怎样列方程解应用题

赵宪初

上海教育出版社

怎样列方程解应用题

赵 宪 初

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行 苏州印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 1.75 字数 36,000

1964 年 12 月第 1 版 1979 年 5 月第 7 次印刷

印数 473,001—803,000 本

统一书号：7150·1594 定价：0.14 元

O122.2
1
00

目　录

一 前 言

在小学算术里，你们曾经学过各类应用题(如整数、分数和小数的四则应用题、百分数应用题、比例应用题等等)的解法. 进入中学，在代数里学过一元一次方程的解法以后，紧接着就学习了列出一元一次方程解应用题. 随着你们所学到的数学知识的扩展，今后还会不断地遇到列出其他类型的方程来解应用题.

用算术的方法解应用题和用列方程的方法解应用题，在解题的思想方法上究竟有什么区别？怎样才能很好地培养列方程解应用题的能力？这一些，也许是你们所希望知道的. 在这本小册子里，我们就来谈谈这方面的问题.

首先，让我们来看一个具体例子.

例 班级里有 50 个同学准备集体去看杂技演出. 他们买来的入场券的票价，一部分是 1 角 5 分的，另一部分是 2 角的. 总共的票价是 8 元 8 角. 他们买来的入场券里票价是 1 角 5 分的和 2 角的各有几张？

你们不妨先想一想，这个问题用算术方法应当怎样解？

现在我们来解这个问题. 先这样想：

(1) 如果买来的 50 张入场券，票价都是 1 角 5 分的，这时，总价应当是多少？

$$0.15\text{元}\times 50=7.5\text{元}.$$

(2) 现在总价超出了多少?

$$8.8\text{元}-7.5\text{元}=1.3\text{元}.$$

为什么要多付出这些钱呢?这是因为,在买来的入场券里有的票价超出了1角5分. 所以我们可以进一步再这样想:

(3) 用1张票价是2角的入场券换1张票价是1角5分的入场券,票价要超出多少?

$$0.2\text{元}-0.15\text{元}=0.05\text{元}.$$

(4) 现在超出的总价1.3元,是因为买了几张票价是2角的入场券所造成的?

$$1.3\text{元}\div 0.05\text{元}=26(\text{张}).$$

这样,我们就求出了买来的入场券里,票价是2角的有26张,由此也就容易算出买来的入场券里,票价是1角5分的有24张.

把上面的想法,简单地写下来,可以写成:

解 票价是2角的,有

$$\begin{aligned}&(8.8-0.15\times 50)\div(0.2-0.15)\\&=(8.8-7.5)\div 0.05\\&=1.3\div 0.05\\&=26(\text{张}).\end{aligned}$$

票价是1角5分的,有

$$50-26=24(\text{张}).$$

答:票价是1角5分的有24张,2角的有26张.

上面这个解法,不太容易想吧!

现在我们改用列方程的方法来解这个问题. 先假设买来的入场券里票价是2角的有x张,那末相应的票价是1角5

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

分的一定有$(50-x)$张．由此容易算出，总价的元数是：

$$0.2x+0.15(50-x). \qquad (1)$$

另一方面，我们已经知道总的票价是8.8元．因此，代数式(1)的值应当和8.8相等．由此我们就得到了一个含有未知数x的等式：

$$0.2x+0.15(50-x)=8.8.$$

下一步只要解这个方程就可以了．

这样，我们就得到了下面的解法．

解 设票价是2角的入场券有x张，那末票价是1角5分的应当有$(50-x)$张，根据题意，得方程：

$$0.2x+0.15(50-x)=8.8.$$

解这个方程，得

$$(0.2-0.15)x=8.8-7.5,$$

$$0.05x=1.3,$$

$$x=1.3\div0.05,$$

$$x=26.$$

把$x=26$代入$50-x$，得

$$50-x=50-26=24.$$

检验：$0.2\times26+0.15\times24=5.2+3.6=8.8$(元)，

$$26+24=50\text{(张)}.$$

所以求得的解是符合题设条件的．

答：票价是2角的有26张，票价是1角5分的有24张．

这个解法是不是要比前一个解法容易得多？

为什么用列方程的方法来解应用题，一般来说，要比用算

术方法解应用题容易一些呢？这可以从对比上面这个问题的两种解法中看出.

