数字信号处理教程

程佩青　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书系统地讨论了数字信号处理的基本理论、基本分析方法及基本实现方法。前三章是离散时间信号与系统的基本理论，包括离散时间信号与系统、z变换及离散傅里叶变换，第四、五、六章是数字滤波器的结构、理论和设计方法，第七章讨论了各种快速傅里叶变换算法，第八章讨论数字信号处理中的有限字长效应，它是误差分析的基础，第九章讨论数字滤波器的计算机辅助设计，这部分内容和实际应用紧密相关，第十章讨论数字信号处理的实现，包括 FFT 的硬软件实现以及数字滤波器的硬软件实现。第十一章讨论国内用得很多的 TMS32010 和 TMS320c25 数字信号处理器。

全书条理清楚，深入浅出，便于自学。

本书供大专院校电子工程、通信工程、信息工程、信号与系统、信号处理、图象处理等专业的本科生作为教材，也可供在通信、雷达、遥感、声纳、生物医学、地震等有关领域从事信号处理的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理教程/程佩青编著. —2 版. —北京: 清华大学出版社, 1995

ISBN 7-302-01836-7

I. 数… II. 程… III. 数字信号-信号处理-教材 IV. TN911. 72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 05673 号

出 版 者: 清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
责任编辑: 李幼哲
印 刷 者: 中国科学院印刷厂
发 行 者: 新华书店总店北京科技发行所
开 本: 787×1092 1/16 印张: 27.5 字数: 652 千字
版 次: 1995年 8 月第 1 版 1995年 8 月第 1 次印刷
书 号: ISBN 7-302-01836-7/TN·68
印 数: 0001—4000
定 价: 20.00 元

目　录

绪　论

一、数字信号处理的研究对象

数字信号处理是一个新的学科领域，它是把数字或符号表示的序列，通过计算机或专用处理设备，用数字的方式去处理这些序列，以达到更符合人们要求的信号形式。例如，对信号的滤波，提取和增强信号的有用分量，削弱无用的分量；或是估计信号的某些特征参数。总之，凡是用数字方式对信号进行滤波、变换、增强、压缩、估计、识别等都是数字信号处理的研究对象。

二、数字信号处理的学科概貌

数字信号处理的学科概貌可见图 1，其中，离散线性移(时)不变（LSI）系统理论和离散傅里叶变换（DFT）是数字信号处理领域的理论基础。而数字滤波和数字频谱分析是数字信号处理的两个基本的学科分支。

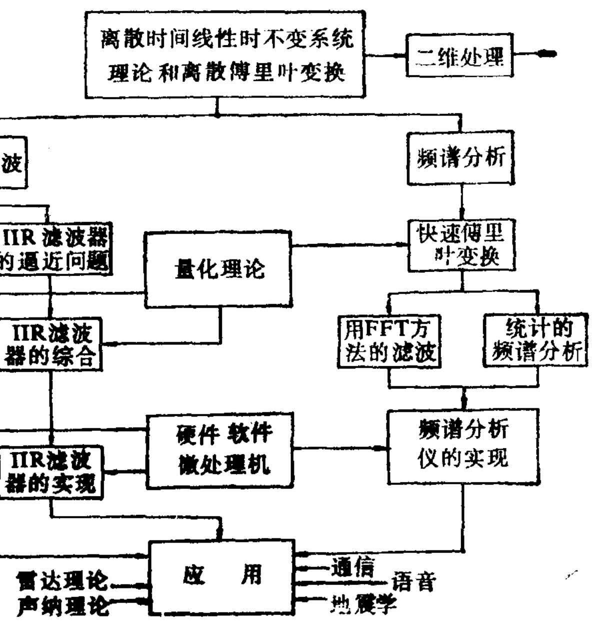

图 1　数字信号处理的学科概貌

数字滤波领域则分为无限长单位冲激响应（IIR）数字滤波器和有限长单位冲激响应（FIR）数字滤波器两部分内容。包括它们的数学逼近问题、综合问题(包括选择滤波器结构及选择运算字长)以及具体的硬件或计算机软件实现问题。

频谱分析包括两部分内容：（1）确定信号的频谱分析，这可采用离散傅里叶变换

(DFT) 法来进行分析，或者对于较复杂的情况，可采用线性调频 z 变换（CZT）。(2) 随机信号的频谱分析，这就是统计的谱分析方法。实际谱分析技术中都要用到快速傅里叶变换（FFT）和一些快速卷积算法。FFT 且可用来实现 FIR 数字滤波运算，而统计频谱分析法又可用来研究数字信号处理系统的量化噪声效应。

