990年10月北京第一次印刷

印数 0,001—2,910·定价：12.90元

社科新书目：255-198

ISBN 7-111-02121-5/O·48

前 言

本书是按照高等学校工科数学课程教学指导委员会制定的《高等工业学校数学课程教学基本要求》(下称“要求”)及《一九八七年全国工学、经济学硕士生入学考试数学复习大纲》(下称“大纲”)编写的。全书共编入3000多道题。

和其他一切科学一样,学习数学也只有通过有目的的实践,才能使自己逐步深刻理解概念,熟练掌握规律,增强数学素质,提高分析和解决问题的能力。

这3000多道精选的习题,包括了高等数学、线性代数、概率论与数理统计及复变函数等内容。除一部分富有典型性的基本题外,还编入了大量难度较大,灵活性较强,技巧性较高的综合题;富于启发性的思考题、讨论题和证明题以及涉及面较广的应用题。

本书习题的编排次序是按《要求》中的章节顺序编写的,可与现行教材配合使用。为适应不同层次读者的需要,将题目按难易程度分为“A”、“B”两类,“A”类是基本题,“B”类是较难的题。对于超出《大纲》范围的习题,在题目号码的右上角加“△”号。

为了适应考试改革的需要,书末附录编入240道是非题与选择题,以帮助读者加深理解基本概念,掌握基本定理。为便于与教材配合使用,是非题与选择题是按《要求》的顺序混合编在一起的。

在编写习题时,我们力求在《要求》和《大纲》的范围

内，以尽可能少的精选题目，达到覆盖面大，综合性强，难度稍高，适应范围广的要求。本书可供工科及经济学科的学生使用，更适于报考硕士生的读者在系统复习数学时使用，同时书末附有习题答案。

在本书的编写过程中得到梅向明教授，吴晨芳教授，范尚志副教授，孔德卿副教授及白玉峰副教授的热情关怀和支持，对此表示衷心感谢。

由于时间仓促以及我们能力所限，缺点和错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编者

目 录

前言

第一章 函数、极限、连续	1
第一节 函数	1
第二节 极限	3
极限的 $\varepsilon-N$ 、 $\varepsilon-\delta$ 定义(3) 极限的求法(5)	
第三节 函数的连续性	14
第二章 一元函数微分学	19
第一节 导数与微分	19
导数概念(19) 求函数的导数(23) 高阶导数(26)	
隐函数的导数(26) 由参数方程所给定的函数的导数	
(28) 平面曲线的切线与法线(29)	
第二节 中值定理	30
第三节 罗彼塔法则	39
第四节 导数的应用	47
函数的单调性(47) 函数的极值及曲线的凹性和拐点	
(50) 最大值与最小值应用问题(53) 函数图形的描	
绘(56) 曲率(57)	
第三章 一元函数积分学	59
第一节 不定积分	59
换元积分法(59) 分部积分法(62) 换元积分法与分	
部积分法杂题(63) 有理函数的积分(65) 简单无理	
函数的积分(66) 三角函数有理式的积分(68) 杂题	
(68)	
第二节 定积分	70

定积分的性质 (70) 变上限的定积分 (72) 定积分的 计算 (85) 杂题 (93)	
第三节 广义积分	103
第四节 定积分的应用	108
平面图形的面积 (108) 体积 (111) 定积分在物理学 上的应用 (112)	
第四章 向量代数与空间解析几何	114
第一节 向量代数	114
第二节 空间解析几何	115
平面 (115) 空间的直线 (116) 杂题 (117)	
第五章 多元函数微分学	121
第一节 二元函数	121
第二节 偏导数与全微分	122
偏导数、高阶导数 (122) 全微分 (124) 方向导数和 梯度 (125) 复合函数的微分法 (126) 隐函数的微分 法 (129) 多元函数微分法杂题 (133)	
第三节 偏导数的应用	139
空间曲线的切线与法平面 (139) 曲面的切平面与法线 (140) 多元函数的极值 (141) 条件极值 (142) 最大 值和最小值的应用问题 (143)	
第六章 多元函数积分学	146
第一节 二重积分	146
二重积分的计算 (146) 二重积分在几何上的应用 (152) 二重积分在物理学上的应用 (154) 杂题 (155)	
第二节 三重积分	159
三重积分的计算 (159) 三重积分在几何上的应用 (163) 三重积分在物理学上的应用 (164) 杂题 (165)	
第三节 曲线积分	166
对弧长的曲线积分 (166) 对坐标的曲线积分 (167)	

VI

格林公式 (168) 与路径无关的曲线积分 (170) 曲线
积分的应用 (172) 杂题 (174)

第四节 曲面积分 179

对面积的曲面积分 (179) 对坐标的曲面积分 (180)

高斯公式 (181) 斯托克斯公式 (184) 散度与旋度
(185) 曲面积分的应用 (186) 杂题 (188)

第七章 无穷级数 191

第一节 常数项级数 191

概念和性质 (191) 正项级数 (192) 任意项级数 (197)