用算术方法来解应用题，实际上，就是要我们找出一个用四则运算符号把已知数联系起来的式子，来表示所求的未知数，然后再计算这个式子的值. 例如，在上面这个例子里，就是要用算式

$$(8.8-0.15\times50)\div(0.2-0.15)$$

来表示所求的未知数. 如果我们仍旧用字母 x 来表示这个未知数的话，也就是要从等式

$$x=(8.8-0.15\times50)\div(0.2-0.15)$$

里计算出 x 的值. 这个式子的得来是间接的. 在一些条件比较复杂或者条件不太明显的问题里，要列出这样的等式，一般来说要比较困难.

用列方程的方法来解应用题，就克服了这个难点. 我们只要先假设一个未知数，这样就有可能直接或者比较直接地把题目里的条件用等式表示出来. 例如，在上面的这个例子里，我们很容易把题目里的条件用等式

$$0.2x+0.15(50-x)=8.8$$

表示出来. 下一步，解这个方程，得

$$x=1.3\div0.05.$$

事实上，这就回到了算术解法中所列出的式子：

$$x=(8.8-0.15\times50)\div(0.2-0.15).$$

因为用列方程的方法来解应用题，只要求我们能够根据题意列出一个含有未知数的等式，而不象用算术解法那样，限定我们写出表示未知数的算式，所以，从列式这一点来说，要容易得多.

列方程解应用题这一方法的优越性，还不只是在列式上要比用算术方法解应用题简便．你们今后学习了更多的代数知识，学会了其他类型的方程，如二次方程、无理方程等等的解法，将会发现，只要掌握了目前所学到的关于列方程的本领，并且学会这类方程的解法，就可以解决许多用算术方法不易解出或者无法解出的实际问题．

那末，究竟怎样才能学好列方程这一本领呢？从下一节开始，我们就来谈这个问题．

二　设直接未知数列方程

在学习“列出一元一次方程解应用题”的时候，你们已经知道列出一元方程来解应用题的一般步骤是：

(1) 弄清题意，看哪些是已知数，哪些是未知数，它们之间有什么关系；选择一个未知数，用字母 x（也可以用其他字母）来表示它，根据题目里所说的已知数和未知数之间的关系，用 x 的代数式来表示其他未知数．

(2) 利用(1)里没有用过的等量关系，列出方程．

(3) 解所得的方程．

(4) 从方程的根，得出题里所求的未知数的值，并且检查求得的值是不是合理，如果合理，就写出答案，如果不合理，就说明应用题无解．

把这些话概括起来，就是：

审题——选元——列代数式——列方程——解方程

——检验——作结论

在这些步骤里，解方程、检验和作结论这几步都比较简单，要掌握列方程解应用题这个本领，关键就在于，是否能够在正确审清题意的基础上，合理地选择未知数，并且正确地列出方程.

关于未知数的选择，最直接的方法是，题目里要求的未知数是什么，就把它选做方程里的元；如果题目里要求的未知数有好几个，那末就选取其中一个(如果限定用一元方程来解的话)作为方程里的元．这种选元的方法，通常我们把它叫做设直接未知数.

这一节里，我们就在设直接未知数这个前提下来研究列方程解应用题的方法.

象用算术方法解应用题一样，列方程解应用题的第一个步骤就是要仔细审清题意，把题目里的已知量、未知量以及它们之间的关系弄清楚．在解一些条件比较复杂的应用题的时候，可以采用列表的方法，把题目里的条件列举出来，这样往往会给我们带来不少方便．下面，我们来举一个例子.