二维和多维信号处理则是最新发展的领域。

三、数字信号处理系统的基本组成

我们先讨论模拟信号的数字化处理系统，此系统先把模拟信号变换为数字信号，然后用数字技术进行处理，最后再还原成模拟信号。这一系统的方框图见图 II 所示。图 III 表示了框图中的各有关信号波形，输入模拟信号 $x_a(t)$（见图 III(a)）先经过前置预滤波器，作用是将输入信号 $x_a(t)$ 中高于某一频率(称折叠频率，等于抽样频率的一半)的分量加以滤除，然后在模拟-数字变换器（A/D 变换器）中每隔 T 秒(抽样周期)取出一次 $x_a(t)$ 的幅度，抽样后的信号称为离散时间信号，它只表示一些离散时间点 $0, T, 2T, \cdots nT, \cdots$ 上的信号值 $x_a(0), x_a(T), \cdots, x_a(nT), \cdots$，如图 III($b$) 所示，抽样过程即是对模拟信号的时间量化的过程。随之在 A/D 变换器的保持电路中将抽样信号进一步变换

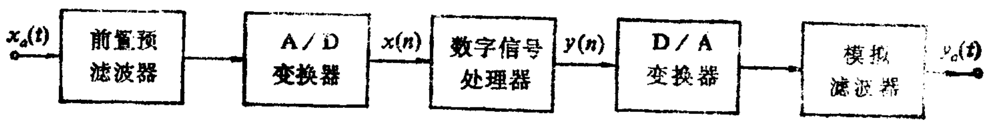

图 II 数字信号处理系统的简单方框图

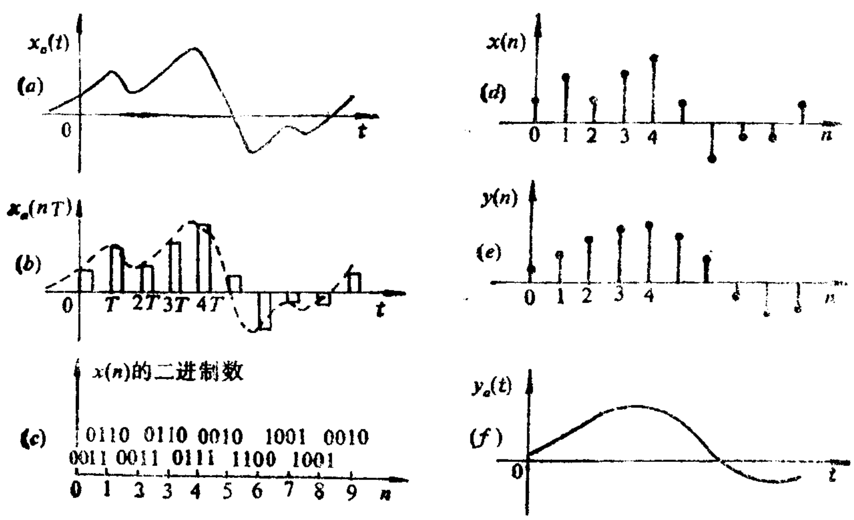

图 III 数字信号处理过程波形图

(a) 输入模拟信号波形； (b) 抽样信号；
(c) 数字码； (d) 量化后的输入信号序列；
(e) 输出信号序列； (f) 输出模拟信号。

成数字信号，一般采用有限位二进制码，所以它所表示的信号幅度就是有一定限制的。例

如 4 位码，只能表示 $2^4=16$ 种不同的信号幅度，把这些幅度称为量化电平，当离散时间信号幅度与量化电平不相同时，就要以最接近的一个量化电平来近似它。所以经 A/D 变换器后，不但时间量化了，而且幅度也量化了，这种信号就被称为数字信号，它是数的序列，每个数则用有限个二进制数码来表示(如图 III(c) 所示)，我们用 $x(n)$ 来代表输入数字化后的序列，自变量 n 是整型变量，它表示这个数在序列中的次序，为了形象起见，用一个垂直线段来表示其数值大小，如图 III(d) 所示。随后，数字信号序列通过数字信号处理系统的核心部分，即数字信号处理器，按照预定的要求，在处理器中将信号序列 $x(n)$ 进行加工处理，得到输出数字信号 $y(n)$（如图 III(e) 所示）。再后，$y(n)$ 通过数字-模拟（D/A）变换器，将数字序列反过来变换成模拟信号，这些信号在时间点 0，T，$2T, \cdots, nT, \cdots$ 上的幅度应等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的数值大小。最后还要通过一个模拟滤波器，以滤除掉不需要的高频分量，平滑成所需的模拟输出信号 $y_a(t)$，如图 III(f) 所示。