第二节 幂级数 198

幂级数的收敛域 (198) 函数展开为泰勒级数 (201)

级数求和 (204)

第三节 傅立叶级数 209

第八章 常微分方程 214

第一节 一阶微分方程 214

变量可分离的方程 (214) 一阶线性方程 (218) 可用

变量置换法解出的一阶方程 (222) 全微分方程 (224)

杂题 (225)

第二节 可降阶的高阶微分方程 227

第三节 线性微分方程 228

二阶常系数齐次线性微分方程 (228) 二阶常系数非齐

次线性微分方程 (229) 欧拉方程 (233) 微分方程组

(234) 杂题 (236)

第九章 线性代数 240

第一节 行列式 240

第二节 矩阵 252

矩阵的运算 (252) 逆矩阵 (255) 矩阵的秩 (261)

分块矩阵 (262) 杂题 (265)

第三节 向量 268

n 维向量与向量组的线性相关性 (268)	向量组的秩 (270)	线性空间与线性变换初步 (274)
第四节 线性方程组	277	
克莱姆规则 (277)	线性方程组的解 (279)	杂题 (285)
第五节 矩阵的特征值与特征向量	291	
矩阵的特征值与特征向量 (291)	相似矩阵及矩阵的对角化 (294)	正交矩阵 (298)
杂题 (302)		
第六节 二次型	310	
二次型的标准形 (310)	二次型的正定性 (311)	杂题 (314)
第十章 概率论与数理统计	318	
第一节 随机事件与概率	318	
事件之间的关系与基本运算 (318)	概率的定义 (320)	概率的加法公式 (323)
条件概率及概率的乘法公式 (324)	全概率公式与贝叶斯公式 (327)	事件的独立性 (330)
伯努里概型 (333)	杂题 (334)	
第二节 随机变量及其分布	337	
离散型随机变量的分布列 (337)	二项分布与泊松分布 (338)	连续型随机变量的概率密度 (339)
分布函数 (341)	均匀分布、指数分布与正态分布 (344)	随机变量函数的概率分布 (346)
第三节 多维随机变量及其分布	348	
二维随机变量的联合分布列 (348)	二维随机变量的联合概率密度 (350)	二维随机变量的联合分布函数 (351)
二维随机变量的边缘分布 (352)	随机变量的独立性 (354)	随机变量函数的分布 (356)
第四节 随机变量的数字特征	360	
数学期望 (360)	方差 (363)	随机变量函数的数学期望 (366)
几个重要分布的数学期望与方差 (370)	协方差与相关系数 (371)	杂题 (373)

第五节 大数定律与中心极限定理	377
切比雪夫不等式 (377) 独立同分布的中心极限定理 (378) 德莫佛-拉普拉斯定理 (379)	
第六节 数理统计的基本概念	381
第七节 参数估计	383
矩估计与极大似然估计 (383) 估计量的评选标准 (385) 区间估计 (388)	
第八节 假设检验	390
假设检验的两类错误 (390) 单个正态总体的假设检验 (392) 两个正态总体的假设检验 (393) 总体分布假 设的 χ^2 检验 (394)	
第十一章 复变函数	397
第一节 复数与复变函数	397
复数及其运算 (397) 区域 (398) 复变函数 (399)	
第二节 解析函数	400
复变函数的可导与解析 (400) 调和函数与解析函数 (402) 初等函数 (402) 杂题 (403)	
第三节 积分	405
复变函数的积分 (405) 柯西积分公式与高阶导数公式 (406) 杂题 (409)	
第四节 级数	410
幂级数 (410) 罗朗级数 (412) 杂题 (413)	
第五节 留数	415
孤立奇点 (415) 留数的计算 (416) 留数定理 (417) 用留数求实积分 (419)	
第六节 保角映射	421
答案	424
附录 是非题与选择题	595

第一章 函数、极限、连续

第一节 函 数

A

1.1.1 设 $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}x + 5\arccos(3^x)$, 求 $f(x)$ 的定义域. $x < 0$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$

1.1.2 已知 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f[f(x)]$ 的定义域. $x \geq -1$ 且 $x \neq -2$

1.1.3 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

1.1.4 当 $0 < u < 1$ 时, $f(u)$ 有定义, 求函数 $f(\sin 2x)$ 的定义域.

1.1.5 已知 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$, 求 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right)$. $f(x) = 2 - 2x^2$

1.1.6 若 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$ 并且已知当 $y = 1$ 时有 $z = x$, 求函数 $f(x)$ 及 z 的分析表达式.

1.1.7 若 $f(x)$ 具有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 试证明: (1) $f(0) = 0$;

(2) $kf(x) = f(kx)$ k 为任意正整数.

1.1.8 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$. $x^2 - 2$

1.1.9 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

求 $f[f(x)]$.

$$1.1.10 \quad \text{已知 } f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$$

求 $f[f(x)]$ 和 $f[g(x)]$.