例 1　王强从甲村出发去乙村．在乙村停留 1 小时后，又绕道丙村，再停留半小时后返回甲村．去时的速度是每小时走 5 公里，回来时的速度是每小时走 4 公里，来回(包括停留时间在内)一共用去 6 小时 30 分钟．如果回来时因为绕道关系，路程比去时多 2 公里，求去时的路程.

这个题目，看来条件比较复杂，但是仔细分析一下，可以看出：

(1)　这里涉及的量，一共有 3 种，就是：速度、时间和路

程. 它们之间的关系是:

$$\text{路程}=\text{速度}\times\text{时间}. \tag{1}$$

(2) 这里, 速度这个量的值有两个, 一个是去时的速度(5 公里/小时)[①], 一个是回来时的速度(4 公里/小时).

(3) 这里, 时间这个量的值有 3 个, 一个是总共的时间$\left(6\frac{1}{2}\text{ 小时}\right)$, 另两个是在乙村和丙村停留的时间$\left(1\text{ 小时和 }\frac{1}{2}\text{ 小时}\right)$. 它们之间的关系是:

$$\text{走路的时间}+\text{停留的时间}=\text{总时间}. \tag{2}$$

(4) 这里, 路程这个量的值也有两个, 一个是甲村到乙村的路程, 这个量的值是需要求出的, 另一个是从乙村绕道丙村到甲村多走的路程(2 公里). 它们之间的关系是:

$$\text{回来时的路程}=\text{去时的路程}+\text{多走的路程}. \tag{3}$$

弄清楚了这一些, 我们就可以用列表的方法, 把它们表示出来:

	速度(公里/小时)	时间(小时)	路程(公里)
去	5	?	?
回	4	?	?
其他已知量		停留$\left(1+\frac{1}{2}\right)$小时 共用 $6\frac{1}{2}$ 小时	回来时多走 2 公里

表 1

① “5 公里/小时”是每小时 5 公里的简单记法.

从这个表里，可以看出一共有 4 个未知数．因为题目里要求的是去时路程的公里数，我们就用 x 来表示这个未知数．从关系式(3)里可以得出表示回来时路程的公里数的代数式是 $x+2$，再从关系式(1)里可以得出表示去时和回来时走路的时间的小时数分别是：

$$\frac{x}{5} \text{ 和 } \frac{x+2}{4}.$$

填入上表，得

	速　度（公里/小时）	时　间（小时）	路　程（公里）
去	5	$\frac{x}{5}$	x
回	4	$\frac{x+2}{4}$	$x+2$
其他已知量		停留$\left(1+\frac{1}{2}\right)$小时 共用 $6\frac{1}{2}$ 小时	回来时多走 2 公里

表　2

做到这里，可以发现，在前面分析的那些关系里，还有一个关系式没有用到，这就是关系式(2)：

走路的时间＋停留的时间＝总时间．

我们就根据这个关系式来列方程，得

$$\frac{x}{5}+\frac{x+2}{4}+1+\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}.$$

由此，我们就可以得到下面的解法．

解　设去时的路程是 x 公里．那末，回来时的路程就是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$(x+2)$公里，去时路上所需要的时间是 $\frac{x}{5}$ 小时，回来时路上所需要的时间是 $\frac{x+2}{4}$ 小时．根据题意，得方程：

$$\frac{x}{5}+\frac{x+2}{4}+1+\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}.$$

解这个方程，得

$$4x+5x+10+20+10=130,$$
$$9x=90,$$
$$x=10.$$

答：去时走的路程是 10 公里．

现在，让我们再回过头来分析一下：在这个问题的解答过程中是怎样设元和列方程的？看一看从这个问题的解答中，可以得到什么经验？

(1) 怎样设元　从表 1 可以看出，题目里涉及的量，有 4 个量的值是未知的．但是其中只有一个量的值，就是去时的路程的公里数，是需要我们求出的．通常我们就把它设做方程里的未知数．