图 II 讨论的是模拟信号数字处理系统，实际的系统并不一定要包括它的所有框图，例如有些系统只需数字输出，可直接以数字形式显示或打印，那么就不需要 D/A 变换器。另一些系统，其输入就是数字量，因而就不需要 A/D 变换器。对于纯数字系统，则只需要数字信号处理器这一核心部分就行了。

四、数字信号处理的特点

数字信号处理系统具有以下一些明显的优点：

(1) 精度高。模拟网络的精度由元器件决定，模拟元器件的精度很难达到 10^{-3} 以上，而数字系统只要 14 位字长就可达到 10^{-4} 的精度。在高精度系统中，有时只能采用数字系统。

(2) 灵活性高。数字系统的性能主要由乘法器的系数决定，而系数是存放在系数存储器中的，只需改变存储的系数，就可得到不同的系统，比改变模拟系统方便得多。

(3) 可靠性强。因为数字系统只有两个信号电平“0”、“1”，因而受周围环境温度以及噪声的影响较小，而模拟系统，各元器件都有一定的温度系数，且电平是连续变化的，易受温度、噪声、电磁感应等的影响。如采用大规模集成电路，可靠性就更高。

(4) 容易大规模集成。这是由于数字部件有高度规范性，便于大规模集成、大规模生产，对电路参数要求不严，故产品成品率高。尤其是对于低频信号，例如地震波分析，需要过滤几赫兹到几十赫兹信号，用模拟网络处理时，电感器、电容器的数值、体积和重量都非常大，性能亦不能达到要求，而数字信号处理系统在这个频率处却非常优越。

(5) 时分复用。也就是利用数字信号处理器同时处理几个通道的信号，它的框图见图 IV，由于某一路信号的相邻两抽样值之间存在着很大的空隙时间，因而可在同步器的控制下，在此时间空隙中送入其他路的信号，而各路信号则利用同一个信号处理器，后者在同步器的控制下，算完一路信号后，再算另

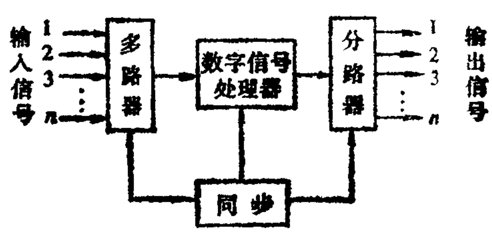

图 IV 时分多路复用数字信号处理系统

一路信号。因而处理器运算速度越高，能处理的信道数目也就越多。

(6) 可获得高性能指标。例如对信号进行频谱分析，模拟频谱仪在频率低端只能分析到 10Hz 以上频率，且难于做到高分辨率(足够窄的带宽)，但在数字的谱分析中，已能做到 10^{-3}Hz 的谱分析。又如有限长冲激响应数字滤波器，则可实现准确的线性相位特性，这在模拟系统中是很难达到的。

(7) 二维与多维处理。利用庞大的存储单元，可以存储一帧或数帧图象信号，实现二维甚至多维信号的处理，包括二维或多维滤波、二维及多维谱分析等。

数字信号处理系统也有其局限性，例如，数字系统的速度还不算高，A/D 变换器、硬件的速度也只在几十兆赫以下，故不能处理很高频率的信号。另外，系统较复杂，因而价格昂贵等也是其缺点。

由于数字信号处理的突出优点，因而在通信、语音、雷达、地震测报、声纳、遥感、生物医学、电视、仪器中得到愈来愈多的应用。

第一章　离散时间信号与系统

1.1　离散时间信号——序列

信号是传递信息的函数。例如交通红绿灯是信号，它传递的信息是红：停止，绿：通行。

按信号的特点不同，可表示成一个或几个独立变量的函数。例如图象信号就是空间位置(二元变量)的亮度函数。一维变量可以是时间，也可以是其他参量，一般习惯上将其看成时间。可以有以下几种信号：

