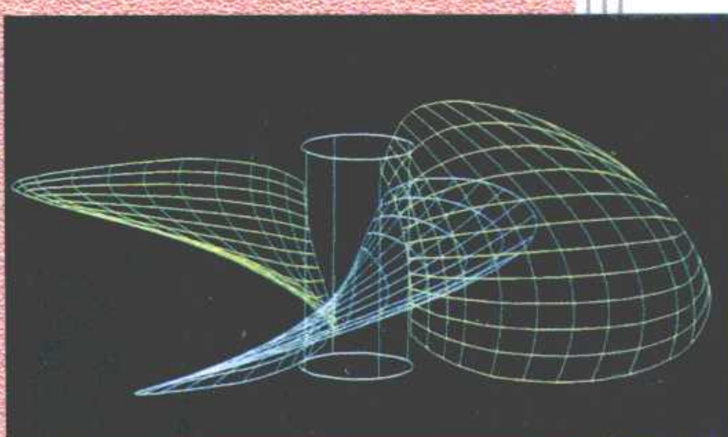
数控加工中的几何建模理论及其应用

任秉银　唐余勇　编著



哈尔滨工业大学出版社

数控加工中的几何建模理论及其应用

任秉银　唐余勇　编著

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内容提要

本书上、下两篇，上篇分两章，分别简介数控加工中的几何建模所必备的微分几何、计算几何知识；下篇亦分两章，分别介绍一次成形加工和自由曲面加工中的几何建模理论和具体应用。

本书取材前沿、新颖，有助于提高读者将数控加工中难题化为几何模型的能力，可供相关专业研究生和研究人员阅读参考。

数控加工中的几何建模理论及其应用
Shukong Jiagongzhong de Jihe Jianmo Lilun jiqi Yingyong
任秉银　唐余勇　编著
*
哈尔滨工业大学出版社出版发行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷
*
开本 850×1168　1/32　印张 4.875　字数 120 千字
2000 年 1 月第 1 版　2000 年 1 月第 1 次印刷
印数　1～1 000
ISBN 7-5603-1499-6/TP·141　定价 7.00 元

前　言

考虑到数学建模在数控加工中起到举足轻重的作用，任秉银博士根据他多年这方面的研究实践，特别是在他承担的“九五”攻关课题的研究实践中，深感有必要出版这方面的参考书。考虑到微分几何、计算几何是从事这类研究的工具，故特设上篇，分两章简洁地介绍了此类研究必备几何基础知识，因略去了较为冗长的公式推导过程，故这上篇篇幅不大。另一方面数控加工有一次成形加工和自由曲面加工之别，故下篇分两章分别介绍两者的通用性建模理论及其具体应用。由于任博士因工作需要东去日本进行合作研究，而本人曾与他合作做过这方面研究工作，收尾工作就由他委托本人来完成，因此在本书问世时当指出两点：一是本书主要是由任秉银博士编著的；二是由于收尾工作是由本人完成的，如存在疏漏，当批评的是我本人。

任秉银博士的这本编著，确有不少独到之处，即使是几何基础知识，也收集了近年才出现的有用的概念、公式，并反映到下篇的应用中，具有前沿性和新颖性，在收尾工作中，我深刻地感到这一点。另外本书确实有助于提高读者将数控中遇到的问题化为数学模型的能力，因此本人感到，这次与任博士的合作，亦有不少提高，相信读者亦会在阅读中有所启发。

由于本人身兼多职，时间比较紧张，书中肯定会存在一些疏漏和不足之处，恳请读者批评指正，在这里提前向读者致谢了！

唐余勇

1999 年 10 月

上篇　几何基础

本篇主要介绍复杂曲面构件数控加工建模的相关几何基础知识，包括微分几何和计算几何两部分。

微分几何基础一章主要介绍曲线论和曲面论中基本几何量的定义、计算公式及其用途等。通过对研究对象的几何量进行计算和分析，可以直观地了解其几何特性，为制定数控加工课题的合理方案奠定基础。