(2) 怎样用所设元的代数式来表示题目里其他未知量的值　这里，我们需要应用分析中所找出的有关量之间的关系式．如果我们根据路程、速度和时间之间的关系，就去时的情况和回来时的情况来看，这个问题里所用到的量与量之间的关系，一共有四个，就是：

去时的路程＝去时的速度×去时的时间；　(1-1)

回来时的路程＝回来时的速度×回来时的时间；(1-2)

走路的时间＋停留的时间＝总共化去的时间；　(2)

回来时的路程＝去时的路程＋多走的路程．　(3)

从表 2 可以看出，表里的其他三个未知量(回来时的路程、去时的时间和回来时的时间)的值是分别根据关系式(3)、(1-1)和(1-2)得出的.

(3) 怎样列方程　从上面所列出的方程，可以看出，这里应用了前面四个关系式里还没有被用过的那一个关系式[关系式(2)].

在我们列出一元方程来解应用题时，都是采用这样的方法的. 弄清楚了这一点，那末，只要把题目里的条件分析清楚，并且把题目里所涉及到的量与量之间的关系正确地找出来，那末正确地列出方程也就不会有困难了.

从上面的分析中还可以得到进一步的启发：这个问题的解答中所列出的方程不是只有这一个. 事实上，如果我们根据前面写出的四个关系式里的另外三个(例如取 1-2、2 和 3)，来导出表 1 里的其他三个未知量的代数式，而用留下来的一个关系式(例如 1-1)来写出等式，我们就可以列出另外一个方程.

你们不妨试一试，在设去时的路程是 x 公里这个前提下，可以列出几个不同的方程来解这个应用题？

上面这个问题的分析和解答过程，我们为了让读者容易看懂解题时的思考方法和步骤，所以叙述得很详细. 在实际解题时，当然不需要机械地加以模仿. 事实上，用这种列表的方法来分析题意，寻找解题的途径，是会带给我们很多方便的.

下面我们再来举一个例子.

例 2　甲种酒含纯酒精 70%，乙种酒含纯酒精 55%. 现

在要用这两种酒配制成含纯酒精60%的混合酒3000克，那末甲种酒、乙种酒各要取多少克?

这样想:

量的种类 酒的种类	酒的重量(克)	酒精的重量(克)	成分
甲种酒	x	$x\cdot70\%$	70%
乙种酒	$3000-x$	$(3000-x)55\%$	55%
混合酒	3000	$3000\cdot60\%$	60%

关系式

$$\frac{\text{酒精重量}}{\text{酒的重量}}=\text{成分};$$

甲种酒的重量+乙种酒的重量=混合酒的重量;

甲种酒里酒精的重量+乙种酒里酒精的重量

=混合酒里酒精的重量.

解 设甲种酒取x克. 那末乙种酒就要取$(3000-x)$克.

取出的甲种酒里含纯酒精的重量是: $x\cdot70\%$克;

取出的乙种酒里含纯酒精的重量是: $(3000-x)\cdot55\%$克.

因为甲、乙两种酒里含纯酒精的总重量，应当和混合酒里所含的酒精的重量($3000\times60\%$克)相等，所以得方程:

$$x\cdot70\%+(3000-x)\cdot55\%=3000\cdot60\%,$$

就是

$$70x+165000-55x=180000.$$

解这个方程，得

$$15x=15000,$$

$$x=1000(\text{克}).$$

$$3000-x=2000(\text{克}).$$

答：甲种酒取1000克，乙种酒取2000克.

你们可以自己分析一下，在这个问题分析列表过程中，以及列出方程时，是怎样应用量与量之间的关系式的？

你们可以再考虑一下，这个问题还可以有怎样的解法？

除了应用列表的方法来分析题意、寻找解题的途径外，有些问题采用图示分析的方法，往往更加直观，容易思考. 下面我们举一个例子.