连续时间信号：在连续时间范围内定义的信号，但信号的幅值可以是连续数值，也可以是离散数值。当幅值为连续这一特定情况下又常称为模拟信号。实际上连续时间信号与模拟信号常常通用，用以说明同一信号。

离散时间信号：时间为离散变量的信号，即独立变量时间被量化了。

数字信号：时间和幅值都离散化的信号。

我们现在来讨论离散时间信号，它只在离散时间上给出函数值，故是时间上不连续的“序列”。一般，离散时间的间隔是均匀的，以 T 表示，故用 $x(nT)$ 表示此离散时间信号在 nT 点上的值，n 为整数。由于可将信号放于存储器中，供随时取用，加之可以“非实时”的处理，因而可以直接用 $x(n)$ 表示第 n 个离散时间点的序列值。而将序列表示成 $\{x(n)\}$。但为了方便，就将 $x(n)$ 表示序列。注意，$x(n)$ 只在 n 为整数时有意义，n 不是整数时没有定义，不能认为是零。

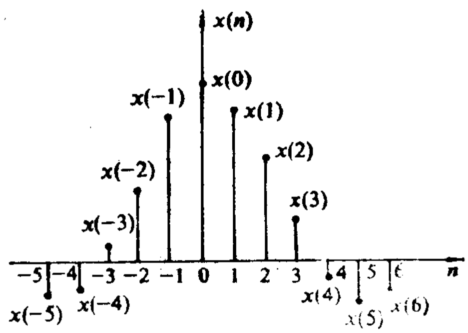

图 1-1　离散时间信号的图形表示

离散时间信号——序列，可以用图形来描述。如图 1-1 所示，横轴为 n，虽为连续直线，但只在 n 为整数时才有意义。纵轴线段的长短代表各序列值的大小。

一、序列的运算

包括移位、翻褶、和、积、累加、差分、卷积和等。

1. 序列的移位

设某一序列为 $x(n)$，当 m 为正时，则 $x(n-m)$ 是指原序列 $x(n)$ 逐项依次延时(右移)m 位而给出的一个新序列，而 $x(n+m)$ 则指依次超前(左移)m 位。

［例 1-1］

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

则

$$x(n+1)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n+1\geqslant -1\\ 0, & n+1<-1\end{cases}$$

或

$$x(n+1)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, & n\geqslant -2\\ 0, & n<-2\end{cases}$$

$x(n)$ 及 $x(n+1)$ 如图 1-2 所示。

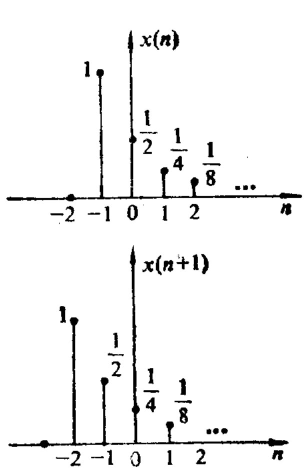

图 1-2　序列 $x(n)$ 及超前序列 $x(n+1)$

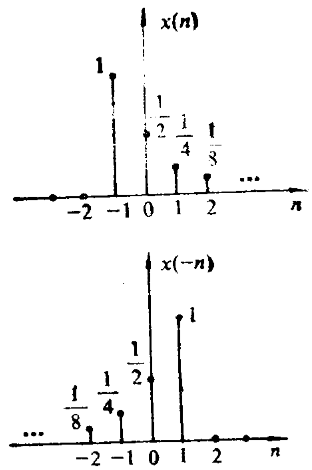

图 1-3　序列 $x(n)$及翻褶后的序列 $x(-n)$

2. 序列的翻褶

如果序列为 $x(n)$,则 $x(-n)$ 是以 $n=0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻褶。

[例 1-2]

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, & n\geqslant -1\\ 0, & n<-1\end{cases}$$

翻褶的序列为

$$x(-n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n\leqslant 1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

$x(n)$ 及 $x(-n)$ 如图 1-3 所示。

3. 和

两序列的和是指同序号 (n) 的序列值逐项对应相加而构成一个新的序列,表示为

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

[例 1-3]

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} 2^n, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}$$

则

$$x(n) + y(n) = \begin{cases} 2^n, & n < -1 \\ \frac{3}{2}, & n = -1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + n + 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$x(n)$、$y(n)$ 及 $x(n)+y(n)$ 如图 1-4 所示。