计算几何基础一章主要介绍各种自由曲线和曲面的表达方法、曲线曲面方程及其边界条件等知识。

这一篇中曲线曲面及其几何量均以简洁而实用的矢量方程表达；对推证较为冗长的定理或公式略去了详细推导或证明过程，直接引用有关结论或结果。读者如有兴趣详细了解其来龙去脉，请直接查阅有关几何方面的著作。

下面将分别介绍微分几何和计算几何的基础知识。

第一章　微分几何基础

1.1　矢量代数与矢量分析简介

本书所涉及的实数都用具体的数字或小写斜体字母表示，而对于既有长度又有方向的矢量则用粗体小写的斜体字母或在两个大写字母上加带箭头的横线表示。长度为零的矢量简称为零矢，称长度为 1 的矢量为单位矢量，简称为幺矢。

除偶尔用到极坐标系外，绝大多数情况下都采用遵守右手规则的空间直角坐标系，如 $\sigma=[O;x,y,z]$。

矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 在直角坐标系 σ 下的表达式一般记为

$$\boldsymbol{r}_i=\{x_i,y_i,z_i\}=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k}\quad(i=1,2,\cdots)\tag{1.1}$$

式中，x_i,y_i,z_i 依次代表矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 在各坐标轴上的投影，或称之为矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 在各坐标轴上的分量，而 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 依次为坐标轴 x,y,z 上的正向单位矢量。

矢量的长度，又称之为矢量的模。如式(1.1)所示的矢量的模用 $|\boldsymbol{r}_i|$ 表示，并且有 $|\boldsymbol{r}_i|=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$。

下面分别介绍矢量运算的有关公式。

1.1.1　矢量的基本运算

对于式(1.1)所示的矢量，有下列基本运算关系。

1) 加减运算

$$\boldsymbol{r}_1\pm\boldsymbol{r}_2=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$$

2) 数乘运算

$$k\boldsymbol{r}_i = \{kx_i, ky_i, kz_i\}$$

3）点乘运算（又称数量积运算）

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\cos\langle \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \rangle$$

式中，$\langle \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \rangle$表示 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 两矢量正向之间较小的夹角，即满足 $0 \leqslant \langle \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \rangle \leqslant \pi$。

不难推得对应的坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

4）叉乘运算（又称矢量积运算）

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\sin\langle \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \rangle \boldsymbol{e}$$

式中，$\boldsymbol{e}$ 为垂直于$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ 两矢量的单位矢量，并且$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{e})$构成右手系，若用分量表示，则有

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

5）混合积运算

混合积是指二矢量先叉乘、后点乘另一矢量的运算，一般记为$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$，其意义为

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{r}_3$$

若用分量表示，就有

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

6）二重矢积

二重矢积实际上是连续叉乘的运算，可以推出相应的计算公式为

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3) - \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3)$$

与上式相应的分量表达式较为复杂，可示为行列式形式

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

1.1.2 重要结论

对于矢量代数，下述结论是经常用到的。

1）若 $\boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{r}_1$ 的单位方向矢量，即方向幺矢为 $\boldsymbol{r}_1/|\boldsymbol{r}_1|$。

2）$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 \Leftrightarrow$* $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ 三式同时成立 $\Leftrightarrow$ 两矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 长度与方向均相同。

3）$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = |\boldsymbol{r}_i|^2$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$$

4）$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

5）$\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

6）$\boldsymbol{r}_1 /\!/ \boldsymbol{r}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \lambda\boldsymbol{r}_1 + \mu\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}$，$\lambda, \mu$ 为不同时为零的实数。

7）$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 共面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda\boldsymbol{r}_1 + \mu\boldsymbol{r}_2 + \upsilon\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$，$\lambda, \mu, \upsilon$ 为不同时为零的实数。