1.1.11 已知 $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = x - 2$, 试解方程

$$|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|.$$

1.1.12 已知 $f(x) = x - 3$, $\varphi(x) = 4 - x$, 试解不等式

$$|f(x) + \varphi(x)| < |f(x)| + |\varphi(x)|.$$

1.1.13 设 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+a}$, $\varphi(x) = \frac{lx+m}{nx+l}$, 其中 a 、 b 、 c 、 l 、 m 、 n 皆为常数, 且 $f[\varphi(x)] = \varphi[f(x)]$, 试求 c 、 b 与 m 、 n 之间应满足的关系式. $b, m \in \mathbb{C}^*$

1.1.14 若已知 $f(x) = x^2 - x + 3$, 试求方程 $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$ 的所有根. $-2, 4$

1.1.15 设函数 $f(x)$ 的定义域和值域均为 $x > 0$, 令 $f_0(x) = f(x)$, $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$ ($n \geq 1$), 若有 $f_{n+1}(x) = [f_n(x)]^2$, 求 $f_3(x)$.

1.1.16 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 记 $\underbrace{f[f(f \dots f(x))]}_{n \uparrow f} = f_n(x)$, 求 $f_4(x)$, $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$, $f_{2n}(x)$ 与 $f_{2n+1}(x)$.

1.1.17 已知 $f(x)$ 满足

$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x},$$

其中 a 、 b 、 c 都是常数, 且 $|a| \neq |b|$, 试证明 $f(x)$ 是奇函数.

1.1.18 设 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的任意函数, 试证:

(1) $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和;

(2) (1) 中所说的奇函数与偶函数是唯一的.

1.1.19 已知函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 且在区间 $[0, 2]$ 内 $f(x) = x^2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[4, 6]$ 内的表达式, 并在区间 $[0, 6]$ 内画出函数 $f(x)$ 的图形.

1.1.20 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 且满足 $f(1) = a$ 和 $f(x+2) = f(x) + f(2)$ ($-\infty < x < +\infty$), 试求: $2a$ $5a$

(1) $f(2)$ 和 $f(5)$;

(2) 问 a 取何值时 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

1.1.21 讨论狄利克莱 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的特性.

第二节 极 限

极限的 ε - N 、 ε - δ 定义

A

在题 1.2.1~1.2.6 中, 用极限定义证明:

$$1.2.1 \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6.$$

$$1.2.2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x} = 3.$$

$$1.2.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0 \quad (a > 0).$$

$$1.2.4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

$$1.2.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{5n+2} = \frac{2}{5}.$$

$$1.2.6 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}.$$

B

1.2.7 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x + 6)$$

并根据定义证明之.

1.2.8 证明: 若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且为 a , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

1.2.9 若数列 $\{x_n\}$ 具有性质, 对每一个自然数 k 均存在一个自然数 $N(k)$, 且当 $n > N(k)$ 时恒有

$$|a - x_n| < \frac{1}{k} \quad (a \text{ 为常数})$$

成立, 问由此能否得出结论 $\lim x_n = a$, 试说明之.

1.2.10 已知 $\lim x_n = a$, 试用数列极限的 ε - N 定义证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sin \frac{x_n}{n^2} \right) = 0.$$

1.2.11 试用数列极限的 ε - N 定义证明: 当 $0 < a < 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

1.2.12 当 $y_{n+1} > y_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \quad (a \text{ 为有限数})$$

试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a.$$

1.2.13 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad (A \neq 0)$$

试证存在 $\delta > 0$, 使 $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内有界.

1.2.14 已知

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

试证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = \infty.$$

极限的求法

A

在题1.2.15~1.2.72中, 求各极限:

$$1.2.15 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+5x)}{x+x^2}.$$

$$1.2.16 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$$

$$1.2.17 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m, n \text{ 都是正整数}).$$

$$1.2.18 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$$

$$1.2.19 \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

$$1.2.20 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

$$1.2.21 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$1.2.22 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - 1 - x}{x^2}.$$

$$1.2.23 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

$$1.2.24 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^3 + 8}.$$

$$1.2.25 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$1.2.26 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}.$$

$$1.2.27 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20} (3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}.$$

$$1.2.28 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)(x^2 + 1) \cdots (x^n + 1)}{\frac{n + 1}{2} [(nx)^n + 1]}.$$

$$1.2.29 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{2x + 1}}.$$

$$1.2.30 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^3} - \frac{1}{1 - x} \right).$$

$$1.2.31 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x}).$$

$$1.2.32 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}).$$

$$1.2.33 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}).$$

$$1.2.34 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x).$$

$$1.2.35 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[4]{x^4 + x^2 - x}}.$$

$$1.2.36 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{3x - 2}.$$

$$1.2.37 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$1.2.38 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$$

$$1.2.39 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}.$$

$$1.2.40 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

$$1.2.41 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

$$1.2.42 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{2 + \sin x}}{x^3}.$$

$$1.2.43 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x}} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{\sin x}}.$$

$$1.2.44 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right).$$