例3 A、B两地相距12公里. 甲从A地到B地，在B地停留半小时后，又从B地返回A地. 乙从B地到A地，在A地停留40分钟后，又从A地返回B地. 已知两人同时分别从A、B两地出发，经过4小时后，在他们各自返回的路上相遇. 如果甲的速度比乙的速度每小时快$1\frac{1}{2}$公里，求两人的速度.

这个问题，看来条件也比较复杂. 我们先画一个示意图(图1)：

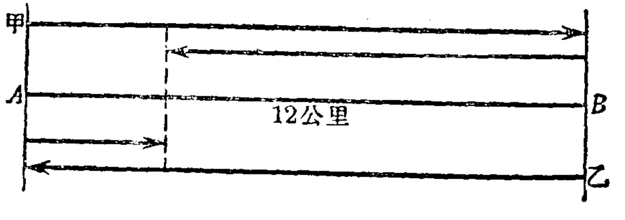

图 1

从图里可以看出，两人相遇时，他们所走路程的总和是 A、B 两地之间的距离的 3 倍．就是：

$$甲走的路程(公里)+乙走的路程(公里) =12\times 3(公里). \qquad (1)$$

由此,我们容易想到,只要根据关系式

$$路程=速度\times 时间,$$

把甲走的路程的公里数和乙走的路程的公里数，分别用含有未知数（这个未知数可以表示甲每小时走的公里数或者乙每小时走的公里数）的代数式表示出来，就可以根据(1)式来列出方程．由此,我们就可以得到下面的解法．

解　设甲每小时走 x 公里，那末乙每小时走 $\left(x-1\frac{1}{2}\right)$ 公里．

甲实际走了 $\left(4-\frac{1}{2}\right)$ 小时,一共走 $\left(4-\frac{1}{2}\right)x$ 公里;

乙实际走了 $\left(4-\frac{2}{3}\right)$ 小时,一共走 $\left(4-\frac{2}{3}\right)\left(x-1\frac{1}{2}\right)$ 公里．

因为他们所走的路程的总和是 12×3 公里,所以得方程:

$$\left(4-\frac{1}{2}\right)x+\left(4-\frac{2}{3}\right)\left(x-1\frac{1}{2}\right)=12\times 3,$$

就是

$$3\frac{1}{2}x+3\frac{1}{3}x-5=36.$$

解这个方程,得

$$6\frac{5}{6}x=41,$$

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入 $x-1\frac{1}{2}$,得

$$x-1\frac{1}{2}=6-1\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}.$$

答：甲的速度是每小时 6 公里，

乙的速度是每小时 $4\frac{1}{2}$ 公里.

注 上面我们所作的分析，可以从图上表示出来，如图 2 所示.

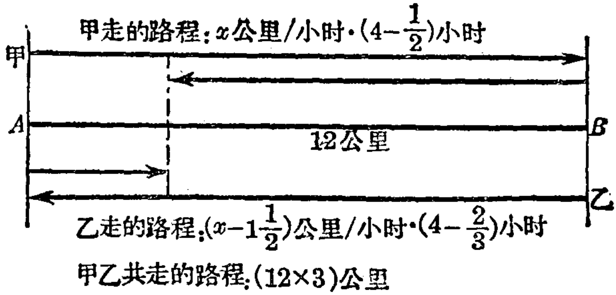

图 2

从上面我们所举的例子可以看出，在解应用题时，正确地找出题目里所涉及的量和量之间的关系式，是十分重要的．这需要我们善于应用所学过的知识或者生活中已有的经验．下面我们举一个看来是非常简单的问题，看应当怎样解答.

例 4 在三点钟和四点钟之间，时钟上的分针和时针什么时候重合？

我们不妨先用图把分针和时针原来所在的位置，以及重合时所在的位置表示出来(图 3)，并且假设分针和时针在 3 点 x 分钟时重合.

从图里可以看出，两针重合时，分针走了 x 格("格"表示

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com