1.1.3 注意事项

本节主要指出矢量运算中容易发生谬误的地方，希望读者在应用中加以注意。

对于矢量的加、减运算、数乘运算可以像初等数学中数的运算那样进行，并满足相应运算法则，只需要注意矢量与数量的区别，

---

* $\Leftrightarrow$为等价符号。

而这是很容易做到的。

至于数量积，即点乘运算，只要注意到对于$(r_1 \cdot r_2) r_3$，由于前两个矢量 r_1 和 r_2 的点乘积所得到的数和矢量 r_3 点乘是没有定义的，也就可以知道点乘运算不会遇到结合律的问题，其他均可以按初等数学中的数那样进行运算。

最值得注意的是含叉乘的运算，这和初等数学大不相同，易见交换律就不成立

$$r_1 \times r_2 = -r_2 \times r_1$$

尤其不要用错下列结果。

(1) $(r_1, r_2, r_3) = (r_1 \times r_2) \cdot r_3 = -(r_2 \times r_1) \cdot r_3 = (r_2 \times r_3) \cdot r_1 = -(r_3 \times r_2) \cdot r_1 = r_1 \cdot (r_2 \times r_3) = r_3 \cdot (r_1 \times r_2)$

(2) $(r_1 \times r_2) \times r_3 = r_2(r_1 \cdot r_3) - r_1(r_2 \cdot r_3)$

$r_1 \times (r_2 \times r_3) = r_2(r_1 \cdot r_3) - r_3(r_1 \cdot r_2)$

上述两式中右端前一项完全相同，而后一项由于 r_1 和 r_2 两矢量的方向一般并不相同，故一般也就不相等。

由上述可见：① 混合积只满足结合律，不满足交换律，当然这个结论仍是先叉乘、后点乘意义下的结合律；② 二重矢积既不满足交换律，又不满足结合律；③ 乘法对加法的分析律还是成立的，即

$$(r_1 \pm r_2) \times r_3 = r_1 \times r_3 \pm r_2 \times r_3$$

$$(r_1 \pm r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot r_3 \pm r_2 \cdot r_3$$

$$r_1 \times (r_2 \pm r_3) = r_1 \times r_2 \pm r_1 \times r_3$$

$$r_1 \cdot (r_2 \pm r_3) = r_1 \cdot r_2 \pm r_1 \cdot r_3$$

对点乘则还可以交换

$$(r_1 \pm r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot r_3 \pm r_2 \cdot r_3 = r_3 \cdot (r_1 \pm r_2)$$

1.1.4 矢量分析简述

给定矢量函数（又称变矢量）

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad t \in [t_1, t_2]$$

即对$[t_1, t_2]$中每一个 t 值，均有确定的矢量 $\boldsymbol{r}$ 与之对应。若用分量表示，就有

$$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

显然它的分量表达式 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$就是该矢量函数所确定曲线的参数方程，而每一个分量表达式都是数学分析中讨论的函数，因而可以与数学分析相类似地引入矢量函数的极限、导数(导矢量)、微分、不定积分和定积分等概念，在此仅将有关的常用结论以及常用的几种特殊矢量函数依次简介如下。

1. 常用结论

对于前段所介绍的概念，均有相应的分量表达形式和与数学分析中相似的结论。如

(1) 若

$$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad \boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$$

那么就有

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0$$

同时成立。

(2) $\boldsymbol{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$

(3) $\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t$

(4) 若 $\boldsymbol{R}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$，则 $\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_0$ 为任意常矢量。

(5) $\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int_a^b x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int_a^b y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int_a^b z(t)\mathrm{d}t$

2. 几种特殊的矢量函数

(1) 定长变矢

对具有固定长度的变矢量 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，自然有

$$\boldsymbol{r}^2(t) = |\boldsymbol{r}(t)|^2 = C$$

对上式求导便可得 $2r(t)r'(t)=0$，于是有

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0 \tag{1.2}$$

又因上述每步可逆，因此有结论：

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为定长变矢量 $\Leftrightarrow \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'=0$

(2) 定向变矢

对于具有固定方向的变矢，显然可以用 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}$ 表示，且 $\boldsymbol{e}$ 为常幺矢。对该式求导并右叉乘该式便有