4. 积

两序列相乘是指同序号 (n) 的序列值逐项对应相乘。表示为

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$

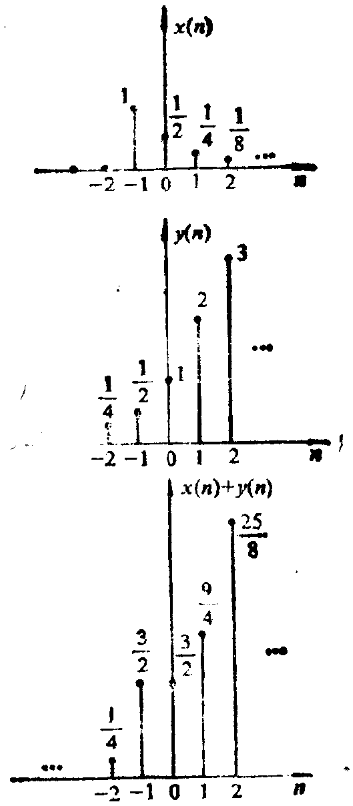

图 1-4　两序列相加

[例 1-4]　同上例中的 $x(n)$, $y(n)$，则

$$x(n) \cdot y(n) = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ \frac{1}{2}, & n = -1 \\ \frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \end{cases}$$

5. 累加

设某序列为 $x(n)$，则 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

它表示 $y(n)$ 在某一个 n_0 上的值等于这一个 n_0 上的 $x(n_0)$ 值以及 n_0 以前的所有 n 值上的 $x(n)$ 值之和。

[例 1-5]

设

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{k=-1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}, & n \geq -1 \\ y(n) = 0, & n < -1 \end{cases}$$

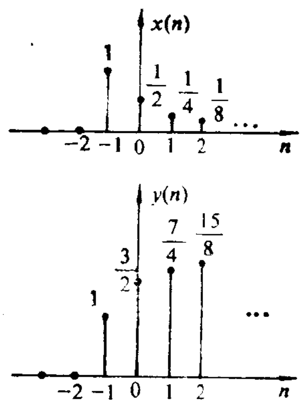

图 1-5　序列 $x(n)$ 及其累加序列 $y(n)$

因而

$n=-1$　　$y(-1)=1$

$n=0$　　$y(0)=y(-1)+x(0)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$n=1$　　$y(1)=y(0)+x(1)=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

$n=2$　　$y(2)=y(1)+x(2)=\frac{7}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$

其他 $y(n)$ 值可依次类推。$x(n)$ 及 $y(n)$ 如图 1-5 所示。

6. 差分运算

前向差分　$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

后向差分　$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

由此得出

$$\nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

[例 1-6]

设

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, & n \geq -1 \\ 0, & n < -1 \end{cases}$$

则

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$= \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 1, & n = -2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, & n > -2 \end{cases}$$

而

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$= \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1, & n = -1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}, & n > -1 \end{cases}$$

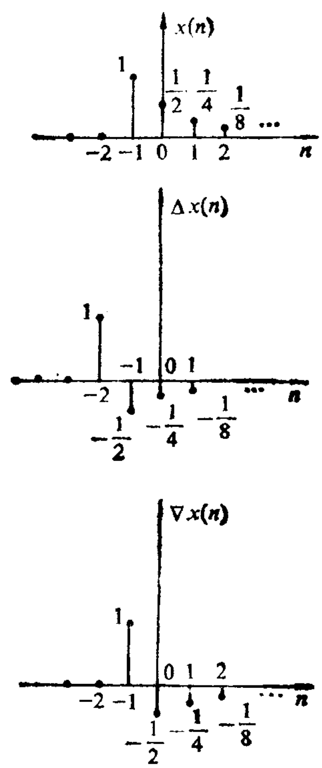

图 1-6　$x(n)$、前向差分 $\Delta x(n)$ 及后向差分 $\nabla x(n)$

$x(n)$、$\Delta x(n)$ 及 $\nabla x(n)$ 如图 1-6 所示。

7. 卷积和

我们知道卷积积分是求连续线性时不变系统输出响应(零状态响应)的主要方法。同

样，对离散系统“卷积和”也是求线性时不变系统输出响应(零状态响应)的主要方法。这里我们来一般性地讨论卷积和的定义及运算方法。

设两序列为 $x(n)$、$h(n)$，则 $x(n)$、$h(n)$ 的卷积和定义为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n) \qquad (1\text{-}1)$$