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\lambda(t)\boldsymbol{e}\times\lambda'(t)\boldsymbol{e}=\lambda\lambda'\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0} \tag{1.3}$$

注意到任一变矢均可表为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}(t) \tag{1.4}$$

式中，$\boldsymbol{e}(t)$ 为单位变矢。若上式中 $\boldsymbol{r}(t)\neq\boldsymbol{0}$，又式(1.4)满足式(1.3)，则有

$$\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{e}\times(\lambda'\boldsymbol{e}+\lambda\boldsymbol{e}')=\lambda^2\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}'+\lambda\lambda'\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}=\lambda^2\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}'$$

即有

$$\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{0}$$

而 $|\boldsymbol{e}(t)|=1$，即 $\boldsymbol{e}(t)$ 定长，故有

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}'=0$$

一个矢量若不为 $\boldsymbol{0}$，则不可能既平行又同时垂直于另一个非零矢量，因为 $|\boldsymbol{e}(t)|=1\neq0$，故必有

$$\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{0}$$

从而 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}(t)$ 为常幺矢，即满足式(1.3)的非零变矢必为定向变矢。综合上述分析就有结论：

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)\neq\boldsymbol{0}$ 为定向变矢 $\Leftrightarrow \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}$

(3) 平行于固定平面的变矢

若取固定平面的法向幺矢为 $\boldsymbol{n}$，则平行于此平面的变矢 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 满足下式

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=0$$

对上式求导、再求导依次有

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}' = 0, \quad \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'' = 0$$

由上述三式易见，$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''$均垂直于法向幺矢 $\boldsymbol{n}$，故必共面，于是有

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'') = 0 \tag{1.5}$$

显然若变矢 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$定向，自然可视为平行于固定平面，为了分析方便，下设 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$。

若能证明 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'$定向，那么由于$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}=0$，便可得到 $\boldsymbol{r}$ 为平行于固定平面的结论。而由式(1.5)有 $\boldsymbol{r}''=\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{r}'$，于是有

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')' = \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}\times(\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{r}') = \mu\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'$$

即有$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')'=\boldsymbol{0}$，这正表明 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'$为定向变矢。

综合上述讨论就有结论：

变矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0})$平行于固定平面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0$。

一般地，数学分析中的结论可平移到矢量分析中来，但是罗尔定理及其有关理论、台劳余项例外，其理由可参考文献[3]，当记住：罗尔定理只能运用在分量中，对矢函数整体一般不成立；台劳余项不能写成$\dfrac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(\xi)\Delta t^n$ 这样的形式。

1.2 曲线的基本三棱形与运动不变量

曲线是微分几何所研究的主要对象之一，由矢量分析可知，若矢函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$中矢量 $\boldsymbol{r}$ 为矢径，并且在某区间上连续，则其对应的终点轨迹一般为一条空间曲线。终点均在同一平面上的曲线为平面曲线，比如平面上的二次曲线；如果曲线上的点不在同一平面上，则称之为挠曲线，如圆柱螺旋线。

1.2.1 曲线方程的三种形式

下面介绍空间曲线方程常用的三种形式。

1. 参数方程

在空间直角坐标系下,曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{1.6}$$

如圆柱螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = bt \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

2. 矢量式方程

由于矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$可表示为 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$,所以曲线的参数方程式(1.6)也可写成矢函数的形式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

3. 交面方程

当把曲线看作两个曲面交线时,可以得到曲线的交面方程。因为三元的隐函数表示一个曲面,故曲线的交面方程的形式为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

1.2.2 简单曲线段

定义:$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)(a \leqslant t \leqslant b)$为曲线的矢量式方程,$t_0 \in (a, b)$,若在 t_0 的某个领域内,$\boldsymbol{r}(t)$确定了一条和 t 一一对应的曲线段,则称此曲线段为简单曲线段。

对任意曲线小范围的研究,总可以作为简单曲线段来处理,以后所讨论的曲线皆为简单曲线段,不另赘述。

如果 $\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0$ 为常矢径,此时 $\boldsymbol{r}(t)$终点曲线只是一个点,那么满足什么条件时,$\boldsymbol{r}(t)$表示一条曲线呢? 对此有如下的定理。

若 $\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的终点轨迹为简单曲线段。

显然,简单曲线段是一条光滑的曲线,其上没有尖点,为此称简单曲线上的点为正常点,而称曲线上 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{0}$ 的点为奇点。一般情况下,今后总假定 $\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0}$。

1.2.3 曲线的基本三棱形

1. 切线和法平面

当 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{r}'(t_0)$为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 处的切线方向矢量,且总是指向 t 增加的方向,我们把 $\boldsymbol{r}'(t_0)$所指方向规定为切线的正向,设 $\boldsymbol{\rho}$ 为切线上任一点的矢径,则

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(t_0)+\lambda\boldsymbol{r}'(t_0)$$

为切线方程。

过曲线上一点 P_0,其相应参数为 t_0,垂直于该点切线的直线叫做曲线在该点的法线。显然这样的法线有无数条。它们都在过 P_0 且垂直于 $\boldsymbol{r}'(t_0)$的平面上(如图 1.1 所示),称此平面为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在 P_0 处的法面。显然,$\boldsymbol{r}'(t_0)$为该法面的法矢量,则该法面的方程为

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0))=0$$

其中 $\boldsymbol{\rho}$ 为该法面上任一点的矢径。

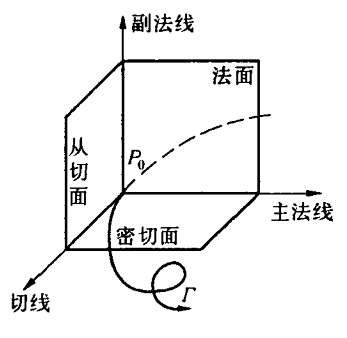


图 1.1

2. 密切面和副法线

称过曲线上一点 P_0 的切线的平面为该曲线在 P_0 处的一个切面,显然这样的切面有无数个,这其中最重要的一个就是密切面。

由曲线 Γ 上 P_0 点近旁的点 P 以及 P_0 处的切线 P_0T 一般可决定一个平面,当 P 沿曲线 Γ 趋于 P_0 时,如果此平面的极限位置

存在，则称这个极限位置的平面 π 为曲线 Γ 在 P_0 处的密切面。从几何上看，切线是最贴近曲线的直线，密切面是最贴近曲线的平面。

显然，密切平面 π 的法矢 $\boldsymbol{n}$ 应与 $\lim\limits_{P\to P_0}\overrightarrow{P_0T}\times\overrightarrow{P_0P}$ 平行，而

$\overrightarrow{P_0T}\times\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{r}'(t_0)\times[\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)]=\frac{1}{2}[\boldsymbol{r}'(t_0)\times \boldsymbol{r}''(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}]\Delta t^2$ 其中，$\lim\limits_{P\to P_0}\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$。由此可见，$\boldsymbol{n}$ 可取为

$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)$。

因此，当 $\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)\neq\mathbf{0}$ 时，曲线在 P_0 处的密切面方程为

$$[\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)]\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0))=0$$

式中，$\boldsymbol{\rho}$ 为该密切面上任一点的矢径。

当 $\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)=\mathbf{0}$ 时，称 P_0 点为曲线的逗留点，当曲线上每一点都有该式成立时，由 1.1.4 段可知 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'(t)$ 为定向变矢，即 $\boldsymbol{r}'(t)=\lambda(t)\boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 为某确定的幺矢。将此式积分可得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}\int_{t_0}^{t}\lambda(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{c}$$

可见该段曲线为直线段。

如果曲线不含直线段，则逗留点的密切面可由其近旁点的密切面的极限位置而得到。

当 $\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)\neq\mathbf{0}$ 时，过 P_0 点作平行于 $\boldsymbol{r}(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)$ 的矢量为曲线在 P_0 点的一条法线，称此法线为副法线，并规定 $\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)$ 所指方向为其正向，设 $\boldsymbol{\rho}$ 为副法线上任一点的矢径，则 P_0 点副法线的方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(t_0)+\lambda\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)$$