其中，把卷积和用“$*$”来表示。卷积和的运算在图形表示上可分为四步：翻褶、移位、相乘、相加，如图 1-7 所示。

(1) 翻褶　先在哑变量坐标 m 上作出 $x(m)$ 和 $h(m)$，将 $h(m)$ 以 $m=0$ 的垂直轴为轴翻褶成 $h(-m)$。

(2) 移位　将 $h(-m)$ 移位 n，即得 $h(n-m)$。当 n 为正整数时，右移 n 位。当 n 为负整数时，左移 n 位。

(3) 相乘　再将 $h(n-m)$ 和 $x(m)$ 的相同 m 值的对应点值相乘。

(4) 相加　把以上所有对应点的乘积叠加起来，即得 $y(n)$ 值。

依上法，取 $n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 各值，即可得全部 $y(n)$ 值。

一般求解时，可能要分成几个区间来分别加以考虑，可用下例来加以说明。

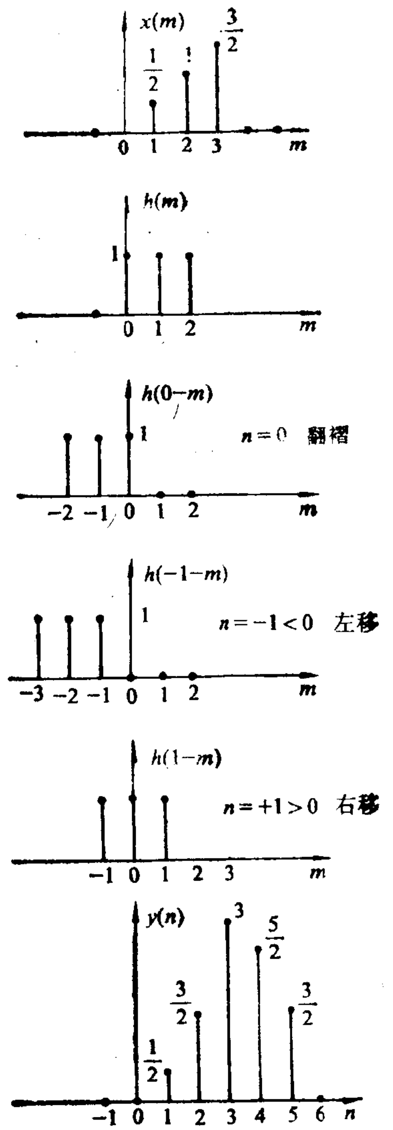

图 1-7　$x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和图解

[例 1-7]

设

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}n & 1\leqslant n\leqslant 3\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 2\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases}$$

则

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=1}^{3}x(m)h(n-m)$$ 先求其序列不为零的范围

分段考虑如下：

(1) 当 $n<1$ 时，$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 相乘，处处为零，故

$$y(n)=0, \qquad n<1$$

(2) 当 $1 \leqslant n \leqslant 2$ 时，$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 有交迭相乘的非零项是从 $m=1$ 到 $m=n$，故

$$y(n)=\sum_{m=1}^{n} x(m)h(n-m)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}n(1+n)$$

也就是

$$y(1)=\frac{1}{2},\quad y(2)=\frac{3}{2}.$$

(3) 当 $3 \leqslant n \leqslant 5$ 时，$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 交迭而非零值的 m 范围的下限是变化的($n=3$、4、5 分别对应 m 的下限为 $m=1$、2、3)，而 m 的上限是 3。

$$y(3)=\sum_{m=1}^{3}x(m)h(3-m)=\sum_{m=1}^{3}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}(1+2+3)=3$$

$$y(4)=\sum_{m=2}^{3}x(m)h(4-m)=\sum_{m=2}^{3}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}(2+3)=\frac{5}{2}$$

$$y(5)=x(3)h(5-3)=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$$

当 $n \geqslant 6$ 时，$x(m)$ 和 $h(n-m)$ 没有非零的交迭部分，故 $y(n)=0$。

卷积和的图解表示可见图 1-7。

由式(1-1)看出卷积和与两序列的先后次序无关，可证明如下：

令 $n-m=m'$ 代入(1-1)式，然后再将 m' 换成 m，即得

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

因此

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

二、几种常用序列

1. 单位抽样序列(单位冲激) $\delta(n)$

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1-2}$$

$\delta(n)$ 类似于连续时间信号与系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$，但是 $\delta(t)$ 是 $t=0$ 点脉宽趋于零，幅值趋于无限大，面积为 1 的信号，是极限概念的信号，或由分配函数来加以定义。而这里 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 时取值为 1，既简单又易计算。单位抽样序列如图 1-8 所示。