其中，λ 为实数。

如果 Γ 为平面曲线，则其上每一点的密切面就是曲线所在平面，反之曲线上的所有点有共同的密切面，则所有点都在这个密切

面上。这就是说曲线为平面曲线等价于曲线上所有点有一个共同的密切面。容易证明:不含逗留点的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为平面曲线的充要条件是 $(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=0$。

3. 主法线和从切面

至此,我们得到互相垂直的两条直线和两个平面,即切线、副法线及法面、密切面。由图 1.1 可见,法面和密切面的交线也是曲线在 P_0 处的一条法线,称之为主法线。因为主法线在密切面上,所以垂直于副法线,主法线又在法面上,所以它又垂直于切线。可见,主法线方向矢量为 $(\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0))\times\boldsymbol{r}'(t_0)$。如果以此矢量作为主法线正向矢量,则切线正向矢量、主法线正向矢量、副法线正向矢量构成右手系。

设 $\boldsymbol{\rho}$ 为曲线在 P_0 处的主法线上任一点的矢径,则 P_0 点的主法线方程为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(t_0)+\lambda(\boldsymbol{r}'(t_0)\times(\boldsymbol{r}''(t_0))\times\boldsymbol{r}'(t_0)$$

其中,λ 为实数。

由图 1.1 可以看到切线矢量和副法线矢量又决定一个平面,因为这个平面过切线,所以它是曲线 Γ 在 P_0 处的一个切面,称之为从切面。因为它过切线和副法线,所以它既垂直于法面又垂直于密切面。这样,我们就得到曲线 Γ 在 P_0 处三个互相垂直的平面。

设 $\boldsymbol{\rho}$ 为曲线在 P_0 处的从切面上任一点的矢径,则 P_0 的从切面方程为

$$[(\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0))\times\boldsymbol{r}'(t_0)](\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0))=0$$

曲线 Γ 的 P_0 点处互相垂直的切线、主法线、副法线这三条直线以及互相垂直的密切面、法面、从切面这三个平面所构成的三棱形称为曲线 Γ 在 P_0 处的基本三棱形。

当点 P_0 沿曲线 Γ 运动时,则相应的基本三棱形也随之而运动,所以基本三棱形又称为曲线 Γ 的伴随三棱形,或动标三棱形。

简称切线、主法线、副法线的正向幺矢为切矢、主法矢、副法

矢，并依次记为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$，并统称之为曲线 Γ 上 P_0 点的基本矢。

如果 Γ 不是直线或不含直线段，则不同点的基本矢一般不对应相等，显然曲线 Γ 的基本矢 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 一般也是 t 的函数。

1.2.4 运动不变量(弧长、曲率、挠率)

所谓运动不变量，就是经过刚体运动而不会改变的几何量，或者说是与图形位置无关、而仅仅与图形本身有关的几何量，也就是在直角坐标系的平移和旋转变换下的不变量。这一概念对于机械工程是十分重要的。

显然，矢径在旋转变换中，只改变了坐标但还是原来的矢径；而在平移变换中，新旧矢径仅差一个常矢量，求导后相等，所以矢径的导矢是运动不变量，由导矢的运算所得的新几何量，例如，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 以及后面要讲的弧长、曲率和挠率都是运动不变量。

1. 弧长与自然参数

设曲线 Γ 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\{x(t),y(t),z(t)\}$$

其导矢为 $\boldsymbol{r}'=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$，则有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,|\mathrm{d}t|$$

由弧微分公式有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

于是有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=1$$

式中，s 的增加与 t 增加的方向一致时有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\alpha}$$

式中，$\boldsymbol{\alpha}$ 就是基本矢的切矢。

还有 $\mathrm{d}s=|\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}t$，又可以得到