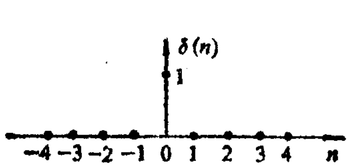

图 1-8　单位抽样序列

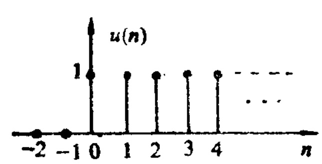

图 1-9　单位阶跃序列

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{1-3}$$

它类似于连续时间信号与系统中的单位阶跃函数 $u(t)$。但 $u(t)$ 在 $t=0$ 时常不给予定义,而 $u(n)$ 在 $n=0$ 时定义为 $u(0)=1$,如图1-9 所示。

$\delta(n)$ 和 $u(n)$ 间的关系为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1-4}$$

这就是 $u(n)$ 的后向差分。

而

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots \tag{1-5}$$

令 $n-m=k$ 代入此式可得

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k) \tag{1-6}$$

这里就用到累加的概念。

3. 矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases} \tag{1-7}$$

如图 1-10 所示。

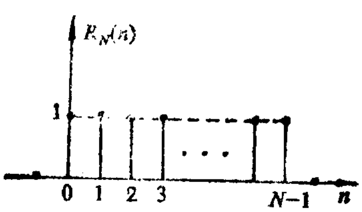

图 1-10　矩形序列

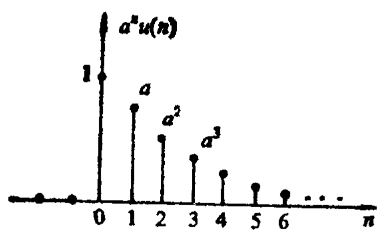

图 1-11　$0<a<1$ 时的实指数序列

$R_N(n)$ 和 $\delta(n)$、$u(n)$ 的关系为

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{1-8}$$

$$\begin{aligned}R_N(n)&=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)\\ &=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots+\delta[n-(N-1)]\end{aligned} \tag{1-9}$$

4. 实指数序列

$$x(n)=a^n u(n) \tag{1-10}$$

其中 a 为实数。当 $|a|<1$ 时序列是收敛的,而当 $|a|>1$ 时序列是发散的。

图 1-11 表示 $0<a<1$ 时 $a^n u(n)$ 的图形。

5. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma+j\omega_0)n} \tag{1-11a}$$

或

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \tag{1-11b}$$

它具有实部与虚部，ω_0 是复正弦的数字域频率。对第一种表示，可写成

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{\sigma n}(\cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n) \\ &= e^{\sigma n}\cos\omega_0 n + je^{\sigma n}\sin\omega_0 n \end{aligned}$$

如果用极坐标表示，则

$$x(n) = |x(n)|e^{j\arg[x(n)]} = e^{\sigma n}\cdot e^{j\omega_0 n}$$

因而

$$|x(n)| = e^{\sigma n}, \qquad \arg[x(n)] = \omega_0 n$$

6. 正弦型序列

$$x(n) = A\cos(n\omega_0 + \phi) \tag{1-12}$$

式中 A 为幅度，ω_0 为数字域的频率，ϕ 为起始相位。

三、序列的周期性

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N，满足

$$x(n) = x(n+N) \tag{1-13}$$

则称序列 $x(n)$ 是周期性序列，周期为 N。

现在讨论上述正弦序列的周期性。

由于

$$x(n) = A\sin(n\omega_0 + \phi)$$

则

$$x(n+N) = A\sin[(n+N)\omega_0 + \phi] = A\sin[N\omega_0 + n\omega_0 + \phi]$$

若

$$N\omega_0 = 2\pi k$$

k 为整数时，则

$$x(n) = x(n+N)$$

即

$$A\sin(n\omega_0 + \phi) = A\sin[(N+n)\omega_0 + \phi]$$

这时正弦序列就是周期性序列，其周期满足 $N = \frac{2\pi k}{\omega_0}$（$N$，$k$ 必须为整数），可分几种情况讨论。

(1) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时，则 $k=1$ 时 $N = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 为最小正整数，故具有周期为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$。如图 1-12 所示。

(2) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是整数，而是一个有理数时（有理数可表示成分数），设